

بیوفیزیک

امیر آقامحمدی

استادِ فیزیکِ دانش‌گاهِ الزهرا

دانش‌گاهِ الزهرا

۱۴۰۱

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

Biophysics

سرشناسه : آقامحمدی، امیر، ۱۳۴۰
عنوان : بیوفیزیک
مشخصات نشر :
مشخصات ظاهری : مصور، جدول.
شابک :
پشت جلد به انگلیسی :
کتاب نامه :
نمایه :
موضوع : علوم پایه
شناسه افزوده :
رده بندی کنگره :



عنوان کتاب: بیوفیزیک
تألیف: امیر آقامحمدی
ویراستار ادبی:
صفحه آرا: امیر آقامحمدی
ناشر:
تاریخ و نوبت چاپ:
شمارگان:
قیمت:
شابک:
قطع: وزیری

مسئولیت درستی مطالب به عهده نویسنده است.

تقدیم به همه آنهایی که می‌خواهند بیشتر بدانند...

پیش‌گفتار



من قرار شد درس بیوفیزیک را در دانشگاه الزهرا تدریس کنم. چون کتابی به زبان فارسی که مباحث مورد نظر مرا در برگرد پیدا نکردم، این درس‌نامه را برای این درس آماده و استفاده کردم. ما قوانین فیزیک را جهان‌شمول فرض می‌کنیم، بنا بر این انتظار داریم همه‌ی طبیعت از قوانین یکسانی تبعیت کنند و اندام‌های زنده هم تابع قوانین فیزیک باشند. بیوفیزیک مطالعه‌ی فیزیک حاکم بر فرآیندهای زیستی است.

برای تهیه‌ی این درس‌نامه از مراجع مختلفی استفاده کردم از جمله کتاب‌ها و سایت‌های زیر:

- Nelson, P.; Biological physics, Energy, Information, Life, Freeman WH & Co. (2004).
- Durbin R., Eddy S. R., Krogh A., & Mitchison G.; Biological Sequence Analysis Probabilistic Models of Proteins and Nucleic Acids (1998).
- Hobbie R.K., & Roth R.K.; Intermediate Physics for Medicine and Biology (2015).
- Borodovsky M., & Ekisheva S.; Problems and solutions in biological sequence analysis, Cambridge University Press (2006).

- Boal D.; Mechanics of the cell, Cambridge University Press, (2012).
- Murray J. D.; Mathematical Biology I. An Introduction, Springer (2002).
- [U.S. National Library of Medicine](#)
- www.wikipedia.org
- www.mamwad.org

توجه داشته باشید که این درس‌نامه هنوز در شکل ابتدایی است. علاوه بر این که هنوز ناقص است، احتمالاً اشکالاتی هم دارد.

امیر آقامحمدی

تهران، ۱۴۰۱

فهرست مطالب

| ث | پیش‌گفتار |
|----|--------------------------------------|
| ۱ | ۱ کمیت‌های فیزیکی در سیستم‌های زیستی |
| ۱ | ۱.۱ انرژی در سیستم‌های زیستی |
| ۵ | ۲.۱ تحلیل ابعادی |
| ۱۰ | مسائل |
| ۱۵ | ۲ سوخت و ساز |
| ۱۵ | ۱.۲ سوخت و ساز |
| ۲۲ | ۲.۲ مواد غذایی |
| ۲۲ | ۱.۲.۲ کربوهیدرات |
| ۲۳ | ۲.۲.۲ چربی |
| ۲۴ | ۳.۲.۲ پروتئین |
| ۲۶ | ۴.۲.۲ دخل و خرج انرژی |

| | | |
|----|--------------------------------|-------|
| ۲۸ | تنفس - اکسیژن | ۳.۲ |
| ۳۳ | آب | ۴.۲ |
| ۳۴ | مسائل | |
| ۳۷ | تولید و انتقال حرارت | ۳ |
| ۳۷ | معادله‌ی حرارت | ۱.۳ |
| ۴۱ | انتقال حرارت در محیط‌های زیستی | ۲.۳ |
| ۴۳ | هدایت و همرفت | ۱.۲.۳ |
| ۴۵ | تابش | ۲.۲.۳ |
| ۴۶ | تعریق | ۳.۲.۳ |
| ۴۸ | ظرفیت گرمایی | ۴.۲.۳ |
| ۵۰ | مسائل | |
| ۵۵ | قوانین مقیاسی در زیست‌شناسی | ۴ |
| ۵۶ | قانون کلایبر: سوخت و ساز و جرم | ۱.۴ |
| ۵۸ | قوانین مقیاسی در زیست‌شناسی | ۲.۴ |
| ۶۰ | مدل WBE | ۳.۴ |
| ۶۴ | مسائل | |
| ۶۷ | سلول‌ها | ۵ |
| ۶۷ | سلول‌ها | ۱.۵ |
| ۷۲ | DNA | ۲.۵ |
| ۷۸ | ژن و کروموزوم | ۳.۵ |
| ۸۲ | ویروس | ۴.۵ |
| ۸۴ | مسائل | |
| ۸۹ | ول‌گشت و پخش | ۶ |

