درس جداسازی کور منابع و پردازش تنک سیگنالها

جلسه پنجم

ادامه مباحثی از آمار و احتمال:

الف) ناهمبستگی در مقابل استقلال

ب) شروع مبحث HOS: ممان و کومولان

ناهمبستگی در مقابل استقلال:

توجه:

$$\text{استقلال} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{ناهمبستگی}$$

یادآوری تعاریف:

استقلال در متغیر تصادفی: $P_{X_1X_2}(x_1,x_2) = P_{X_1}(x_1)P_{X_2}(x_2)$

ناهمبستگی: $E\{X_1X_2\} = E\{X_1\}E\{X_2\}$

$$\text{استقلال} \Rightarrow E\{X_1X_2\} = \int_{x_1}\int_{x_1} x_1x_2 \overbrace{P_{X_1X_2}(x_1,x_2)}^{P_{X_1}(x_1)P_{X_2}(x_2)} dx_1dx_2$$

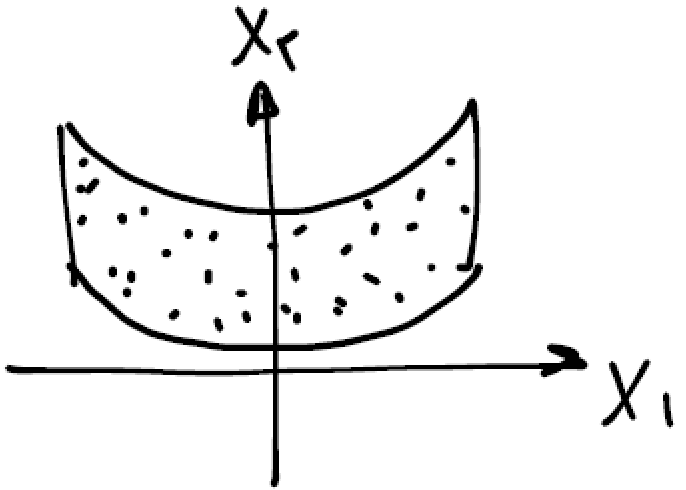
$$= \int_{x_1} x_1P_{X_1}(x_1)dx_1 \int_{x_2} x_2P_{X_2}(x_2)dx_1 = E\{X_1\}E\{X_2\} \Rightarrow \text{ناهمبستگی}$$

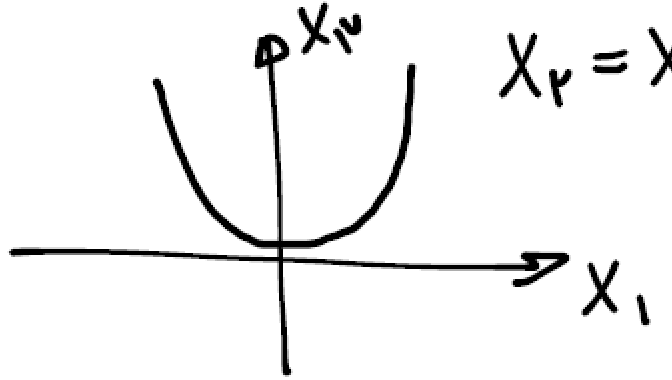
تعبیر هندسی :

ناهمبستگی از حالت میانگین گیری از ضرب متغیرها صفر باشد ← $E\{X_1X_2\}=0$

یعنی نمونه‌های X_1 و X_2 به گونه‌ای باشند که X_1X_2 حول صفر متقارن باشد.

مثلاً X_1 و X_2 های شکل‌های زیر ناهمبسته هستند :



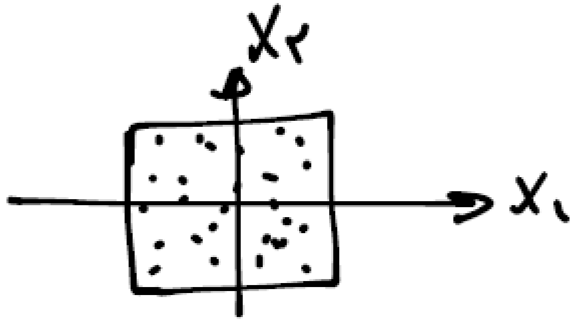


$X_2 = X_1^2$

مثلاً برای X_1 یکنواخت روی $(-1,1)$:

$E\{X_1X_2\} = E\{X_1^3\} = 0 \Rightarrow$ X_1 و X_2 ناهمبسته هستند

ولی وابستگی کامل دارند ($X_2=X_1^2$).



استقلال : $P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = P_{X_2}(x_2)$

حالت گوسی:

سؤال: آیا درست است که دو متغیر گوسی ناهمبسته دقیقاً مستقلند؟

جواب: خیر. مثال:

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad Z = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{با احتمال } \frac{1}{2} \end{cases}$$

مستقل از X_1

$$X_2 = Z X_1$$

X_1 و X_2 به وضوح وابسته هستند (مثلاً اگر بدانیم $X_1 = 5$ شده، X_2 اگر چیزی جز ۵ و ۵− نمی‌تواند باشد).

