دانشگاه صنعتی شریف | **تمرین سری هشتم درس مدارهای الکتریکی** | **تاریخ تحویل: ۱۳۹۹/۳/۹**

۱- مسئله ۶ از فصل ششم کتاب را حل کرده و سپس با نوشتن معادلات دوگان معادلات گره، مدار دوگان آن را رسم کنید. شرایط اولیه را لازم نیست بدست آورید. فقط روش محاسبه آن را بگویید.

حل: ولتاژ خازن های عمودی ۱ و ۲ و ۳ فارادی را به ترتیب v_3, v_2, v_1 می نامیم.

$$\begin{cases} KCL1: -i_s(t) + Dv_1 + (v_1 - v_2) + 2D(v_1 - v_3) = 0 \\ KCL2: (v_2 - v_1) + 2Dv_2 + 2(v_2 - v_3) = 0 \\ KCL3: 2D(v_3 - v_1) + 2(v_3 - v_2) + 3Dv_3 = 0 \\ v_o = v_3 \end{cases} \Rightarrow 30\frac{d^3v_o}{dt^3} + 90\frac{d^2v_o}{dt^2} + 48\frac{dv_o}{dt} + 4v_o(t) = 4\frac{d^2i_s}{dt^2} + 48\frac{di_s}{dt} + 4i_s(t)$$

مدار ۴ خازن در یک حلقه خازنی دارد و لذا مرتبه مدار ۳ است. فرض کنیم ولتاژ اولیه ۳ خازن عمودی در صفر مثبت معلوم باشد:

$v_1(0^+), v_2(0^+), v_3(0^+)$

ولتاژ خروجی در صفر مثبت برابر ولتاژ خازن سوم در صفر مثبت است.

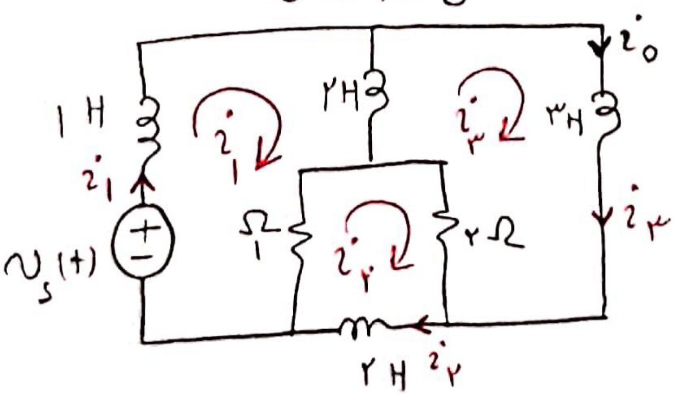
در اگر ۳ معادله KCL بالا را در صفر مثبت در نظر بگیریم، مشتق ولتاژ هر ۳ خازن در صفر مثبت بدست می آید و لذا مشتق ولتاژ خروجی در صفر مثبت برابر مشتق ولتاژ خازن سوم در صفر مثبت خواهد بود.

اگر از سه معادله KCL مشتق بگیریم و بعد در صفر مثبت آنها را در نظر بگیریم، مشتق دوم ولتاژ هر ۳ خازن در صفر مثبت بدست می آید و لذا مشتق دوم ولتاژ خروجی در صفر مثبت برابر مشتق دوم ولتاژ خازن سوم در صفر مثبت خواهد بود.

معادلات دوگان و مدار دوگان:

$$\begin{cases} KVL1: -v_s(t) + Di_1 + (i_1 - i_2) + 2D(i_1 - i_3) = 0 \\ KVL2: (i_2 - i_1) + 2Di_2 + 2(i_2 - i_3) = 0 \\ KVL3: 2D(i_3 - i_1) + 2(i_3 - i_2) + 3Di_3 = 0 \\ i_o = i_3 \end{cases}$$

شکل مدار دوگان



۲- مسئله ۲۰ از فصل ششم کتاب را حل کنید.

$$\Re_0(e^{-2t}\cos tu(t)) = e^{-t}u(t) \Rightarrow \Re_0(\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\cos tu(t)\right)) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}u(t)\right)$$

$$\Rightarrow \Re_0(-2e^{-2t}\cos tu(t) - e^{-2t}\sin tu(t) + \delta(t)) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

$$\Rightarrow -2\Re_0(e^{-2t}\cos tu(t)) - \Re_0(e^{-2t}\sin tu(t)) + \Re_0(\delta(t)) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

$$\Rightarrow \Re_0(e^{-2t}\sin tu(t)) = -e^{-t}u(t) - \delta(t) + h(t) \Rightarrow \Re_0(\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\sin tu(t)\right)) = \frac{d}{dt}\left(-e^{-t}u(t) - \delta(t) + h(t)\right)$$

$$\Rightarrow \Re_0(-2e^{-2t}\sin tu(t) + e^{-2t}\cos tu(t) + 0.\delta(t)) = e^{-t}u(t) - \delta(t) - \frac{d\delta}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow -2\Re_0(e^{-2t}\sin tu(t)) + \Re_0(e^{-2t}\cos tu(t)) = e^{-t}u(t) - \delta(t) - \frac{d\delta}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow -2(-e^{-t}u(t) - \delta(t) + h(t)) + e^{-t}u(t) = e^{-t}u(t) - \delta(t) - \frac{d\delta}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} + 2h(t) = \frac{d\delta}{dt} + 3\delta(t) + 2e^{-t}u(t)$$

حال با جمع آثار پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$\frac{dh}{dt} + 2h(t) = \frac{d\delta}{dt} + 3\delta(t) \Rightarrow h_1(t) = k_1e^{-2t}u(t) + k_2\delta(t) \Rightarrow h_1(t) = e^{-2t}u(t) + \delta(t)$$

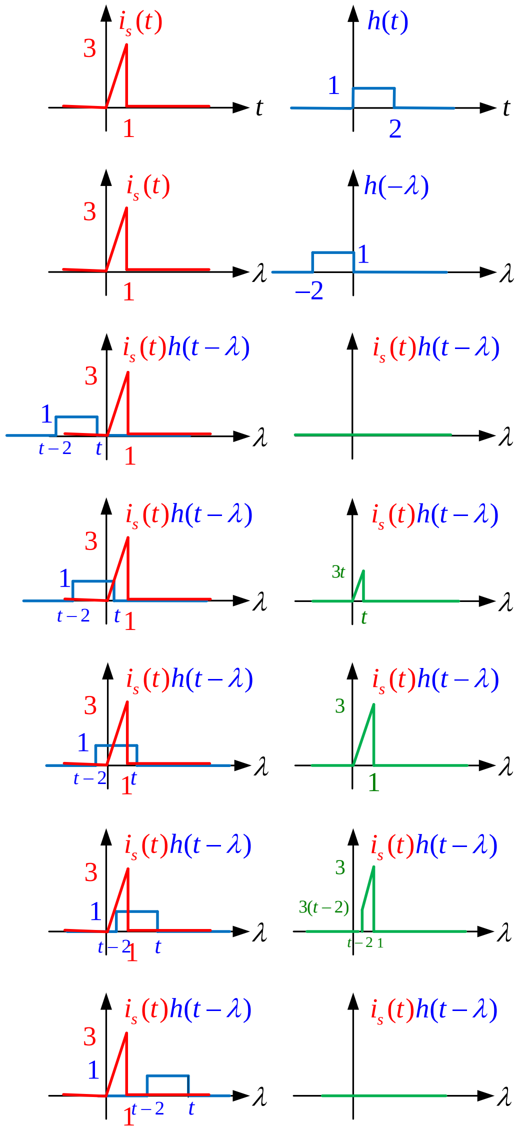
$$\frac{dh}{dt} + 2h(t) = 2e^{-t}u(t) \Rightarrow h_2(t) = k_1e^{-2t}u(t) + k_2e^{-t}u(t) \Rightarrow h_2(t) = -2e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t)$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = -e^{-2t}u(t) + \delta(t) + 2e^{-t}u(t)$$