فهرست مطالب خ

| | | |
|-----|---|-----|
| ۸۹ | شاره‌ها | ۱.۶ |
| ۹۸ | توزیع دوجمله‌ای و ول‌گشت | ۲.۶ |
| ۱۰۴ | معادله‌ی پخش | ۳.۶ |
| ۱۱۰ | قانون فیک و معادله‌ی پیوستگی | ۴.۶ |
| ۱۱۸ | ۱.۴.۶ ته‌نشینی | |
| ۱۲۰ | حرکت در شاره‌های با عدد رینولدز کوچک | ۵.۶ |
| ۱۲۴ | مسائل | |
| ۱۲۷ | مدل‌هایی برای تحول جمعیت در زیست‌شناسی | ۷ |
| ۱۲۷ | مدل‌های تک‌ذره‌ای | ۱.۷ |
| ۱۳۰ | معادله‌ی لجستیک | ۲.۷ |
| ۱۳۴ | ۱.۲.۷ معادله‌ی لجستیک زمان‌گسسته | |
| ۱۴۱ | ۲.۲.۷ مدلی برای شیوع حشرات | |
| ۱۴۶ | ۳.۷ مدل‌های دوگونه ذره: مدل شکار و شکارچی | |
| ۱۵۰ | ۴.۷ مدل‌های چندگونه ذره: اپیدمی‌ی یک بیماری | |
| ۱۵۶ | ۱.۴.۷ فاکتور R_0 | |
| ۱۵۹ | مسائل | |
| ۱۶۹ | ۸ پیوست ۱- احتمال و انتروپی | |
| ۱۷۱ | ۱.۸ اندازه، احتمال | |
| ۱۷۵ | ۲.۸ احتمال شرطی | |
| ۱۸۲ | ۳.۸ انتروپی | |
| ۱۸۵ | ۴.۸ توزیع دوجمله‌ای | |

۱ کمیت‌های فیزیکی در سیستم‌های زیستی

۱.۱ انرژی در سیستم‌های زیستی

در درس مکانیک با انرژی مکانیکی آشنا شدیم. این انرژی می‌تواند دو بخش داشته باشد. انرژی جنبشی $mv^2/2$ و در مواقعی که نیروهای دخیل در مساله پایستارند، انرژی پتانسیل، $U(\mathbf{r})$. در این صورت انرژی مکانیکی با جمع این دو تعریف می‌شود

$$E_{\text{mech}} = \frac{mv^2}{2} + U(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

اگر جز این نیروهای پایستار، نیروی دیگری در مساله نداشته باشیم، انرژی مکانیکی پایسته است. اما فرض کنیم نیروهای دیگری هم باشند. در این صورت انرژی مکانیکی پایسته نیست
و

$$\Delta E_{\text{mech}} = W_f. \quad (2.1)$$

مثلا در حضور نیروی اصطکاک که پایستار نیست، انرژی مکانیکی که در این جا ماکروسکوپی

است، پایسته نیست و به شکل دیگری از انرژی (در این جا انرژی مکانیکی میکروسکوپی) تبدیل می‌شود، $W_f = -Q$. جمع این دو نوع انرژی، یعنی جمع انرژی مکانیکی میکروسکوپی و انرژی میکروسکوپی پایسته است. جسمی که روی سطحی می‌لغزد تا این که به خاطر اصطکاک بالاخره می‌ایستد، انرژی مکانیکی میکروسکوپی اش به انرژی میکروسکوپی تبدیل می‌شود. هر چند انرژی کل پایسته است، گاهی در این موارد می‌گوییم انرژی مکانیکی تلف شده و به گرما تبدیل شده است. البته در واقع گرما همان انرژی مکانیکی منتقل شده به ذرات میکروسکوپی سطح تماس جسم و زمین است که به طور تصادفی بین آن‌ها تقسیم شده است. انرژی میکروسکوپی هم شکلی از انرژی مکانیکی، ولی در حد میکروسکوپی است. وقتی جسم شروع به حرکت می‌کند، مقداری انرژی جنبشی دارد و موقعی که بالاخره ساکن می‌شود، این انرژی بین تعداد زیادی ذره پخش می‌شود. آیا انرژی میکروسکوپی هم‌واره انرژی تلف شده است؟ یا می‌توانیم این فرآیند را معکوس کنیم و انرژی میکروسکوپی را از ذرات میکروسکوپی بگیریم و به انرژی مکانیکی (در حد میکروسکوپی) تبدیل کنیم؟ این که گفته می‌شود انرژی تلف شده، منظور این نیست که انرژی پایسته نیست، بلکه به این معنی است که این فرآیند تا حدی یک طرفه است. در واقع امکان ندارد جسم ساکنی به تدریج از محیط اطرافش گرما جذب کند، یعنی جسم ساکن از تعداد زیادی ذره، بخشی از انرژی جنبشی‌شان را بگیرد و آن را به انرژی جنبشی خودش تبدیل کند. تکه سنگی را در نظر بگیرید که از ارتفاعی سقوط می‌کند. در حین سقوط انرژی مکانیکی پایسته است. انرژی پتانسیل کم و به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود. اگر این بخش از حرکت را معکوس کنیم باز هم امکان وقوع دارد. به عبارتی سقوط تکه سنگ برگشت پذیر است و تحت انعکاس زمان، حرکت تبدیل به پرتاب تکه سنگ رو به بالا می‌شود که ممکن و باور پذیر است. انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود تا جایی که جسم به بیشترین ارتفاع برسد و به طور لحظه‌ای ساکن شود و برگردد. اما اگر تکه سنگ در حال سقوط روی زمین گل آلودی بیفتد و کمی در آن فرو رود تا بالاخره ساکن شود، انرژی مکانیکی (یعنی بخش میکروسکوپی) پایسته نیست ولی انرژی کل یعنی جمع بخش میکروسکوپی و میکروسکوپی پایسته است. اگر از این بخش از حرکت فیلم بگیریم و معکوس کنیم، می‌بینیم که غیر واقعی است. یک ذره‌ی ساکن فوراً در گل ولای، امکان ندارد با جذب گرمای محیط اطرافش به تدریج سرعتی پیدا کند و از زمین بلند شود و تا ارتفاعی بالا رود. به