اما X_1 و X_2 ناهمبسته هستند:

$$E\{X_1 X_2\} = E\{Z X_1^2\} = \underbrace{E\{Z\}}_{0} E\{X_1^2\} = 0$$

توجه: اما اگر دو متغیر توأماً گوسی باشند، ناهمبسته باشند مستقلند، چون:

$\rho = 0$ اگر

$$P_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\quad} \exp\left\{-\frac{(x_1^2 + \rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2\sigma^2}\right\}$$

که اگر $\rho = 0$ (ناهمبسته) باشد $P_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ بصورت حاصلضرب یک عبارت برحسب x_1 و یک عبارت برحسب x_2 تجزیه می‌شود $\Longrightarrow$ یعنی استقلال.

ادامه مبحث آمار و احتمال:

استقلال چند متغیر تصادفی:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$P_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i)$$

توابع چگالی شرطی:

$$P_{\underline{x}|\underline{y}}(x|y) = \frac{P_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)}{P_{\underline{y}}(y)}$$

تک و تک خانم

یعنی: اگر $\underline{y}$ در ناحیه $y_0 < \underline{y} \leqslant y_0+\Delta y$ اتفاق افتاده باشد احتمال آنکه $\underline{x}$

در ناحیه $x_0 < \underline{x} \leqslant x_0+\Delta x$ باشد برابر $P_{\underline{x}|\underline{y}}(x_0|y_0)\Delta x$ باشد

$$P\{x_0 < \underline{x} \leqslant x_0+\Delta x \mid y_0 < \underline{y} \leqslant y_0+\Delta y\} = \frac{P\{x_0 < \underline{x} \leqslant x_0+\Delta x,\ y_0 < \underline{y} \leqslant y_0+\Delta y\}}{P\{y_0 < \underline{y} \leqslant y_0+\Delta y\}}$$

$$\simeq \frac{P(x_0,y_0)\,\Delta x\,\cancel{\Delta y}}{P(y_0)\,\cancel{\Delta y}} = \frac{P(x_0,y_0)}{P(y_0)}\Delta x$$

← مثال 2.7 کتاب (صفحه ۳۰) نگاه شود.

ممانها و کومولانها (آمار مرتبه (Higher Order Statistics = HOS

برای یک متغیر تصادفی (حالت اسکالر):

ممان درجه n ام (n'th order moment):

$$m_n \triangleq E\{x^n\}$$

می‌توان دید که ممانها ضرائب بسط تیلور تابع مشخصه اول $\left(\Phi_x(s) \triangleq E\{e^{sx}\}\right)$ هستند:

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \Phi'(0)s + \frac{1}{2!}\Phi''(0)s^2 + \cdots$$

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \Phi'(0)s + \frac{1}{2!}\Phi''(0)s^2 + \cdots$$

ضریب جمله درجه n $= \dfrac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)$

$$\Phi(s) = E\{e^{sX}\} \xrightarrow[\text{به } s]{\text{مشتق نسبت}} \Phi'(s) = E\{Xe^{sX}\} \xrightarrow{\text{مشتق}} \Phi''(s) = E\{X^2e^{sX}\}$$

$$\longrightarrow \cdots \rightarrow \Phi^{(n)}(s) = E\{X^n e^{sX}\} \Rightarrow \Phi^{(n)}(0) = E\{X^n\} = m_n$$

بسط تیلور $\Phi(s)$: $\Phi(s) = \overset{1}{\overline{m_0}} + m_1 s + \frac{1}{2!}m_2 s^2 + \frac{1}{3!}m_3 s^3 + \cdots$

← مشکل کار کردن با ممان‌ها به عنوان معیاری از آماره‌گان مراتب مختلف آن است که از هم مستقل نیستند. مثلاً میانگین (ممان درجه ۱) را که تغییر دهیم، $E\{X^2\}$ (ممان درجه ۲) هم تغییر می‌کند. بنابراین ممان درجه ۲ به تنهایی توصیف خوبی از آماره‌گان درجه ۲ نمی‌دهد.

⇐ به سراغ کومولان‌ها می‌رویم ← مثلاً خواهیم دید که کومولان درجه ۱ همان میانگین است و کومولان درجه ۲ واریانس است.

کومولان‌ها (cumulant):

به صورت ضرائب بسط تیلور تابع مشخصه دوم ($\Psi_X(s) \triangleq \ln \Phi_X(s)$) تعریف می‌شوند:

$$K_n \triangleq \Psi^{(n)}(s)\Big|_{s=0} \xrightarrow[K_0=0]{\text{می‌توان دید}} \Psi(s) = K_1 + \frac{1}{2!}K_2 s^2 + \frac{1}{3!}K_3 s^3 + \cdots$$

— می‌توان ممان را بر حسب کومولان‌ها حساب کرد :

$$\Phi_X(s) \triangleq E\{e^{sX}\} \Rightarrow \Phi^{(n)}(0) = E\{X^n\} = m_n$$

$$\rightarrow k_0 = \Psi(s)\Big|_{s=0} = \ln \overbrace{\Phi(0)}^{1} = 0$$

$$\rightarrow K_1 = \Psi'(s)\Big|_{s=0} \quad , \quad \Psi(s) = \ln\Phi(s) \Rightarrow \Psi'(s) = \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} \quad (1)$$

$$\Psi'(0) = \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0)} = \frac{m_1}{1} = m_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 = m_1}$$