$$s(t) = \int_{0^-}^{t} h(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1)u(t) + u(t) + 2(e^{-t} - 1)u(t)$$

۳- مسئله ۳۱ از فصل ششم کتاب را با رسم شکل حل کنید.

حل:



$$\left.\begin{array}{l}
t<0 \Rightarrow y(t)=0 \\[2em]
t>0, t<1 \Rightarrow y(t)=\dfrac{(t).(3t)}{2} \\[2em]
t>1, t-2<0 \Rightarrow y(t)=\dfrac{(1).(3)}{2} \\[2em]
t-2<1, t-2>0 \Rightarrow y(t)=\dfrac{(3).(3(t-2))}{2}.(1-(t-2)) \\[2em]
t-2>1 \Rightarrow y(t)=0
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1.5t^2 & 0\le t<1 \\ 1.5 & 1\le t<2 \\ -1.5t^2+6t-4.5 & 2\le t<3 \\ 0 & t\ge 3 \end{cases}$$

۴- اگر پاسخ ضربه یک مدار LTI به صورت $h(t)=2e^{-3t}u(t)$ باشد، پاسخ حالت صفر مدار بـه ورودی $w(t)=5\big(u(t-1)-u(t-3)\big)$ را به دو روش حساب کنید: الف) با استفاده از انتگرال کانولوشن (با ترسیم شکل مناسب)، ب) با استفاده از اصل جمع آثار و ارتبـاط بـین پاسـخ ضربه و پله و بدون استفاده از کانولوشن

حل: الف) کانولوشن

$$h(t)=2e^{-3t}u(t)$$

$$w(t)=5\big(u(t-1)-u(t-3)\big)$$

$$y(t)=h(t)*w(t)=\int_0^t h(\lambda)w(t-\lambda)d\lambda$$

$$\{t-1<0\Rightarrow y(t)=0 \quad t<1$$

$$\begin{cases}t-1>0\\ t-3<0\end{cases}\Rightarrow y(t)=\int_0^{t-1} h(\lambda)w(t-\lambda)d\lambda=\int_0^{t-1}2e^{-3\lambda}.5d\lambda=\frac{10}{3}(1-e^{-3(t-1)}) \quad 1\le t<3$$

$$\begin{cases}t-3>0\Rightarrow y(t)=\int_{t-3}^{t-1} h(\lambda)w(t-\lambda)d\lambda=\int_{t-3}^{t-1}2e^{-3\lambda}.5d\lambda=\frac{10}{3}(e^{-3(t-3)}-e^{-3(t-1)}) \quad t\ge 3\end{cases}$$

ب) با استفاده از پاسخ پله

$$h(t)=2e^{-3t}u(t)\Rightarrow s(t)=\int_{0^-}^t h(\lambda)d\lambda=\int_{0^-}^t 2e^{-3\lambda}u(\lambda)d\lambda=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t 2e^{-3\lambda}d\lambda & t>0\end{cases}=\frac{2}{3}(1-e^{-3t})u(t)$$

$$w(t)=5\big(u(t-1)-u(t-3)\big)\Rightarrow y(t)=5\big(s(t-1)-s(t-3)\big)=\frac{10}{3}(1-e^{-3(t-1)})u(t-1)-\frac{10}{3}(1-e^{-3(t-3)})u(t-3)$$

$$=\begin{cases}0 & t<1\\ \frac{10}{3}(1-e^{-3(t-1)}) & 1\le t<3\\ \frac{10}{3}(e^{-3(t-3)}-e^{-3(t-1)}) & t\ge 3\end{cases}$$

۵- پاسخ پله یک مدار LTI برابر است با: $s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le 0<1\\ 3-e^{-(t-1)} & t>1\end{cases}$

پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی $w(t)=2e^{-t}u(t)$ حساب کنید.

$$s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le 0<1\\ 3-e^{-(t-1)} & t>1\end{cases}=tu(t)+(3-e^{-(t-1)})u(t-1)$$

$$h(t)=\frac{ds}{dt}=u(t)+0.\delta(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+(3-1)\delta(t-1)=u(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+2\delta(t-1)$$

$$y(t)=h(t)*w(t)=\left(u(t)+e^{-(t-1)}u(t-1)+2\delta(t-1)\right)*\left(2e^{-2t}\,u(t)\right)$$

$$=u(t)*\left(2e^{-t}\,u(t)\right)+\left(e^{-(t-1)}u(t-1)\right)*\left(2e^{-t}\,u(t)\right)+\left(2\delta(t-1)\right)*\left(2e^{-t}\,u(t)\right)$$

$$=\left(\int_0^t 2e^{-\lambda}\,d\lambda\right)u(t)+\left(\int_1^t e^{-(\lambda-1)}.2e^{-(t-\lambda)}d\lambda\right)u(t-1)+2\left(2e^{-(t-1)}\,u(t-1)\right)$$

$$=2\left(1-e^{-t}\right)u(t)+\left(2(t-1)e^{-(t-1)}\right)u(t-1)+4e^{-(t-1)}\,u(t-1)$$