عبارتی این حرکت برگشت‌ناپذیر است. پس شاید خیلی هم بی‌معنی نباشد که بگوییم این انرژی میکروسکوپی، انرژی تلف‌شده است. در بخش اول انتقال انرژی دو طرفه بود ولی در این‌جا که گرما داریم این‌طور نیست. باید این مطلب را دقیق‌تر بررسی کنیم. یکی از چشمه‌های مهم انرژی در اطراف ما نور خورشید است. با تابش نور خورشید بر یک سلول خورشیدی می‌توان جریان الکتریکی تولید کرد و سپس با آن یک لامپ را روشن کرد که همین لامپ بخشی از آن نور را به ما پس می‌دهد. ولی باید توجه داشته باشیم که در این فرآیند مقداری از انرژی هم به انرژی میکروسکوپی تبدیل می‌شود و ما نمی‌توانیم تمام آن نوری که از خورشید رسیده بود را پس بگیریم. سلول‌های خورشیدی فقط کسری از نور را تبدیل به الکتریسیته می‌کنند چون با محدودیت‌های فیزیکی روبرو هستند. به طور عادی حدود ۱۰ تا ۲۰ درصد انرژی خورشید تبدیل به برق می‌شود و بقیه به صورت حرارت هدر می‌رود. از طرف دیگر نور خورشید باعث تبخیر آب‌های سطحی، تشکیل ابرها، بارش برف و باران، و بالاخره جاری‌شدن رودها می‌شود. با استفاده از توربین‌هایی که سر راه جریان آب قرار می‌دهیم می‌توانیم برق بگیریم و ادامه‌ی ماجرا. در واقع در هر فرآیندی ما شکل‌هایی از انرژی داریم که قابل تبدیل به شکل‌های دیگر انرژی هستند که ممکن است بگوییم این‌ها انرژی‌های با کیفیتی هستند و شکلی از انرژی مثل انرژی میکروسکوپی هم هست که بی‌کیفیت است. البته ما در فیزیک روال‌مان این است که این حرف‌ها را کمی کنیم و به شکل دقیق‌تری بگوییم. واحد انرژی در دستگاه SI ژول است ولی معمولاً گرما یا همین انرژی مبادله‌شده بر حسب واحد کالری اندازه‌گیری می‌شود. یک کالری مقدار گرمای لازم برای بالا بردن دمای یک گرم آب به اندازه‌ی ۱ درجه‌ی سانتی‌گراد است. بنابراین اگر روی یک ماده‌ی غذایی نوشته شده که انرژی‌اش 100 kcal است، یعنی با تبدیل انرژی شیمیایی درون این ماده‌ی غذایی به گرما می‌توان 100 لیتر آب (یا 100 kg آب) را یک سانتی‌گراد گرم کرد. گاهی به جای نماد kcal از نماد Cal استفاده می‌شود. ژول^۱ و هلمهولتز^۲ بیانی در مورد گرمای تولید شده در اثر اصطکاک و کار مکانیکی تبدیل شده به گرما دارند. در این بیان گرمای مبادله‌شده، Q بر حسب کالری و کار مکانیکی انجام شده، W بر حسب ژول به هم مربوطند

$$Q = W \times 0.24 \frac{\text{cal}}{\text{J}} \quad (۳.۱)$$

معنی این رابطه این است که اگر با انجام مقداری کار گرمایی مبادله شود که مثلاً باعث شود دمای آبی ۱ درجه بالا رود، با دو برابر کردن آن کار دمای همان آب ۲ درجه بالا می‌رود. اگر سیستمی در فرآیندی چرخه‌ای به نقطه‌ی ابتدایی برگردد، کار خالص یعنی کار انجام‌شده توسط سیستم منهای کار انجام‌شده روی سیستم با گرمای خالص یعنی گرمایی که به سیستم وارد می‌شود منهای گرمایی که از سیستم خارج می‌شود برابر است. البته مشروط به این که هر دو نوع انرژی را بر حسب واحد یک‌سان (ژول یا کالری) بنویسیم. اگر سیستم به جای ابتدایی برنگردد و مقداری انرژی در سیستم ذخیره شود، این انرژی تفاوت کار خالص روی سیستم و گرمای خالص ورودی به سیستم است. این قانون بیانی از پایستگی انرژی و قانون اول ترمودینامیک است.

همان‌طور که دیدیم خیلی از فرآیندها برگشت‌ناپذیر و یک‌طرفه هستند. چه معیار کمی‌ای وجود دارد که جهت فرآیند را روشن می‌کند؟ دیدیم که در این فرآیندها انرژی پایسته است. قبلاً گفتیم که وقتی سیستمی انرژی را به صورت گرما به محیط اطرافش می‌دهد، این انرژی به صورت انرژی جنبشی و به طور کاتوره‌ای بین ملکولهای سازنده‌ی محیط پخش می‌شود. در مثال تکه سنگی که از ارتفاعی سقوط می‌کرد، در حین سقوط بخش‌های کوچک‌تر سنگ هم در حال سقوط با همان سرعت تکه سنگ هستند. اما وقتی تکه سنگ در گل ولای روی زمین ساکن می‌شود گرمای جذب شده به صورت کاتوره‌ای بین ملکولهای سازنده‌ی گل ولای پخش می‌شود. وقتی می‌گوییم گرمای مبادله‌شده انرژی بی‌کیفیت‌تری است اشاره به این کاتوره‌ای بودن انرژی پخش شده دارد. کمیتی در فیزیک که معیار کاتوره‌ای بودن است، انتروپی، S ، است. برای یک سیستم با دمای T ، انرژی آزاد به صورت

$$F = E - TS \quad (۴.۱)$$

تعریف می‌شود. منفی تغییرات انرژی آزاد بیش‌ترین کاری است که در یک فرآیند هم‌دما می‌شود به دست آورد و تغییر آن کوچک‌تر یا مساوی تغییر انرژی است.