→ $k_2 \triangleq \psi''(s)\big|_{s=0}$

$$① \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{مشتق از}} \psi''(s) = \frac{\phi''(s)\phi(s) - [\phi'(s)]^2}{[\phi(s)]^2} \quad ②$$

$$\Rightarrow \psi''(0) = \frac{m_2 - m_1^2}{1} \Rightarrow \boxed{K_2 = m_2 - m_1^2}$$

↳ همان واریانس شد

→ $K_3 = ?$

یک بار دیگر از طرفین ② مشتق می‌گیریم و بعد $s=0$ می‌گذاریم:

$$\boxed{K_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3}$$

→ $k_4 \xrightarrow{\text{بالا}}$ محاسبات طولانی که به $\Rightarrow \boxed{K_4 = m_4 - 4m_1m_3 - 3m_2^2 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4}$

توجه: در حالت خاصی که متوسط متغیر تصادفی X صفر باشد ($m_1 = 0$) ، داریم:

$$\boxed{E\{X\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} K_2 = m_2 \\ K_3 = m_3 \\ K_4 = m_4 - 3m_2^2 \end{cases}}$$

← توجه: کمانها و کومولانهای برخی توزیعهای معروف در جدول و شکلهای Nikias نگاه شود.

ممان و کومولان تانسل متقابل (از کتاب Nikias)

تابع مشخصه اول $\rightarrow \Phi(s_1, \dots, s_n) \triangleq E\left\{e^{s_1 x_1 + \dots + s_n x_n}\right\}$

تابع مشخصه دوم $\rightarrow \Psi(s_1, \dots, s_n) \triangleq \ln \Phi(s_1, \dots, s_n)$

ممان متقابل $\{x_1, \dots, x_n\}$ از رتبه $r = k_1 + \dots + k_n$ ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underbrace{\mathrm{Mom}_{k_1 k_2 \cdots k_n}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}} \triangleq E\left\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\right\} = m$$

در Nikias با $\mathrm{Mom}\left\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\right\}$

$$= \left.\frac{\partial^r \Phi(s_1, \dots, s_n)}{\partial s_1^{k_1} \partial s_2^{k_2} \cdots \partial s_n^{k_n}}\right|_{s_1 = \dots = s_n = 0}$$

← توجه: منظور از $Mom\{X_1,\dots,X_n\}$ آن است که $Mom_{11\dots1}\{X_1,\dots,X_n\}$. پس:

$$Mom_{k_1k_2\dots k_n}\{X_1,\dots,X_n\} = Mom\{X_1^{k_1},\dots,X_n^{k_n}\}$$

← توجه: برای یک متغیر تصادفی X:

$$m_k = Mom\{\overbrace{X, X, \dots, X_n}^{k \text{ مرتبه}}\}$$

← توجه: مثلاً برای دو متغیر تصادفی ۵ تا ممان درجه ۴ داریم:

$$Mom_{04}\{X_1,X_2\} \quad Mom_{13}\{//\} \quad Mom_{22}\{//\} \quad Mom_{31}\{//\}$$

$$Mom_{40}\{//\}$$

<u>تعریف (کومولان)</u>: کومولان متقابل مرتبه $r=k_1+k_2+\cdots+k_n$ ام :

$$\underbrace{Cum_{k_1k_2\cdots k_n}\{x_1,\dots,x_n\}} \triangleq \left.\frac{\partial^r \psi(s_1,\dots,s_n)}{\partial s_1^{k_1}\cdots\partial s_n^{k_n}}\right|_{s_1=\cdots=s_n=0}$$

نمادگذاری Nikias :

$$\cancel{Cum\{x_1^{k_1},\dots,x_n^{k_n}\}}$$

قرارداد : $Cum\{-/-\}=Cum_{11\cdots1}\{-/-\}$

توجه : $Cum_{k_1k_2\cdots k_n}\{x_1,\dots,x_n\}=Cum\{\overbrace{x_1,x_1,\dots,x_1}^{\text{مرتبه } k_1},\overbrace{x_2,\dots,x_2}^{\text{مرتبه } k_2},\dots\}$

ارتباط بین ممان‌ها و کومولان‌ها :

فرمول کلی :

$$\mathrm{Cum}\{X_1,\dots,X_n\}=\sum_{S_1\cup S_2\cdots\cup S_p=\{1,2,\dots,n\}}(-1)^{p-1}(p-1)!\,E\Big\{\prod_{i\in S_1}X_i\Big\}\,E\Big\{\prod_{i\in S_2}X_i\Big\}\cdots E\Big\{\prod_{i\in S_p}X_i\Big\}$$

که در آن $\sum$ روی همه افرازها (پارتیشن‌ها) $(S_1,\dots,S_p)$ از اعداد صحیح $(1,2,\dots,n)$ برای همه افرازهای $p=1,2,\dots,n$ تایی صورت می‌گیرد.