درس جداسازی کور منابع و پردازش تنک سیگنالها

جلسه ششم

ادامه مبحث ممانها و کومولانها

مدرس: مسعود بابائی‌زاده

دانشگاه صنعتی شریف

ارتباط بین ممان‌ها و کومولان‌ها :

فرمول کلی :

$$\mathrm{Cum}\{X_1,\dots,X_n\}=\sum_{S_1\cup S_2\cdots\cup S_p=\{1,2,\dots,n\}}(-1)^{p-1}(p-1)!\,E\{\prod_{i\in S_1}X_i\}\,E\{\prod_{i\in S_2}X_i\}\cdots E\{\prod_{i\in S_p}X_i\}$$

که در آن $\sum$ روی همه افرازها (پارتیشن‌ها) $(S_1,\dots,S_p)$ از اعداد صحیح $(1,2,\dots,n)$ برای همه افرازهای $p=1,2,\dots,n$ تایی صورت می‌گیرد.

$$\mathrm{Cum}\{X_1,\dots,X_n\} = \sum_{S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_p = \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{p-1}(p-1)!\, E\Big\{\prod_{i\in S_1} X_i\Big\} E\Big\{\prod_{i\in S_2} X_i\Big\} \cdots E\Big\{\prod_{i\in S_p} X_i\Big\}$$

مثال ۱: برای سه متغیر تصادفی $\{X_1, X_2, X_3\}$ مجموعه $\{1,2,3\}$ را می‌توان به حالت‌های زیر افراز کرد:

تعداد افرازها (p)	S_1	S_2	S_3	ضریب $(-1)^{p-1}(p-1)!$
$p=1$	$\{1,2,3\}$	—	—	$+1$
$p=2$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	—	-1
	$\{2\}$	$\{1,3\}$	—	
	$\{3\}$	$\{1,2\}$	—	
$p=3$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$+2$

$$\Rightarrow \mathrm{Cum}\{X_1,X_2,X_3\} = E\{X_1X_2X_3\} - E\{X_1\}E\{X_2X_3\} - E\{X_2\}E\{X_1X_3\}$$
$$- E\{X_3\}E\{X_1X_2\} + 2E\{X_1\}E\{X_2\}E\{X_3\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{cum}\{x_1, x_2, x_3\} = E\{x_1 x_2 x_3\} - E\{x_1\}E\{x_2 x_3\} - E\{x_2\}E\{x_1 x_3\}$$
$$- E\{x_3\}E\{x_1 x_2\} + 2E\{x_1\}E\{x_2\}E\{x_3\}$$

توجه: درحالت $\forall i$ $E\{x_i\} = 0$ داریم: $\mathrm{cum}\{x_1, x_2, x_3\} = E\{x_1 x_2 x_3\}$

مثال ۲: حالت ۴ متغیر تصادفی

ضریب $(-1)^{p-1}(p-1)!$	p (تعداد افراز)	S_1	S_2	S_3	S_4
$+1$	$p=1$	1,2,3,4			
-1	$p=2$	1,2	3,4		
		1,3	2,4		
		1,4	2,3		
		1	2,3,4		
		2	1,3,4		
		3	1,2,4		
		4	1,2,3		
$+2$	$p=3$	1,2	3	4	
		1,3	2	4	
		1,4	2	3	
		2,4	1	3	
		3,4	1	2	
		2,3	1	4	
-6	$p=4$	1	2	3	4

⇐ فرمول کلی بدست می‌آید (فرمول 2.7 صفحه ۱۲ کتاب Nikias).

⇐ حالت خاص $\forall i \quad E\{x_i\}=0$:

$$\boxed{\begin{aligned} Cum\{X_1X_2X_3X_4\} = {} & E\{X_1X_2X_3X_4\} \\ & - E\{X_1X_2\}E\{X_3X_4\} \\ & - E\{X_1X_3\}E\{X_2X_4\} \\ & - E\{X_1X_4\}E\{X_2X_3\} \end{aligned}}$$

$$\mathrm{Cum}\{X_1 X_2 X_3 X_4\} = E\{X_1 X_2 X_3 X_4\} - E\{X_1 X_2\}E\{X_3 X_4\} - E\{X_1 X_3\}E\{X_2 X_4\} - E\{X_1 X_4\}E\{X_2 X_3\}$$