$$-dF = -dE + TdS \quad (۵.۱)$$

برای یک فرآیند هم‌دما که انرژی هم پایسته باشد

$$dF = -TdS \quad (۶.۱)$$

بیشینه شدنِ انتروپی معادلِ کمینه شدنِ انرژی آزاد است. بیشینه شدنِ انتروپی در یک سیستم منفرد قانونِ دومِ ترمودینامیک است. اما اگر به سیستمی نگاه کنیم که منفرد نیست و با محیطش برهم‌کنش دارد لازم نیست که انتروپی آن بیشینه شود. ممکن است حتی سیستم منظم‌تر شود و انتروپی‌اش کاهش یابد. شرط لازم این است که تغییرِ انتروپیِ مجموعه یعنی انتروپیِ سیستم به هم‌راه محیطش، بزرگ‌تر یا مساویِ صفر باشد. همان‌طور که می‌بینیم زمین پر از سیستم‌های زیستی است. وقتی مثلاً در یک سیستم زیستی اندامی رشد می‌کند، اتم‌ها و ملکول‌هایی که بی‌نظم بودند در یک بافت به طور منظم کنار هم می‌نشینند. در این‌جا مشکلی با قانون اول و دومِ ترمودینامیک وجود ندارد، چون‌که این موجود زنده با مصرفِ غذا با محیطِ خود برهم‌کنش دارد. هم انرژی می‌گیرد و هم ممکن است انتروپی‌اش کاهش یابد. مهم این است که انرژیِ کل پایسته باشد و تغییرِ انتروپیِ کل نامنفی باشد.

۲.۱ تحلیل ابعادی

در فیزیک وقتی صحبت از یک کمیتِ مشاهده‌پذیر می‌کنیم منظورمان آن است که آن کمیت قابلِ سنجش است. بعضی مشاهده‌پذیرها بُعددار و بعضی بی‌بُعدند. به هر کمیتِ مشاهده‌پذیر بُعددار در یک دستگاهِ واحدهای مشخص، عددی نسبت می‌دهیم. معمولاً بُعد مکان x که آن را با $[x]$ نشان می‌دهیم، L ، و بُعد زمان $T = [t]$ ، می‌گیریم. در این صورت این‌ها بُعدهای مستقل^۱ هستند. بُعد سرعت $[v] = LT^{-1}$ و به این دو بُعد وابسته^۲ است. البته در انتخابِ بُعدهای مستقل آزادی داریم. اگر بُعدهای مستقل را بُعد مکان، $[x] = L$ و بُعد سرعت $[v] = U$ بگیریم، بُعد زمان $[t] = LU^{-1}$ وابسته است.

مقدارِ عددی هر کمیتِ بُعدداری به دستگاهِ واحدی که انتخاب می‌کنیم بستگی دارد. اگر واحدِ طول را از متر به سانتی‌متر عوض کنیم، عددی که به یک طول نسبت می‌دهیم عوض می‌شود. هر کمیتی که در بُعدش، بُعد طول ظاهر می‌شود اندازه‌ی عددی‌اش عوض می‌شود. اما

^۱ independent dimensions ^۲ dependent dimension

اندازه‌ی یک کمیت بی‌بعد مستقل از دستگاه واحدی است که انتخاب کرده‌ایم و در تمام دستگاه‌ها واحدها یک مقدار دارد. هر رابطه‌ی فیزیکی به صورت یک تساوی است که دو طرف رابطه هم‌بعداند. مثلاً در رابطه‌ی $x = vt$ ، هر دو طرف بُعد طول دارند. برای جسمی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، این رابطه در هر دستگاه واحدی درست است. با تغییر دستگاه واحدها مقدار عددی هر دو طرف عوض می‌شود ولی تساوی دو طرف کماکان برقرار است. البته این رابطه را به صورت $x/(vt) = 1$ هم می‌توان نوشت. در این صورت دو طرف رابطه بی‌بعدند. سمت راست معادله‌ی آخر در هر دستگاه واحدی 1 است. اگر دو طرف یک تساوی کمیت‌هایی با ابعاد مختلف باشند، نتیجه تنها در یک دستگاه واحد می‌تواند درست باشد. مثلاً فرض کنید A و B هر دو 10 هستند، ولی $A = 10 \text{ m}$ و $B = 10 \text{ m}^2$ است. اگر کمیت‌های A و B را بر حسب cm^2 و cm بنویسیم $A = 1000 \text{ cm}$ و $B = 100000 \text{ cm}^2$ می‌شود که دیگر با هم مساوی نیستند. اگر بخواهیم رابطه‌ی فیزیکی در هر دستگاه واحدهایی درست باشد، باید دو طرف تساوی هم‌بعد باشند.

بزرگی و کوچکی یک کمیت بُعددار هم بی‌معناست. طول d_1 را در نظر بگیرید که با انتخاب واحد متر مقدار عددی‌ای که با آن نسبت می‌دهیم، $d_1 = 1 \text{ m}$ است. این طول اگر بر حسب طول در مقیاس زیراتمی^۱ مثلاً یک فرمی^۲ نوشته شود، مقدارش $d_1 = 10^{15} \text{ fm}$ است. در دستگاه واحدی که مقیاس طول یک سال نجومی^۳ است، $d_1 \approx 10^{-16} \text{ m}$ است. مقدار عددی‌ای که به این طول نسبت می‌دهیم با تغییر دستگاه واحدها تغییر می‌کند و می‌تواند عددی خیلی بزرگ یا عددی خیلی کوچک باشد. d_1 نسبت به ابعاد هسته‌ای یعنی اعدادی از رتبه‌ی $d_2 = 10^{-15} \text{ m}$ بسیار بزرگ، و نسبت به یک سال نوری یعنی چیزی حدود $d_3 = 10^{16} \text{ m}$ بسیار کوچک است. از تقسیم دو کمیت هم‌بعد کمیتی بی‌بعد به دست می‌آید. حالا می‌توان از بزرگی و کوچکی این کمیت حرف زد. مثلاً $1 \ll \frac{d_1}{d_2} = 10^{15} = \Pi_1$ و $1 \gg \frac{d_1}{d_3} = 10^{-16} = \Pi_2$. روابط اخیر به دستگاه واحد هم بستگی ندارد. اگر مقدار d_1 ، d_2 ، و d_3 را بر حسب mm یا هر واحد طول دیگری هم قرار دهیم، همان مقادیر عددی قبلی برای Π_1 و Π_2 به دست می‌آید. یعنی Π_1 در همه‌ی واحدها بزرگ و Π_2 در همه‌ی واحدها کوچک است.