۶- پاسخ ضربه مدارهای توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را حساب کنید.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+5y=2\frac{d^2w}{dt^2}+w(t)$$

$$\frac{dy}{dt}+3y=5\frac{d^2w}{dt^2}-3\frac{dw}{dt}-w(t)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=\frac{dw}{dt}+3w(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+5y=2\frac{d^2w}{dt^2}+w(t)$$

$$\frac{d^2h}{dt^2}+4\frac{dh}{dt}+5h=\delta(t)+0\delta'(t)+2\delta''(t)$$

$$\begin{cases}\times 5 & h(t)=(k_1e^{-t}\cos t+k_2e^{-t}\sin t)u(t)+k_3\delta(t)\\ \times 4 & \dfrac{dh}{dt}=(-k_1e^{-t}\cos t-k_1e^{-t}\sin t-k_2e^{-t}\sin t+k_2e^{-t}\cos t)u(t)+(k_1)\delta(t)+k_3\delta'(t)\\ \times 1 & \dfrac{d^2h}{dt^2}=(\cdots\cdots\cdots)u(t)+(-k_1+k_2)\delta(t)+(k_1)\delta'(t)+k_3\delta''(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}5k_3+4(k_1)+(-k_1+k_2)=1\\ 4k_3+(k_1)=0\\ k_3=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_3=2\\ k_2=15\\ k_1=-8\end{cases}\Rightarrow h(t)=(-8e^{-t}\cos t+15e^{-t}\sin t)u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{dy}{dt}+3y=5\frac{d^2w}{dt^2}-3\frac{dw}{dt}-w(t)$$

$$\frac{dh}{dt}+3h(t)=-\delta(t)-3\delta'(t)+5\delta''(t)$$

$$\begin{cases}\times 3 & h(t)=(k_1e^{-3t})u(t)+k_2\delta(t)+k_3\delta'(t)\\ \times 1 & \dfrac{dh}{dt}=(-3k_1e^{-3t})u(t)+(k_1)\delta(t)+k_2\delta'(t)+k_3\delta''(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}3k_2+k_1=-1\\ 3k_3+k_2=-3\\ k_3=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_3=5\\ k_2=-18\\ k_1=53\end{cases}\Rightarrow h(t)=(53e^{-3t})u(t)-18\delta(t)+5\delta'(t)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=\frac{dw}{dt}+3w(t)$$

$$\frac{d^3h}{dt^3}+4\frac{d^2h}{dt^2}+5\frac{dh}{dt}+2h=3\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\begin{cases}\times 2 & h(t)=(k_1e^{-t}+k_2te^{-t}+k_3e^{-2t})u(t)\\ \times 5 & \dfrac{dh}{dt}=(-k_1e^{-t}+k_2e^{-t}-k_2te^{-t}-2k_3e^{-2t})u(t)+(k_1+k_3)\delta(t)\\ \times 4 & \dfrac{d^2h}{dt^2}=(k_1e^{-t}-k_2e^{-t}-k_2e^{-t}+k_2te^{-t}+4k_3e^{-2t})u(t)+(-k_1+k_2-2k_3)\delta(t)+(k_1+k_3)\delta'(t)\\ \times 1 & \dfrac{d^3h}{dt^3}=(\cdots\cdots\cdots)u(t)+(k_1-2k_2+4k_3)\delta(t)+(-k_1+k_2-2k_3)\delta'(t)+(k_1+k_3)\delta''(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}5(k_1+k_3)+4(-k_1+k_2-2k_3)+(k_1-2k_2+4k_3)=3\\ 4(k_1+k_3)+(-k_1+k_2-2k_3)=1\\ k_1+k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_3=1\\ k_2=2\\ k_1=-1\end{cases}\Rightarrow h(t)=(-e^{-t}+2te^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

۷- در مـدار بـالا از شـکل مقابـل پاسـخ پلـه برابـر اسـت بـا:

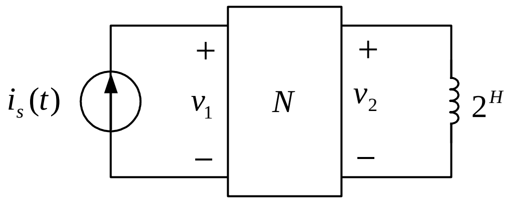
$$v_1(t) = (ae^{-\frac{t}{2}} + \frac{2}{3})u(t)$$

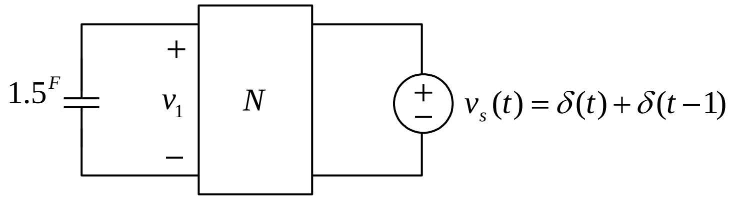
اگر شبکه N از مقاومت‌های خطی پسیو تشـکیل شـده باشد،

برای پاسخ حالت صفر مدار پایین از شکل مقابل داریم:

$$v_1(2) = 2(e^{-2} + e^{-1})V$$

پاسـخ حالـت صـفر مـدار پـایین از شـکل مقابـل بـه ورودی $v_s(t) = \sin t\, u(t)$ را با استفاده از انتگرال کانولوشـن بدسـت آورید.





حل: در مدار بالا در حالت دائمی سلف اتصال کوتاه است و لذا مقاومت دیده شده از دو سر منبع جریان (وقتی سمت راست اتصال کوتاه است] برابر است با ولتاژ $v_1(t)$ در حالت دائمی تقسیم بر منبع جریان یک آمپری که می شود: $\frac{v_1(\infty)}{i_s(\infty)} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}\Omega$

در مدار پایین پاسخ پله ولتاژ دو سر خازن به روش نظری قابل محاسبه است:

$$v_s(t) = u(t) \Rightarrow s(t) = v_1(t) = \left(\left(v_1(0^+) - v_1(\infty)\right)e^{-\frac{t}{R_{eq}C}} + v_1(\infty)\right)u(t)$$

$$v_1(0^+) = v_1(0^-) = 0, \quad R_{eq} = \frac{v_1}{i_1}|_{v_s=0} = \frac{2}{3}\Omega \Rightarrow \tau = R_{eq}C = \frac{2}{3}.\frac{3}{2} = 1s \Rightarrow v_s(t) = u(t) \Rightarrow s(t) = v_1(t) = v_1(\infty)\left(1 - e^{-t}\right)u(t)$$

حال پاسخ ضربه را حساب می کنیم و سپس از پاسخ به ورودی مشخص شده در شکل پایین ضریب مجهـول در پاسـخ ضـربه را تعیـین مـی کنین:

$$h(t) = \frac{ds}{dt} = v_1(\infty)e^{-t}u(t)$$

$$v_s(t) = \delta(t) + \delta(t-1) \Rightarrow v_1(t) = h(t) + h(t-1) = v_1(\infty)e^{-t}u(t) + v_1(\infty)e^{-(t-1)}u(t-1)$$

$$v_1(2) = 2(e^{-2} + e^{-1})V \Rightarrow 2(e^{-2} + e^{-1}) = v_1(\infty)e^{-2}u(2) + v_1(\infty)e^{-(2-1)}u(2-1) = v_1(\infty)(e^{-2} + e^{-1}) \Rightarrow v_1(\infty) = 2V$$

$$\Rightarrow h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

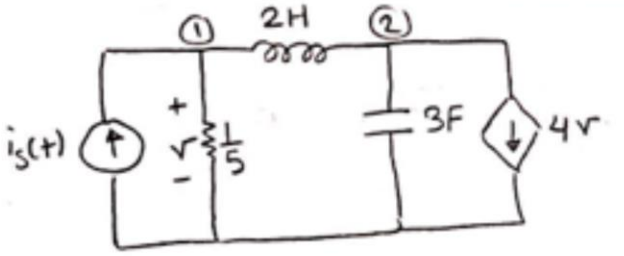
نهایتا پاسخ به ورودی داده شده را با کانولوشن بدست می آوریم:

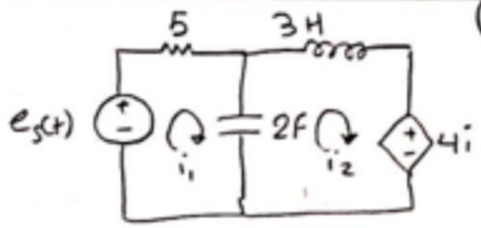
$$v_s(t) = \sin t\, u(t) \Rightarrow v_1(t) = h(t) * v_s(t) = \left(\int_0^t \sin\lambda . 2e^{-(t-\lambda)}d\lambda\right)u(t) = \left(2e^{-t}\int_0^t \sin\lambda . e^{\lambda}d\lambda\right)u(t)$$

$$= \left(2e^{-t}\left[e^{\lambda}(\sin\lambda - \cos\lambda)\right]_0^t\right)u(t) = \left((\sin t - \cos t) + e^{-t}\cos t\right)u(t)$$

فصل ۶ کتاب مسئله ۸

سوال 8





روش گره: گره 1: $-i_s(t) + \frac{v_1}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\int v_1 - v_2 = 0$ (1)

گره 2: $4v_1 + \frac{3dv_2}{dt} + \frac{1}{2}\int v_2 - v_1 = 0$ (2)

روش مش: مش 1: $e_s(t) - 5i_1 - \frac{1}{2}\int i_1 - i_2 = 0$ (3)

مش 2: $\frac{1}{2}\int i_1 - i_2 - 3\frac{di_2}{dt} - 4i_1 = 0$ (4)

$R \rightarrow G \qquad C \rightarrow L \qquad L \rightarrow C \qquad v \rightarrow i$

با تغییر نقش (1) $-e_s(t) + Ri_1 + \frac{1}{C}\int i_1 - i_2 = 0$

" " " (2) $4i_1 + L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int i_2 - i_1 = 0$

همان معادله‌های مش نوشته شده در بالا است ⇐ دو مدار دوگان هستند

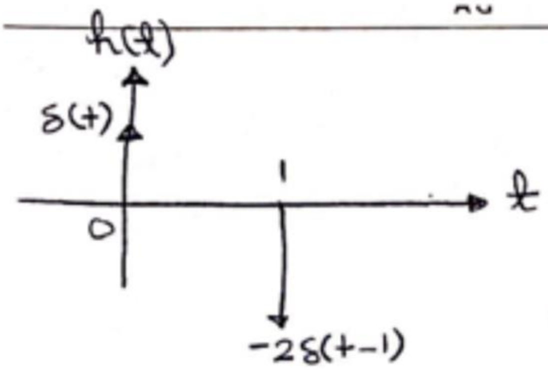
به طور مشابه از مدار دوم به مدار اول:

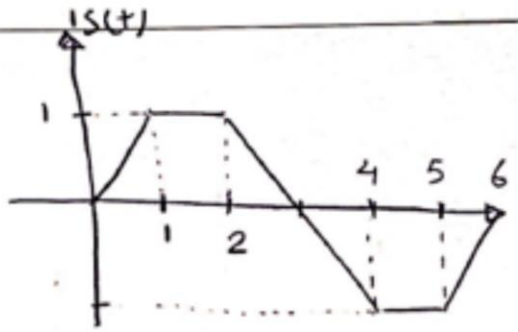
تغییر نقش (3) $i_s(t) - R_G v_1 + \frac{1}{L}\int v_1 - v_2 = 0$

تغییر نقش (4) $4v_1 + C\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}\int v_2 - v_1 = 0$

همان معادله دیفرانسیل نوشته شده در بالا هستند

-12

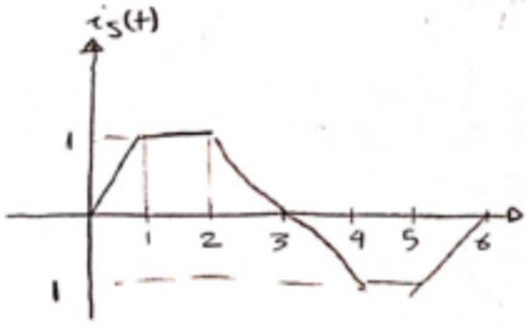


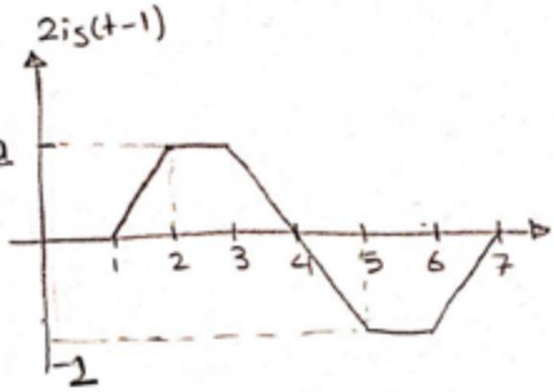


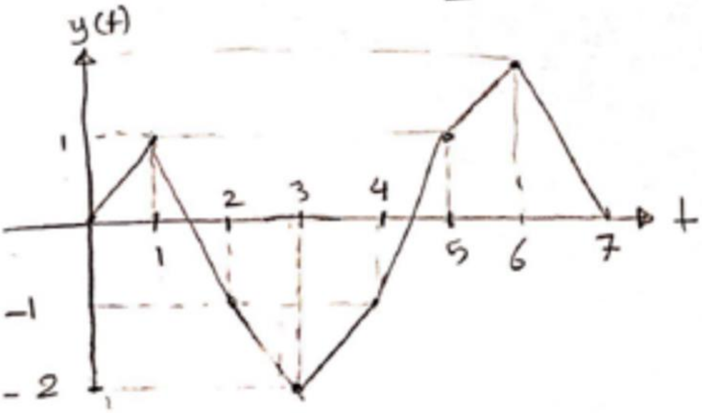
$h(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1)$ $\qquad$ $y(t) = i_s(t) * h(t)$

می‌دانیم $\delta(t-t_0) * s(t) = s(t-t_0)$

$\Rightarrow y(t) = i_s(t) * \big(\delta(t) - 2\delta(t-1)\big) = i_s(t) - 2 i_s(t-1)$