<u>توجه ۱:</u> با استفاده رابطه بالا برای دو متغیر تصادفی X و Y با میانگین صفر رابطه کومولان‌های متقابل درجه ۴ به عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{Cum}_{31}\{X,Y\} = \mathrm{Cum}\{X,X,X,Y\} = E\{X^3 Y\} - E\{X^2\}E\{XY\} - E\{X^2\}E\{XY\} - E\{XY\}E\{X^2\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Cum}_{31}\{X,Y\} = E\{X^3 Y\} - 3E\{X^2\}E\{XY\}}$$

با فرض $E\{X\} = E\{Y\} = 0$

$$\mathrm{Cum}_{22}\{X,Y\} = E\{X^2 Y^2\} - E\{X^2\}E\{Y^2\} - 2\left(E\{XY\}\right)^2$$

بجز درجه ۱

توجه ۲: خواهیم دید که اثر میانگین اثری در کومولان ندارد، پس از فرمول حالت میانگین صفر می‌توان در حالت کلی با تغییر زیر استفاده کرد:

$$\text{cum}\{X_1, X_2, X_3\} = E\{X_1 X_2 X_3\}$$ ← حالت میانگین صفر باشد

$$\text{cum}\{X_1, X_2, X_3\} = E\{(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})(X_3 - m_{X_3})\}$$ ← پس حالت کلی

توجه ۳: رابطه کلی بالا نشان می‌دهد که تعیین کومولان مرتبه ۲ نیاز به دانستن تمام ممان‌های مرتبه کوچکتر یا مساوی ۲ دارد.

خواص ممان و کومولانها:

مقدار ثابت

خاصیت ۵: اگر به DC اضافه کنیم ($Y=X+c$) آنگاه فقط کومولان مرتبه اول (که همان میانگین است) با c جمع می‌شود و بقیه تغییر نمی‌کنند.

اثبات:

$$Y=X+c \Rightarrow \Phi_Y(s) \triangleq E\{e^{sY}\} = E\{e^{sX}e^{sc}\} = e^{sc}\,\Phi_X(s)$$

$$\Rightarrow \Psi_Y(s) = \Psi_X(s) + sc \rightarrow$$

بنابراین در بسط تیلور $\Psi_Y(s)$ فقط ضریب درجه ۱ آن با c جمع شده و بقیه ضرایب تغییری نکرده.

خاصیت ۱: برای ثابت‌های a_1 تا a_n داریم:

$$\mathrm{Mom}\{a_1X_1, a_2X_2, \dots, a_nX_n\} = a_1a_2\cdots a_n \,\mathrm{Mom}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$\mathrm{Cum}\{\ \text{——〃——}\ \} = a_1a_2\cdots a_n \,\mathrm{Cum}\{\ \text{——〃——}\ \}$$

اثبات: برای ممان خیلی ساده از تعریف $\mathrm{Mom}\{X_1, \dots, X_n\} \triangleq E\{X_1 \cdots X_n\}$ اثبات می‌شود.
برای کومولان 〃 〃 〃 رابطه کومولان برحسب ممان 〃 〃 .

خاصیت ۲: ممان‌ها و کومولان‌ها توابعی متقارن از آرگومان‌هایشان هستند. مثلاً

$$\mathrm{Mom}\{X_1, X_2, X_3\} = \mathrm{Mom}\{X_2, X_1, X_3\}$$

خاصیت ۳: اگر بتوان متغیرهای تصادفی $\{X_1,\dots,X_n\}$ را به دو (یا چند) گروه تقسیم کرد که این گروه‌ها از هم مستقل باشند، آنگاه $\mathrm{cum}\{X_1,\dots,X_n\}=0$ است (ولی لزوماً $\mathrm{Mom}\{X_1,\dots,X_n\}$ صفر نیست).

اثبات: فرض کنید $\{X_1,\dots,X_\lambda\}$ از $\{X_{\lambda+1},\dots,X_n\}$ مستقل باشد. آنگاه:

$$\Phi(s_1,\dots,s_n)=\Phi_1(s_1,\dots,s_\lambda)\,\Phi_2(s_{\lambda+1},\dots,s_n)$$

$$\Rightarrow \Psi(s_1,\dots,s_n)=\Psi_1(s_1,\dots,s_\lambda)+\Psi(s_{\lambda+1},\dots,s_n)$$

در نتیجه طبق تعریف کومولان چون باید مشتق Ψ را نسبت به همه s_i ها بگیریم، مشتق Ψ_1 نسبت به $s_{\lambda+1},\dots,s_n$ صفر است و مشتق Ψ_2 نسبت به $s_1,\dots,s_\lambda$ صفر است $\Leftarrow$ کومولان صفر می‌شود.