^۱ Subatomic^۱ $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ $1 \text{ ly} = 3 \times 10^8 \times 3600 \times 24 \times 365 \approx 10^{16} \text{ m}$
<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

اغلب در محاسبه‌ها با کمیت‌هایی با ابعادِ گوناگون سروکار داریم. ببینیم چه کارهایی با کمیت‌های بُعد دار می‌توان انجام داد.

۱. تنها کمیت‌های هم‌بُعد را می‌توان با هم جمع یا از هم کم کرد.
۲. کمیت‌های مختلف را می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. لزومی ندارد که این کمیت‌ها بُعدشان یکی باشد. بُعد کمیت نهایی نیز از ضرب و تقسیم ابعاد همان کمیت‌ها به دست می‌آید.

فردی را در نظر بگیرید که قدش 2 متر و جرمش 100 کیلوگرم است. اگر همه‌ی ابعاد بدن این فرد با ضریب 2 مقیاس شود، قدش 2 برابر یعنی 4 متر و جرمش 8 برابر یعنی 800 کیلوگرم می‌شود. سطح پاهایش 4 برابر و فشار روی پاهایش، یعنی نیروی وارد بر پاهایش در واحد سطح، 2 برابر می‌شود. ممکن است دلیل این‌که آدم‌های 4 متری نداریم همین باشد. چون جنس استخوان همه شبیه هم است (این فرضی است که با تجربه هم می‌خواند)، اگر فشار روی پاها از حدی بیش‌تر شود، استخوان پا می‌شکند. با دانستن بیشینه فشاری که پاها می‌توانند تحمل کنند، بیشینه قدی که یک انسان می‌تواند داشته باشد را می‌توان به دست آورد. بنابراین در قصه‌ی گالیور غول‌ها یا آدم‌های خیلی بزرگ نباید بتوانند راه بروند. مگر این‌که یا جنس استخوان‌شان فرق کند یا این‌که سطح تماس‌شان با زمین بزرگ‌تر شود. دو آدم چاق و لاغر اگر جایی پابرنه راه بروند کف پای آدم چاق بیش‌تر کشیف می‌شود (چرا؟).

زمانی کارتونی از تلویزیون پخش می‌شد که شخصیت اصلی‌ی آن یک گوریل 15 متری بود. گوریلی معمولی با قدی حدود 1.5 متر در نظر بگیرید. گوریل 15 متری قدش حدوداً 10 برابر یک گوریل معمولی است، و وزنش $10^3 = 1000$ برابر و سطح پاهایش $10^2 = 100$ برابر یک گوریل عادی می‌شود. فشار روی پاهایش یعنی نسبت نیروی وزن به سطح پاهایش هم 10 برابر است. معنی‌ی این حرف این است که نیروی وارد به واحد سطح استخوان پای چنین گوریلی 10 برابر نیروی وارد به واحد سطح استخوان پای یک گوریل عادی است. با توجه به این که انتظار نداریم جنس استخوان‌های گوریل‌ها فرق داشته باشد، گوریل 15 متری نباید یک استخوان سالم هم در پاهایش داشته باشد. در واقع موجودات بزرگ نمی‌توانند مقیاس شده‌ی موجودات کوچک باشند. به همین دلیل است که در طبیعت خرگوش عظیم‌الجثه نداریم. موجودات بزرگ مشکل‌شان را

این‌طور حل کرده‌اند که استخوان‌های پاهای‌شان در مقایسه با بقیه‌ی اندام‌ها ضخیم‌تر است. نسبت وزن استخوان به کل بدن در موجودات مختلف متفاوت است. هر چه موجود بزرگ‌تر باشد این نسبت بزرگ‌تر می‌شود. موش یا چکاوک 8% بدنش استخوان است، در حالی‌که غاز یا سگ 13%، و انسان 17% تا 18% بدنش را استخوان تشکیل می‌دهد. هر چه موجودی بزرگ‌تر باشد مقدار استخوان بدنش بیش‌تر می‌شود. برای موجودات خیلی بزرگ مثل دایناسورها استخوان‌بندی بسیار ضخیم‌تر است و مقیاس شده‌ی استخوان‌بندی‌ی موجودات کوچک‌تر نیست. اندازه‌ی جثه‌ی موجودات روی زمین نیز هر مقداری نمی‌تواند باشد. موجودات چهارپا می‌توانند بزرگ‌تر از موجودات دوپا باشند. در واقع موجوداتی که رشد افقی دارند می‌توانند نسبت به موجودات دوپا قد بلندتری داشته باشند. اگر بخشی از بدن‌شان در آب باشد باز هم می‌توانند بزرگ‌تر باشند. بزرگ‌ترین پستان‌دار در آب زندگی می‌کند.

با استدلال مشابهی می‌توان تخمین زد که ارتفاع بیشینه‌ی یک کوه چه قدر می‌تواند باشد. برای هر سنگی یک آستانه‌ی فشاری وجود دارد. اگر فشار از آن مقدار بیش‌تر شود، سنگ روان می‌شود. اگر ارتفاع کوه زیاد شود فشاری که به سنگ‌های زیر کوه وارد می‌شود از این آستانه می‌گذرد و با روان‌شدن آن‌ها ارتفاع کوه کم می‌شود. به این دلیل است که کوه مثلاً 50000 متری نداریم. بلندترین کوه منظومه‌ی شمسی در یکی از قمرهای بهرام است. چون میدان‌گرانش در سطح این قمر کوچک‌تر است فشار روی سنگ‌های زیر کوه کم‌تر و ارتفاع کوه می‌تواند بیش‌تر باشد. ارتفاع بلندترین کوه روی زمین حدود 9000 متر است، ولی ارتفاع بلندترین کوه منظومه‌ی شمسی حدود 20000 متر است.