الف:

$$R_0\big((e^{-t}-\sin t)u(t)\big)=\delta(t)\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} R_0\left(\frac{d}{dt}((e^{-t}-\sin t)u(t))\right)=\frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$\Rightarrow R_0\big((-e^{-t}-\cos t)u(t)+\delta(t)\big)=\delta'(t)\Rightarrow R_0\big((-e^{-t}-\cos t)u(t)\big)=\delta'(t)-h(t)$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} R_0\big((e^{-t}+\sin t)u(t)-2\delta(t)\big)=\delta''(t)-h'(t)$$

$$\Rightarrow R_0\big((e^{-t}+\sin t)u(t)\big)=\delta''(t)-h'(t)+2h(t)$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} R_0\big((-e^{-t}+\cos t)u(t)+\delta(t)\big)=\delta^{(3)}(t)-h''(t)+2h'(t)$$

$$\Rightarrow R_0\big((-e^{-t}+\cos t)u(t)\big)=\delta^{(3)}(t)-h''(t)+2h'(t)-h(t)$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} R_0\big((e^{-t}-\sin t)u(t)\big)=\delta^{(4)}(t)-h^{(3)}(t)+2h''(t)-h'(t)$$

$$\Rightarrow h^{(3)}(t)-2h''(t)+h'(t)=\delta^{(4)}(t)-\delta(t)$$

کافیست معادله دیفرانسیل به دست آمده را حل کنیم:

معادله مشخصه:

$$s^3-2s^2+s=0\Rightarrow s_1=1, s_2=1, s_3=0$$

پس پاسخ همگن به صورت زیر است: (دقت شود که ***s=1*** ریشه مضاعف معادله است)

$$h(t)=(\mathrm{a}+be^{t}+\mathrm{c}{*}te^{t})u(t)$$

با توجه به این که بزرگترین درجه مشتق ضربه از مرتبه معادله دیفرانسیل بیشتر است با در نظر گرفتن پاسخ خصوصی میدانیم پاسخ معادله به صورت زیر است:

$$h(t)=(\mathrm{a}+be^{t}+\mathrm{c}te^{t})u(t)+d\delta(t)+\mathrm{e}\delta'(t)$$

روش محاسبه ضرایب:باید پس از جایگذاری در معادله ضرایب ضربه و مشتقات آن در دوطرف برابر شود.

معادله مربوط به ضریب $\delta^{(4)}(t)$:

$$\mathrm{e}\delta^{(4)}(t) = \delta^{(4)}(t) \rightarrow \mathrm{e} = 1$$

معادله مربوط به ضریب $\delta^{(3)}(t)$:

$$(\mathrm{d}\text{-}2\mathrm{e})\delta^{(3)}(t) = 0 \rightarrow \mathrm{d} = 2$$

معادله مربوط به ضریب $\delta^{(2)}(t)$:

$$((\mathrm{b} + \mathrm{a})\text{-}2\mathrm{d} + \mathrm{e})\delta^{(2)}(t) = 0 \rightarrow \mathrm{a} + \mathrm{b} = 3$$

معادله مربوط به ضریب $\delta^{'}(t)$:

$$((\mathrm{c} + \mathrm{b})\text{-}2(\mathrm{b} + \mathrm{a}) + \mathrm{d})\delta^{(2)}(t) = 0 \rightarrow \text{-}2\mathrm{a}\text{-}\mathrm{b} + \mathrm{c} = \text{-}2$$

ضریب معادله مربوط به$\delta \quad (t)$:

$$\big((2\mathrm{c} + b) - 2(\mathrm{c} + b) + (\mathrm{b} + \mathrm{a})\big)\delta \quad (t) = -1 \rightarrow \mathrm{a} = -1$$

حال از معادلات مربوط به ضرایب $\delta^{(2)}(t)$و$\delta^{'}(t)$ ثابت های cوb محاسبه می شود:

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{b} = 4 \\ \mathrm{c} = 0 \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه شد:

$$a = \text{-}1, b = 4, c = 0, d = 2, e = 1$$

پاسخ ضربه صورت زیر به دست آمد:

$$h(t) = (4e^{t}\text{-}1)u(t) + 2\delta(t) + \delta'(t)$$

ب:

اگر معادله مشخصه معادله دیفرانسیل *h(t)* را حل کنیم *s=0,1* فرکانس های طبیعی مدار است بنابراین پاسخ ورودی صفر را میتوانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathrm{y}(t) = (\mathrm{a} + be^{t} + \mathrm{c}^{*}te^{t})u(t)$$

برای شرایط اولیه *y(0)=k1* و *y'(0)=k2* و *y"(0)=k3* داریم:

$$\mathrm{a} + b = k_1$$

$$b + \mathrm{c} = k_2$$

$$b + 2\mathrm{c} = k_3$$

$$\mathrm{a} = k_1 + k_3 - 2k_2, b = 2k_2 - k_3, \mathrm{c} = k_3 - k_2$$

اگر *c* یا *b* غیر صفر باشد *y(t)* به بینهایت میل میکند.پس داریم:

$$2k_2 \neq k_3 \; || k_3 \neq k_2$$

٤)

$$\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y=\frac{d^2\omega}{dt^2}+3\frac{d\omega}{dt}+2\omega \qquad (۱)$$

ابتدا معادله مشخصه را به دست می‌آوریم:

$$s^3+4s^2+6s+4=0\Rightarrow(s+2)((s+1)^2+1)=0$$
$$\Rightarrow(s+2)(s+1+j)(s+1-j)=0$$

بنابراین با توجه به این که مرتبه مشتق ورودی کمتر از ورودی است بنابراین در خروجی ضربه نخواهیم داشت و پاسخ به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t)=(Ae^{-2t}+e^{-t}(B\cos t+C\sin t))u(t) \qquad (۲)$$

حال با توجه به معادله و با فرض اینکه پاسخ حالت صفر نداریم، ضرایب A, B, C را به دست می‌آوریم(توجه شود $\delta(t)$ تنها در صفر مقدار دارد بنابراین تنها در $t=0$ به ضریب آن نگاه می‌کنیم.) :

$$\frac{dy}{dt}=[-2Ae^{-2t}+(-B+C)e^{-t}\cos t+(-B-C)e^{-t}\sin t]u(t)+(A+B)\delta(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=[4Ae^{-2t}-2Ce^{-t}\cos t+2Be^{-t}\sin t]u(t)+(-2A-B+C)\delta(t)+(A+B)\delta'(t)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}=[-8Ae^{-2t}+(2C+2B)e^{-t}\cos t+(2C-2B)e^{-t}\sin t]u(t)+(4A-2C)\delta(t)$$
$$+(-2A-B+C)\delta'(t)+(A+B)\delta''(t)$$

بنابراین با توجه به این سه عبارت، و معادله ۱ ضرایب را برای هر مرتبه دلتا برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}A+B=1\\(-2A-B+C)+4(A+B)=3\\(4A-2C)+4(-2A-B+C)+6(A+B)=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\-2A+-B+C=-1\\4A+-2C=0\end{cases}$$

با دو برابر کردن عبارت وسط و جمع کردن با رابطه آخر خواهیم داشت:

$$B=1$$

بنابراین با توجه به معادله اول خواهیم داشت:

$$A=0$$

و سپس با معادله آخر خواهیم داشت:

$$C=0$$

پس جواب آخر به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t)=(e^{-t}\cos t)u(t) \qquad (۳)$$

٦)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{d^3\omega}{dt^3}+\omega \qquad (٤)$$