حالت خاص: تمام کومولان‌های متقابل دو متغیر تصادفی مستقل صفرند:

$$\mathrm{Cum}_{k_1k_2}\{X,Y\}=0 \qquad \forall k_1\geq 1\ ,\ k_2\geq 1$$

حالت خاص $k_1=k_2=1$ ← ناهمبستگی (استقلال درجه ۲)

← اصطلاحاً: (برای دو متغیر تصادفی)

استقلال درجه ۲ (ناهمبستگی): $\mathrm{Cum}\{X,Y\}=0$

استقلال درجه ۳: $\mathrm{Cum}_{21}(X,Y)=\mathrm{Cum}_{12}(X,Y)=0$

" " ۴: $\mathrm{Cum}_{31}(X,Y)=\mathrm{Cum}_{22}(X,Y)=\mathrm{Cum}_{13}(X,Y)=0$

خاصیت ۴: اگر مجموعه متغیرهای تصادفی $\{X_1,\dots,X_n\}$ و $\{Y_1,\dots,Y_n\}$ از هم مستقل باشند، آنگاه:

① $$Cum\{X_1+Y_1, X_2+Y_2,\dots,X_n+Y_n\} = Cum\{X_1,\dots,X_n\} + Cum\{Y_1,\dots,Y_n\}$$

اما در حالت کلی:

② $$Mom\{X_1+Y_1,\dots,X_n+Y_n\} = E\{(X_1+Y_1)(X_2+Y_2)\cdots(X_n+Y_n)\} \neq Mom\{X_1,\dots,X_n\} + Mom\{Y_1,\dots,Y_n\}$$

توجه: همواره برای مجموعه $\{Y_1, X_1,\dots,X_n\}$ (چه Y_1 از X_i ها مستقل باشد چه نباشد) می‌توان نوشت:

③ $$Cum\{X_1+Y_1, X_2,\dots,X_n\} = Cum\{X_1,X_2,\dots,X_n\} + Cum\{Y_1,X_2,\dots,X_n\}$$

④ $$Mom\{\quad // \quad\} = Mom\{\quad // \quad\} + Mom\{\quad // \quad\}$$

که به آسانی دیده می‌شود که ③ به ① منجر می‌شود ولی ④ به ② منجر نمی‌شود. مثال:

ممان یا کومولان

$$\hat{A}(X_1+Y_1, X_2+Y_2) \overset{③ \text{ و } ④}{=} \underbrace{A(X_1, X_2+Y_2)} + \underbrace{A(Y_1, X_2+Y_2)}$$

$$\overset{③ \text{ و } ④}{=} A(X_1, X_2) + A(X_1, Y_2) + A(Y_1, X_2) + A(Y_1, Y_2)$$

اگر کومولان باشد، این ادعا طبق استدلال در خاصیت قبلی صفر میشه.

خاصیت ۵: اگر مجموعه متغیرهای تصادفی $\{X_1, \dots, X_n\}$ توأماً گوسی باشند، تمام اطلاعات آن در ممان‌های کمتر یا مساوی ۲ آن هستند و ممان‌های بالاتر اطلاعات جدیدی ندارند. یا به زبان کومولان تمام کومولان‌های مرتبه بزرگتر از ۲ صفر هستند.

تعبیر: متغیرهای گوسی آماره‌های بالاتر از درجه ۲ ندارند.

توجه: (تعبیر دقیق) کومولان‌های مرتبه بالاتر از ۲ نشان می‌دهند که متغیر چقدر از گوسی دور است.

اثبات خاصیت ۵ : pdf گوسی درجه n با میانگین $\underline{m}_x$ و ماتریس کوواریانس C_x :

$$p_x(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C_x)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m}_x)^T C_x^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)\right\}$$

$$\Rightarrow \Phi(\underline{s}) = \exp\left\{\underline{m}_x^T \underline{s} + \frac{1}{2}\underline{s}^T C_x \underline{s}\right\}$$

$$\Rightarrow \Psi(\underline{s}) = \underline{m}_x^T \underline{s} + \frac{1}{2}\underline{s}^T C_x \underline{s}$$

یعنی $\Psi(\underline{s})$ برای گوسی یک چندجمله‌ای درجه ۲ است $\Leftarrow$ ضرائب بسط تیلور از جملات بالاتر از ۲ صفرند (یعنی کومولان‌های درجه بالاتر از ۲ صفرند).