بیا بید بحث خود در مورد تغییر مقیاس را با چند مثال دیگر ادامه دهیم. تا کنون حشرات خیلی بزرگ یا غول‌آسا دیده‌اید؟ من ندیده‌ام. اما در فیلم‌های تخیلی زنبورها یا حشرات غول‌آسای دیگری را دیده‌ام. آیا چنین حشراتی با این ابعاد وجود دارند؟ آیا قوانین فیزیک هیچ حد بالایی روی اندازه‌ی حشرات می‌گذارد؟ بیا بید روی این سوال‌ها تمرکز کنیم. حشرات شش ندارند و اکسیژن مورد نیازشان را نوعاً از طریق پوست‌شان جذب می‌کنند. به عنوان یک مدل ساده حشره را تقریباً به شکل کره‌ای به شعاع R بگیرید. سطح کره متناسب با R^2 و حجم آن متناسب با R^3 است. اگر حشره‌ای دو برابر شود، سطحش 4 برابر و حجمش 8 برابر می‌شود. چون سطح پوستش 4 برابر شده می‌تواند 4 برابر بیش‌تر اکسیژن جذب می‌کند. اما از طرف دیگر

تعدادِ ملکول‌هایش 8 برابر و بنابراین نیازش به اکسیژن 8 برابر می‌شود. پس اگر حشره دو برابر شود، دو برابر اکسیژن کم می‌آورد. احتمالاً به این دلیل است که حشرات از یک حدی بزرگ‌تر نیستند (حدود چند سانتی‌متر). آن‌چه گفتیم برای حشره‌های کروی (!) مثلاً زنبورِ عسل بود. اگر حشره‌ای خیلی کشیده باشد، مثلاً سنجاقک، مدلِ بالا برایش کار نمی‌کند. در واقع حشره‌های بزرگ‌تر حشره‌هایی کشیده هستند. در حال حاضر ۲۰ درصد هوا اکسیژن است. اگر درصدِ بیش‌تری از هوا اکسیژن بود، احتمالاً حشره‌های بزرگ‌تری می‌داشتیم. نظریه‌هایی وجود دارد که می‌گویند میلیون‌ها سال قبل که بخش بزرگی از زمین پوشیده از جنگل‌های انبوه بوده، درصدِ اکسیژن بیش‌تر از حالا بود. ممکن است در آن زمان حشرات بزرگ‌تری هم وجود داشته‌اند.

حالا فرض کنید موجوداتی مواد غذایی‌ی خودشان را از طریقِ سطحِ بدن‌شان جذب کنند. اگر این موجودات α برابر بزرگ‌تر شوند سطحِ بدن‌شان α^2 برابر می‌شود ولی حجم‌شان و در نتیجه تعدادِ سلول‌های بدن‌شان α^3 برابر می‌شود. در نتیجه با بزرگ‌شدنِ این موجودات نسبتِ سطح به حجمِ بدن‌شان کوچک می‌شود. یعنی هرچه این موجود بزرگ‌تر باشد، سهم کم‌تری ماده‌ی غذایی به سلول‌های بدنش می‌رسد. اگر جذبِ غذا در بدنِ انسان در ناحیه‌ای کروی شکل بود احتمالاً با کمبود ماده‌ی جذب‌شده روبه‌رو بودیم. این مشکل در بدنِ انسان‌ها توسطِ روده‌هایی بلند و لوله‌ای شکل حل شده است. به این طریق سطحی که ماده‌ی غذایی را جذب می‌کند بزرگ‌تر شده. علاوه‌براین دیواره‌ی روده‌ها صاف هم نیست بل که دارای میلیون‌ها برجستگی پُرزگونه است. این پرزها باعث می‌شوند که سطحِ تماسِ خیلی زیادتری در روده‌ها ایجاد شود. همه‌ی این‌ها باعث می‌شود که جذبِ غذاها به‌تر و بیش‌تر باشد.

در قطبِ خرسِ قطبی وجود دارد ولی موشِ قطبی پیدا نمی‌شود. دلیلش چیزی شبیه مثالِ قبل است. تولیدِ گرما به تعدادِ سلول‌ها یعنی حجمِ بستگی دارد ولی اتلافِ گرما از طریقِ سطح است. بنابراین اتلافِ انرژی به انرژی‌ی تولیدشده با عکسِ طولِ مقیاس می‌شود. موش تقریباً ۱۰۰ گرم و خرسِ قطبی حدود ۶۰۰ کیلوگرم است. حجمِ موش حدود 100 cm^3 و حجمِ خرس تقریباً $600 \times 1000 \text{ cm}^3$ است.

$$\left(\frac{600 \times 10^3}{100} \right)^{1/3} \approx 20 \quad (۷.۱)$$

پس اتلافِ انرژی‌ی موش نسبت به خرس حدود ۲۰ برابر است. زندگی در قطب برای موش

خیلی سخت‌تر از خرس است. البته این تنها پارامتر نیست. پارامترهای کنترل‌کننده‌ی دیگری مثل مواردی که به یافتن غذا مربوط می‌شوند هم وجود دارد. این مجموعه‌ی پارامترها هستند که تعیین می‌کنند کدام موجود امکان بقاء دارد.