همانند قسمت ٤ ابتدا معادله مشخصه را به دست می‌آوریم:

$$s^2+3s+2=0 \Rightarrow (s+2)(s+1)=0$$

با توجه به این که مرتبه ω دو مرتبه بزرگتر از y است پاسخ به فرم زیر می‌باشد:

$$y(t)=(Ae^{-t}+Be^{-2t})u(t)+\alpha\delta(t)+\beta\delta'(t) \qquad (٥)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y'(t)=(-Ae^{-t}-2Be^{-2t})u(t)+(A+B)\delta(t)+\alpha\delta'(t)+\beta\delta''(t)$$
$$y''(t)=(Ae^{-t}+4Be^{-2t})u(t)+(-A-2B)\delta(t)+(A+B)\delta'(t)+\alpha\delta''(t)+\beta\delta'''(t)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب مشتق‌های تابع ضربه در معادله ٤ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\beta=2\\ \alpha+3\beta=0\\ (A+B)+3\alpha+2\beta=0\\ (-A-2B)+3(A+B)+\alpha=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-6\\ A+B=14\\ 2A+B=7\end{cases} \Rightarrow A=-7, B=21$$

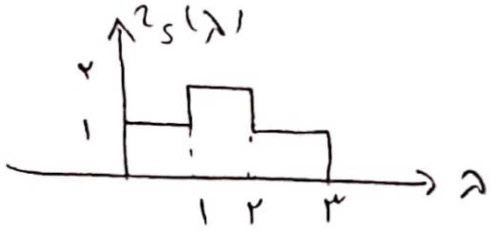
پس پاسخ نهایی به صورت زیر می‌باشد:

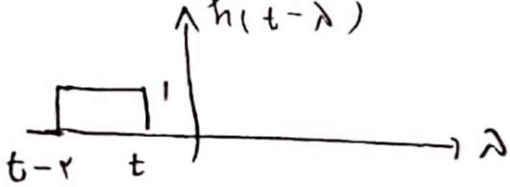
$$y(t)=(-7e^{-t}+21e^{-2t})u(t)-6\delta(t)+2\delta'(t) \qquad (٦)$$

مسئله ۲۷

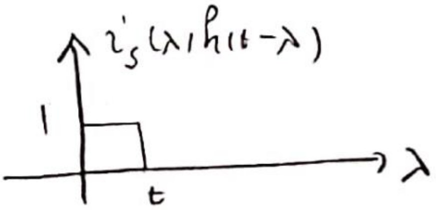
$$y(t) = i_s(t) * h(t) = \int i_s(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

روش اول - کانولوشن دو سیگنال با هم

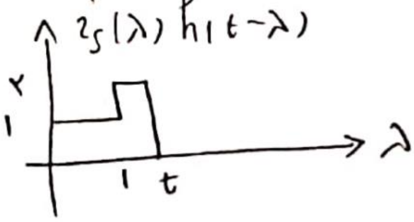




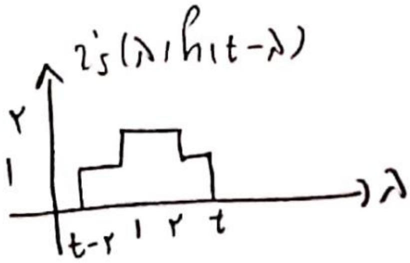
$t < ۰ \longrightarrow y(t) = ۰$



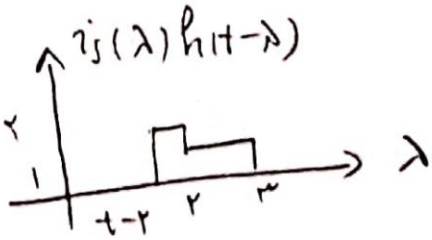
$\begin{cases} t > ۰ \\ t < ۱ \end{cases} \rightarrow y(t) = t \qquad ۰ < t < ۱$



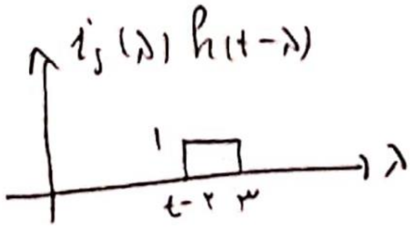
$\begin{cases} t > ۱ \\ t-۲ < ۰ \end{cases} \rightarrow y(t) = ۱ + ۲(t-۱) \qquad ۱ < t < ۲$



$\begin{cases} t-۲ > ۰ \\ t < ۳ \end{cases} \rightarrow y(t) = \big(۱-(t-۲)\big) + ۲ + (t-۲) \qquad ۲ < t < ۳$



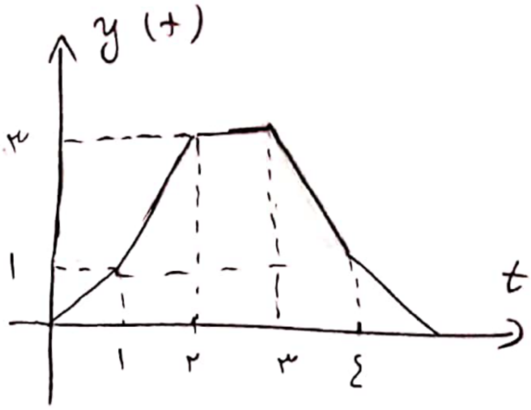
$\begin{cases} t-۲ > ۱ \\ t-۲ < ۲ \end{cases} \longrightarrow y(t) = ۲\big(۲-(t-۲)\big) + ۱ \qquad ۳ < t < ۴$



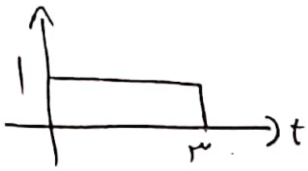
$\begin{cases} t-۲ > ۲ \\ t-۲ < ۳ \end{cases} \longrightarrow y(t) = ۳-(t-۲) \qquad ۴ < t < ۵$

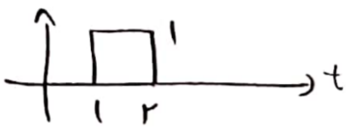
$t-۲ > ۳ \longrightarrow y(t) = ۰ \qquad t > ۵$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ 2t-1 & 1 \leq t < 2 \\ 3 & 2 \leq t < 3 \\ -2t+9 & 3 \leq t < 4 \\ -t+5 & 4 \leq t < 5 \\ 0 & t \geq 5 \end{cases}$$

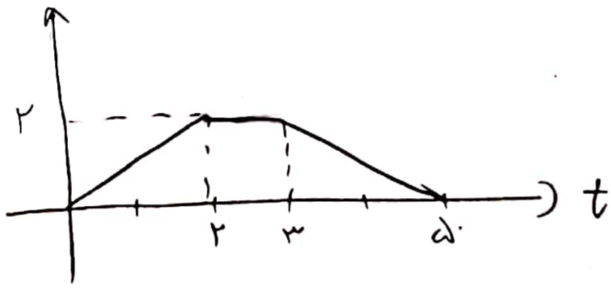


روش دوم -

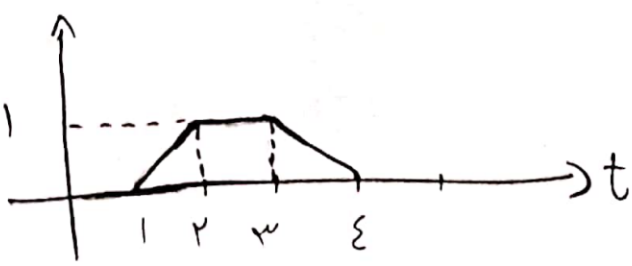
$y(t) = h(t) *$ 

$+ \; h(t) *$ 

کانولوشن دو پالس، ذوزنقه می‌شود و کافی است دو ذوزنقه را باهم جمع کنیم.

