درس جداسازی کور منابع و پردازش تنک سیگنالها

جلسه چهارم

مباحثی از آمار و احتمال

متغیرهای تصادفی پیوسته:

← تابع توزیع (CDF ← Cumulative Distribution Function)

$$F_X(x_0) = P\{X \leq x_0\}$$

$0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$ و صعودی

← تابع چگالی احتمال (PDF = Prob. Density Func.)

$$P_X(x_0) = \left.\frac{dF_X(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \quad , \quad F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} P_X(x)\,dx$$

بردار تصادفی:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

تک تک عناصر

CDF → $F_{\underline{X}}(\underline{x}_0) = P\{\underline{X} \leq \underline{x}_0\}$

PDF → $P_{\underline{X}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n} F_{\underline{X}}(\underline{x})\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_0}$

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}_0) = \int_{-\infty}^{x_{0,1}}\int_{-\infty}^{x_{0,2}}\cdots\int_{-\infty}^{x_{0,n}} P_{\underline{X}}(\underline{x})\,dx_n\cdots dx_1$$

توجه: $\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\underline{X}}(\underline{x})\,d\underline{x} = 1$ ← انتگرال چندگانه

توابع توزیع توأم و حاشیه‌ای در بردار تصادفی :

$\underline{X}$ و $\underline{Y}$ دو بردار تصادفی : توابع توأم در واقع توابع بردار تصادفی بزرگتر $\begin{bmatrix}\underline{X}\\ \underline{Y}\end{bmatrix}=\underline{Z}$ هستند:

تابع توزیع توأم ← $F_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x}_0,\underline{y}_0)=P\{\underline{X}\le \underline{x}_0,\ \underline{Y}\le \underline{y}_0\}$

" چگالی " ← $P_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x}_0,\underline{y}_0) =$ مشتق بالایی

حاشیه‌ای :

$$P_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\underline{X},\underline{Y}}(\underline{x},\underline{\eta})\,d\underline{\eta}$$, $P_{\underline{Y}}(\underline{y}) =$ مشابه

امید ریاضی (Expected Value):

خواص:

① $$E\{g(\underline{X})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\underline{x})\, P_{\underline{X}}(\underline{x})\, d\underline{x}$$

② خطی بودن:

$$E\{\sum a_i \underline{X}_i\} = \sum a_i\, E\{X_i\}$$

③ تبدیل خطی:

$$E\{\underbrace{A}_{k\times m}\ \underbrace{\underline{X}}_{m\times 1}\} = A\,E\{\underline{X}\}$$

$$E\{\underline{x}\,B\} = E\{\underline{x}\}\,B$$

بردار میانگین و ماتریس همبستگی (correlation) :

$$\underline{m}_x \triangleq E\{\underline{x}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}\, p_x(\underline{x})\, d\underline{x}$$

درایه iام

$$m_{x_i} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\, p_x(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\, p_{x_i}(x_i)\, dx_i$$

$$r_{ij} = E\{x_i x_j^*\} \rightarrow \text{همبستگی}$$

ماتریس همبستگی بردار تصادفی $\underline{x}$ ←

$$R_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{R_x = E\{\underline{x}\,\underline{x}^H\}}$$

حقیقی

$$R_x = E\{\underline{x}\,\underline{x}^T\}$$

$$R_x = E\{\underline{x}\,\underline{x}^H\}$$

خواص ماتریس همبستگی :

۱) تقارن هرمیتی ← $R^H = R$ ← برای حالت حقیقی : $R^T = R$

۲) مثبت نیمه معین است ($R_x \geq 0$) .

ماتریس‌های مثبت معین:

تعریف ۱: ماتریس هرمیتی A مثبت نیمه معین گفته می‌شود اگر: $\forall \underline{x}: \ \underbrace{\underline{x}^H A \underline{x}}_{\downarrow} \geq 0$

positive semi-definite

این موضوع با $A \geq 0$ نشان داده می‌شود.

توجه: برای A هرمیتی این عبارت حتماً یک عدد حقیقی است چون:

$$y \triangleq \underline{x}^H A \underline{x} \Rightarrow y^* = y^H = \underline{x}^H \overbrace{A^H}^{A} \underline{x} = \underline{x}^H A \underline{x} = y$$

نمادگذاری: $A > 0$

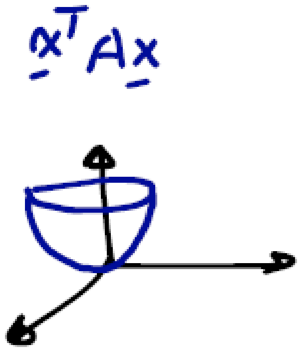
تعریف ۲: ماتریس " " مثبت معین " " " " " : $\forall \underline{x} \neq \underline{0}: \ \underline{x}^H A \underline{x} > 0$

positive definite

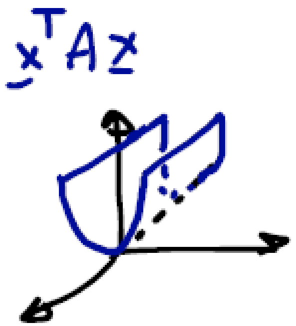
به طریق مشابه: neg. def. می‌توان تعریف کرد

تعریف ۳: اگر برای بعضی $\underline{x}$ ها ، $\underline{x}^H A \underline{x} > 0$ و برای بعضی $\underline{x}$ ها $\underline{x}^H A \underline{x} < 0$
شود A را indefinite می‌نامیم.

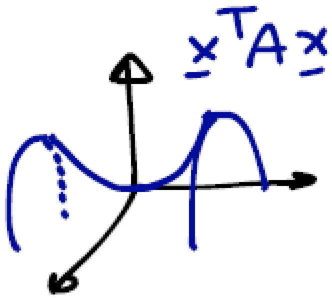
تعبیر هندسی (برای A حقیقی):



$A > 0$



$A \geq 0$



A indefinite

ادامه یک ماتریس همبستگی:

$$R_x = E\{\underline{x}\,\underline{x}^H\}$$

① تقارن هرمیتی ← $R^H = R$

② مثبت نیمه معین است ($R_x \geq 0$).

توجه ۱: R_x هرمیتی ⇐ $\overset{n\times n}{R_x}$ تمام خواص ماتریس‌های هرمیتی را دارد، مثلاً:

الف) همواره n بردار ویژه متعامد برای آن می‌توان پیدا کرد.

ب) مقادیر ویژه تماماً حقیقی

اثبات: A هرمیتی:

$$A\underline{q}_i = \lambda_i \underline{q}_i \xrightarrow[\underline{q}_i^H]{\text{ضرب از چپ در}} \underline{q}_i^H A \underline{q}_i = \lambda_i \underline{q}_i^H \underline{q}_i \Rightarrow \boxed{\lambda_i = \frac{\underline{q}_i^H A \underline{q}_i}{\underline{q}_i^H \underline{q}_i}}$$

نسبت رایلی ← برای ماتریس‌های هرمیتی هم صورت و هم مخرج حقیقی

توجه ۲: R_x همه خواص ماتریس مثبت نیمه معین را دارد:

الف) $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$

توجه: معمولاً $R_x > 0$ است.

ماتریس کوواریانس:

میانگین را بیرون می‌آوریم:

$$C_x = E\{(\underline{x} - \underline{m}_x)(\underline{x} - \underline{m}_x)^H\}$$

$$\Rightarrow R_x = C_x + \underline{m}_x \underline{m}_x^H$$

میانگین $= 0 \Rightarrow$ کوواریانس = کورلیشن