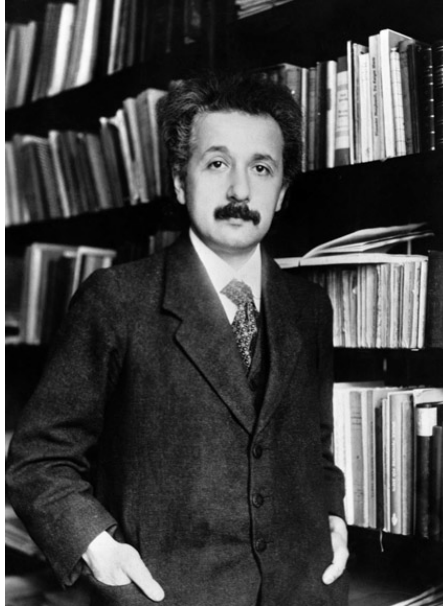
مسائل

۱.۱ بازی‌کنان فوتبال در یک مسابقه تقریباً چه قدر عرق می‌کنند؟ در طی‌ی یک مسابقه‌ی فوتبال بازی‌کنان مقدار زیادی عرق می‌کنند. مقدار که یک بازی‌کن عرق کرده است تقریباً معادل است با لایه‌ای از عرق به ضخامت متوسط 1 mm روی بدن او. اگر جرم حجمی‌ی عرق را 1 g/cm^3 فرض کنیم، او تقریباً چه قدر عرق کرده است؟ برای تخمین مقدار آبی که از طریق تعرق از دست داده است بدن بازی‌کن را با مکعب مستطیلی به ابعاد $180 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ همانند کنید.

۲.۱ الف- برای تولید 1kg گندم به یک تن، یعنی 1000 kg آب نیاز است. بارش سالانه‌ی منطقه‌ای 100 mm است، به این معنی که اگر تمام برف و باران سالانه‌ی آن منطقه را در منطقه‌ای به همان مساحت بریزیم ارتفاع آن 100 mm می‌شود. در این ناحیه حداکثر محصول کشت دیم گندم چند تن بر هکتار است؟ هکتار یعنی 10^4 m^2 .
ب- با هر کیلو آرد تقریباً سه نان سنگک می‌توان پخت. با این زمین گندم لازم برای چند نان سنگک را می‌نوان به دست آورد؟ هر نان سنگک به چه قدر آب و چه قدر زمین (در کشت دیم) نیاز دارد؟

۳.۱ تعداد موهای سر آلبرت انشتین به کدام عدد نزدیک‌تر بود؟ شکل ۱.۱ را ببینید.
الف) $10^2 - 10^3$ ب) $10^5 - 10^6$ ج) $10^9 - 10^{10}$ د) $10^{12} - 10^{13}$
۴.۱ جسمی درون سیال حرکت می‌کند. نیروی مقاومتی که از طرف سیال به آن وارد می‌شود به شکل $K v^2$ است، که K یک ثابت و v اندازه‌ی سرعت جسم است. بُعد K کدام است؟

الف) $\text{ML}^{-2} \text{T}$ ب) $\text{ML}^{-2} \text{T}^{-1}$ ج) ML^{-1} د) ML



شکل ۱.۱ شکل مسئله‌ی ۳.۱

۵.۱ جسم سوال قبل در همان سیال از حالت سکون سقوط می‌کند. جرم جسم را m و شتاب گرانش را g بگیرد. بُعد شتاب LT^{-2} است. می‌توان نشان داد پس از مدتی سرعت ذره تقریباً ثابت می‌شود. به این سرعت، سرعت حد گفته می‌شود. زمان لازم برای این که سرعت جسم به سرعت حدی نزدیک شود یا هم‌مرتب با آن شود را زمان مشخصه می‌گوییم. کدام عبارت می‌تواند باشد؟

۶.۱ الف) $\left(\frac{mg}{K}\right)^{1/2}$ ب) $\left(\frac{m}{Kg}\right)^{1/2}$ ج) $\left(\frac{m}{Kg^2}\right)^{1/3}$ د) $\left(\frac{m}{K^2g}\right)^{1/3}$

تویی با سرعت اولیه‌ی v_0 به طور عمودی به بالا پرتاب می‌شود. شتاب گرانش g است. بُعد سرعت LT^{-1} و بُعد شتاب LT^{-2} است. بیشینه ارتفاعی که گلوله بالا می‌رود تابعی از سرعت اولیه و شتاب گرانش است. با تحلیل ابعادی چه اطلاعی در مورد بسته‌گی بیشینه ارتفاع به سرعت اولیه و شتاب گرانش به دست می‌آید؟ با تحلیل ابعادی چه اطلاعی در مورد بسته‌گی زمان رفت و برگشت توپ به سرعت اولیه و شتاب گرانش به دست می‌آید؟

۷.۱ در فصل ۲ در مورد سوخت‌وساز که فرآیند تولید انرژی در بدن موجود زنده است و همین‌طور انتقال گرما از سطح بدن موجود صحبت می‌کنیم. برای موجودات باید مدلی در نظر بگیریم. سه مدل ساده برای این‌کار عبارت‌اند از الف- موجود زنده را کره‌ای به شعاع R بگیریم.

ب- موجود زنده را مکعبی به طول L بگیریم.

ج- موجود زنده را یک لایه‌ی پهن و نازک که مساحت هر طرف آن A و با ضخامت t است، بگیریم. از مساحت جانبی مدلی سوم چشم‌پوشی می‌کنیم. در واقع با این‌کار فرض می‌کنیم اگر این موجود رشد کند سطح و حجمش تغییر می‌کند ولی ضخامتش همان t می‌ماند.

دو مدل اول مدل‌هایی ساده برای حیوانات و مدل سوم مدلی برای برگ گیاهان است. چگالی در همه‌ی حالت‌ها را ρ بگیرید. مساحت S را به عنوان تابعی از M جرم موجود، ρ و t به دست آورید.