$y(t) =$ 

$+$



فصل ۶ کتاب مسئله ۳۳ (الف)

مسئله ۳۳ - الف) ابتدا پاسخ ضربه را پیدا می‌کنیم. $x(t)=u(t-1)-u(t-3)$

$$\longrightarrow y(t)=\frac{1}{2}r(t-1)-r(t-3)+\frac{1}{2}r(t-5)$$

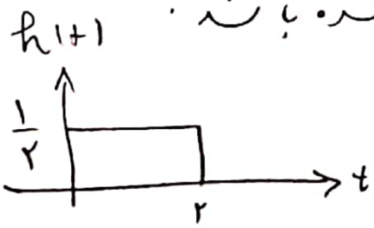
از طرفی باید $y(t)=s(t-1)-s(t-3)$ باشد که $s(t)$ پاسخ پله است.

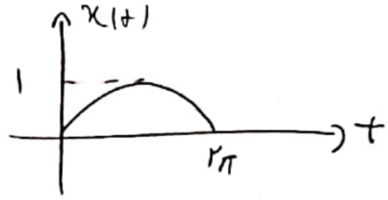
$$y(t)=\frac{1}{2}r(t-1)-\frac{1}{2}r(t-3)-\frac{1}{2}r(t-3)+\frac{1}{2}r(t-5)$$

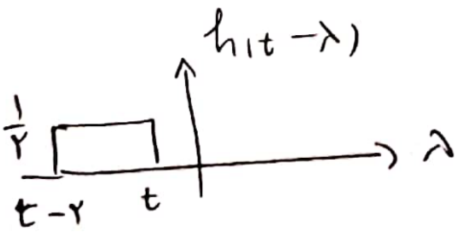
پس $s(t)=\frac{1}{2}\left(r(t)-r(t-2)\right)$

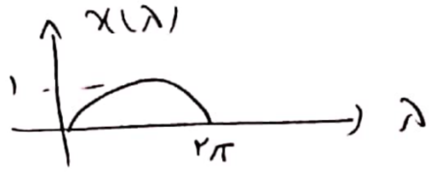
$$\longrightarrow h(t)=\frac{1}{2}\left(u(t)-u(t-2)\right)$$

* روش ترسیمی هم می‌توان حدس زد که ورودی پالس باید با یک پالس با همان عرض کانولوشن شده باشد تا پاسخ آن مثلث شده باشد.

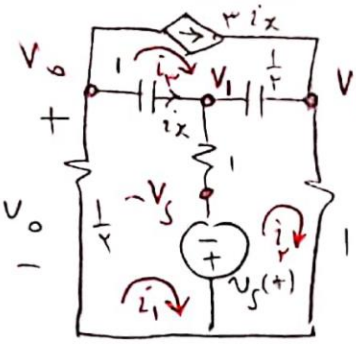








$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t \frac{1}{2}\sin\lambda\, d\lambda & 0\leq t<2 \\ \int_{t-2}^{t} \frac{1}{2}\sin\lambda\, d\lambda & 2\leq t<2\pi \\ \int_{t-2}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin\lambda\, d\lambda & 2\pi\leq t<2\pi+2 \\ 0 & t\geq 2\pi+2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1-\cos t}{2} & 0\leq t<2 \\ \frac{\cos(t-2)-\cos t}{2} & 2\leq t<2\pi \\ \frac{\cos(t-2)-1}{2} & 2\pi\leq t<2\pi+2 \\ 0 & t\geq 2\pi+2 \end{cases}$$



مسئله ۴۴

الف) روش گره

$$i_x = D(v_0 - v_1)$$

$$KCL: \frac{v_0}{\frac{1}{2}} + 3i_x + D(v_0 - v_1) = 0$$

$$KCL: D(v_1 - v_0) + \frac{v_1 - v_s(t)}{1} + \frac{1}{2}D(v_1 - v_2) = 0$$

$$KCL: \frac{v_2}{1} + \frac{1}{2}D(v_2 - v_1) - 3i_x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2+4D & -4 & 0 \\ -D & 1+\frac{3}{2}D & -\frac{1}{2}D \\ -3D & \frac{5}{2}D & 1+\frac{D}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_s(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{با روش کرامر}} (4D^2 + 4D + 1)\, v_0(t) = -(D^2 + 2D)\, v_s(t)$$

ب) روش مش

$$\begin{cases} \frac{1}{2}i_1 + v_{c_1}(0) + \frac{D^{-1}}{1}(i_1 - i_3) + (i_1 - i_2) - v_s(t) = 0 \\ +v_s(t) + (i_2 - i_1) + v_{c_2}(0) + \frac{D^{-1}}{\frac{1}{2}}(i_2 - i_3) + i_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3 = 3i_x \\ i_x = i_1 - i_3 \end{cases} \longrightarrow i_3 = 3(i_1 - i_3) \longrightarrow \underline{i_3 = \frac{3}{4}i_1}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \frac{D}{2}i_1 + (i_1 - \frac{3}{4}i_1) + D(i_1 - i_2) - Dv_s = 0 \\ Dv_s + D(i_2 - i_1) + 2(i_2 - \frac{3}{4}i_1) + Di_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{2}D & -D \\ -\frac{3}{2} - D & 2D+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dv_s \\ -Dv_s \end{pmatrix}$$

$$i_1(t)=\frac{\begin{vmatrix} DS & -D \\ -DS & 2D+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{2}D & -D \\ -\frac{3}{2}-D & 2D+2 \end{vmatrix}} \longrightarrow (4D^2+4D+1)\,\frac{i_1(t)}{2}=(D^2+2D)\,v_s$$

$$v_o(t)=-\frac{1}{2}\,i_1(t)$$

$$\longrightarrow \quad \underline{(4D^2+4D+1)\,v_o(t)=-(D^2+2D)\,v_s}$$

ب) پاسخ ضربه

$$4\frac{d^2h}{dt^2}+4\frac{dh}{dt}+h(t)=-\delta''(t)-2\delta'(t)$$

(1) $$h(t)=\left(k_1e^{-\frac{t}{2}}+k_2\,t\,e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)+k_3\,\delta(t)$$

(4) $$\frac{dh}{dt}=\left(-\frac{k_1}{2}e^{-\frac{t}{2}}+k_2e^{-\frac{t}{2}}-\frac{k_2}{2}\,t\,e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)+k_1\,\delta(t)+k_3\,\delta'(t)$$

(4) $$\frac{d^2h}{dt^2}=\left(\qquad\qquad\qquad\right)u(t)+\left(k_2-\frac{k_1}{2}\right)\delta(t)+k_1\,\delta'(t)+k_3\,\delta''(t)$$

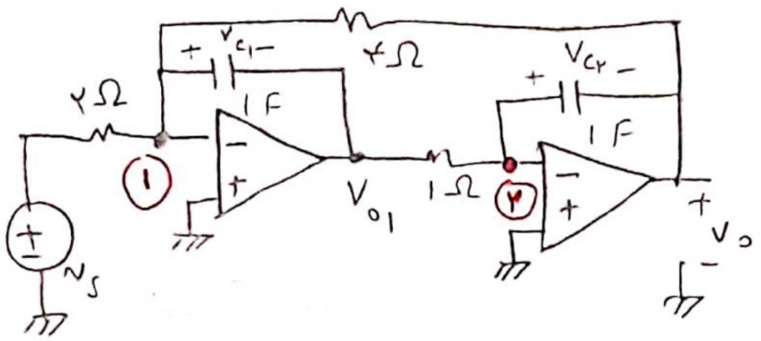
$$4k_3=-1 \longrightarrow k_3=-\frac{1}{4}$$

$$4k_1+4k_3=-2 \longrightarrow k_1=-\frac{1}{4}$$

$$4\left(k_2-\frac{k_1}{2}\right)+4k_1+k_3=0 \longrightarrow k_2=\frac{3}{16}$$

$$\underline{h(t)=\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{3}{16}\,t\,e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)-\frac{1}{4}\,\delta(t)}$$

مسئله ۷۲ از فصل پنجم کتاب را حل کنید و پاسخ حالت صفر مدار به ورودی داده شده را یک بار با حل معادله دیفرانسیل و یک بار با کانولوشن بدست آورید.



مسئله ۷۲ فصل ۵

$$KCL\ (1)\quad \frac{0 - v_s}{2} + \frac{0 - v_o}{4} + \frac{dv_{c_1}}{dt} = 0 \qquad v_{c_1} = -v_{o1}$$

$$KCL\ (2)\quad \frac{0 - v_{o1}}{1} + \frac{dv_{c_2}}{dt} = 0 \qquad v_{c_2} = -v_o$$

$$\longrightarrow \frac{dv_{o1}}{dt} = -\frac{d^2 v_o}{dt^2}$$

$$\longrightarrow -\frac{v_s}{2} - \frac{v_o}{4} + \frac{d^2 v_o}{dt^2} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{d^2 v_o}{dt^2} - \frac{v_o}{4} = \frac{v_s}{2}}$$

* محاسبه پاسخ به ورودی سینوسی با حل معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v_o}{dt^2} - \dfrac{v_o}{4} = 2\cos 2t & t > 0 \\ v_{c_1}(0^-) = 0,\ v_{c_2}(0^-) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_{c_1}(0^+) = v_{c_1}(0^-) = 0 \\ v_{c_2}(0^+) = v_{c_2}(0^-) = 0 \end{cases}$$

$$v_o(0^+) = -v_{c_2}(0^+) = 0$$

$$\frac{dv_o}{dt}(0^+) = -\frac{dv_{c_2}}{dt}(0^+) = -v_{o1}(0^+) = v_{c_1}(0^+) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 v_o}{dt^2} - \dfrac{v_o}{4} = 2\cos 2t & t > 0 \\ v_o(0^+) = 0, \quad v'_o(0^+) = 0 \end{cases}$$

$$v_0(t) = v_h(t) + v_p(t) = k_1 e^{-\frac{t}{2}} + k_2 e^{+\frac{t}{2}} + A\cos 2t + B\sin 2t \qquad t>0$$

برای محاسبه ضرایب پاسخ ویژه، آن را در معادله قرار می دهیم.

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) - \frac{A\cos 2t + B\sin 2t}{4} = 2\cos 2t$$

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t - \frac{A}{4}\cos 2t - \frac{B}{4}\sin 2t = 2\cos 2t$$

$$\begin{cases} -4A - \frac{A}{4} = 2 \longrightarrow A = -\frac{8}{17} \\ -4B - \frac{B}{4} = 0 \longrightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$v_0(t) = k_1 e^{-\frac{t}{2}} + k_2 e^{\frac{t}{2}} - \frac{8}{17}\cos 2t \qquad t>0$$

شرایط اولیه را اعمال می کنیم:

$$\begin{matrix} 0 = k_1 + k_2 - \frac{8}{17} \\ 0 = -\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} + 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} k_1 = \frac{4}{17} \\ k_2 = \frac{4}{17} \end{matrix}$$

$$\underline{v_0(t) = \frac{4}{17} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{4}{17} e^{\frac{t}{2}} - \frac{8}{17}\cos 2t \qquad t>0}$$

* محاسبه پاسخ با کانولوشن - ابتدا پاسخ ضربه را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{d^2h}{dt^2} - \frac{h}{4} = \frac{\delta(t)}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \times \quad h(t) = \left(k_1 e^{-\frac{t}{2}} + k_2 e^{\frac{t}{2}}\right) u(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = \left(-\frac{k_1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{k_2}{2} e^{\frac{t}{2}}\right) u(t) + (k_1 + k_2)\,\delta(t)$$

$$(1) \times \quad \frac{d^2h}{dt^2} = \left(\frac{k_1}{4} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{k_2}{4} e^{\frac{t}{2}}\right) u(t) + \left(-\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right)\delta(t) + (k_1 + k_2)\,\delta'(t)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ \dfrac{-k_1 + k_2}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} k_1 = -\frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{matrix} \longrightarrow h(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}\right) u(t)$$

$$v_o(t) = h(t) * v_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t h(\lambda)\, v_s(t-\lambda)\, d\lambda & t > 0 \end{cases}$$

برای $t > 0$ داریم:

$$v_o(t) = \int_0^t \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{\lambda}{2}}\right) 4\cos 2(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$= -2\int_0^t e^{-\frac{\lambda}{2}} \cos 2(t-\lambda)\, d\lambda + 2\int_0^t e^{\frac{\lambda}{2}} \cos 2(t-\lambda)\, d\lambda$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء هر دو انتگرال قابل محاسبه هستند و نهایتاً داریم:

$$v_o(t) = \frac{4}{17} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{4}{17} e^{\frac{t}{2}} - \frac{8}{17}\cos 2t \qquad t > 0$$

با $op-Amp$ مداری طرح کنید که معادله دیفرانسیل اول مسئله ۲۴ فصل ۶ کتاب را حل می‌کند.

مسئله ۲۴ - قسمت اول

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 2\frac{dw}{dt} + w$$

$$\boxed{y'' = w + 2w' - 3y - 4y'}$$

طرح مدار برای حل معادله دیفرانسیل