د- اگر شکلی ما بیش از یک مقیاس طول داشته باشد مثلاً یک بیضی‌گون یا یک مکعب مستطیل، در آن صورت آیا می‌توانید مساحت S را به عنوان تابعی از M جرم موجود به دست آورید. ه- اگر تمام موجودات عالم مقیاس‌شده‌ی یک شکل واحد بودند. در آن صورت در مورد تابعیت مساحت S برحسب M آن‌ها چه می‌توانستید بگویید.

۸.۱ چگالی بتون $\rho = 1250 \text{ kg/m}^3$ است و بیش‌ترین فشاری که می‌تواند تحمل کند تا خرد نشود $5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ است. بلندترین استوانه‌ای که از بتون می‌توان ساخت چه ارتفاعی دارد؟

۹.۱ الف- تعداد نفس کشیدن یک فرد بالغ در زمان استراحت تقریباً چند تا در دقیقه است؟ تعداد نفس‌های خود در چند دقیقه (مثلاً سه دقیقه) را بشمارید و از آن‌جا تعداد نفس‌های‌تان در یک دقیقه را به دست آورید.

ب- در هر بار تنفس تقریباً نیم لیتر هوا وارد ریه‌ها می‌شوند. ما روزانه تقریباً به چه مقدار هوا نیاز داریم؟ تقریباً 20% هوا اکسیژن است. همه‌ی اکسیژن موجود در دم در ریه‌ها جذب نمی‌شوند. در بازدم هنوز حدود 15% اکسیژن وجود دارد. از این‌جا مقدار اکسیژن مورد نیاز روزانه را تخمین بزنید.

۱۰.۱ الف - موجوداتی مواد غذایی را از طریق سطح پوستِ شان جذب می‌کنند. اگر آن‌ها را تقریباً به شکل کره بگیرد. بیش‌ترین مقدار غذایی که در واحدِ زمان از طریقِ واحدِ سطح پوست می‌توانند جذب می‌کنند α ، و کم‌ترین مقدار غذای لازم در واحدِ زمان برای واحدِ حجم چنین موجودی برای آن‌که زنده بماند، β است. بزرگ‌ترین موجود از این نوع که تقریباً کروی باشد، شعاعش تقریباً چه قدر است؟

ب - حشرات اکسیژن را از طریقِ سطحِ پوستِ شان جذب می‌کنند. حشرات را تقریباً به شکل کره بگیرد. بیش‌ترین مقدار اکسیژنی که در واحدِ زمان از طریقِ واحدِ سطحِ پوست می‌توانند جذب می‌کنند γ ، و کم‌ترین مقدار اکسیژن لازم در واحدِ زمان برای واحدِ حجم یک حشره برای آن‌که زنده بماند، δ است. بزرگ‌ترین حشره‌ی تقریباً کروی شعاعش تقریباً چه قدر است؟

۱۱.۱ بر اساس مشاهده، این واقعیت‌های تقریبی در مورد پستان‌داران دیده شده. تعدادِ ضربانِ قلبِ همه‌ی پستان‌داران طی‌ی کلِ عمرشان یک‌سان است. تعدادِ ضربان بر واحدِ زمان با جرم آن به توان $-\frac{1}{4}$ متناسب است.

الف - جرمِ والِ آبی 200 تن و جرمِ یک پستان‌دارِ بسیار کوچک 2 گرم است. نسبتِ عمرِ والِ آبی به عمرِ آن پستان‌دارِ تقریباً چه قدر است؟

ب - عمرِ متوسطِ شیر ۱۰ سال و وزنِ متوسطِ آن حدود ۲۰۰ کیلوگرم است. عمرِ متوسطِ والِ تقریباً چه قدر است؟

۱۲.۱ جرمِ تخمِ شترمرغِ بین 1 kg تا 1.5 kg است، بین 20 تا 30 برابرِ جرمِ یک تخمِ مرغ، یعنی حدودِ یک شانه تخم مرغ.

الف - تخمِ شترمرغِ تقریباً مقیاس‌شده‌ی تخمِ مرغ است. شکلِ ۲.۱ را ببینید. ضریبِ مقیاسِ اندازه‌ی آن نسبت به تخمِ مرغِ چه قدر است؟

ب - برای بررسی‌ی کمی‌ی فرآیندِ پختنِ آن‌ها باید از معادله‌ی حرارت استفاده کرد.

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 T(\mathbf{r}, t).$$

پارامتری که در این معادله وارد می‌شود D با بُعدِ $L^2 T^{-1}$ است. با فرضِ این‌که موادِ تشکیل‌دهنده‌ی تخمِ مرغ و تخمِ شترمرغ مثل هم باشد و فقط اندازه‌ی یکی مقیاس شده



شکل ۲۰۱ شکل مسئله‌ی ۱۲۰۱

دیگری باشد، پارامتر D برای هر دو یکی است. با استفاده از تحلیل ابعادی چه چیزی در مورد زمان پختن تخم شتر مرغ می‌توانید بگویید؟^۱ زمان پختن تخم مرغ را حدود ۱۰ دقیقه بگیرید.

سوخت و ساز

۱.۲ سوخت و ساز

ما قوانین فیزیک را جهان‌شمول فرض می‌کنیم، بنابراین انتظار داریم همه‌ی طبیعت از قوانین یکسانی تبعیت کنند و اندام‌های زنده هم مثل مواد دیگر تابع قوانین فیزیک باشند. بیوفیزیک مطالعه‌ی فیزیک حاکم بر فرآیندهای زیستی است. مثلاً انتظار نداریم که پایداری انرژی نقض شود یا انرژی‌ی یک دستگاه منفرد کاهش پیدا کند. یکی از مشخصه‌های موجودات زنده این است که ساختارهایی پیچیده دارند. آنها می‌توانند رشد کنند و تکثیر شوند. وقتی موجود زنده‌ای رشد می‌کند، گاهی اندام‌ها رشد می‌کنند یا اندام‌های جدیدی ساخته می‌شوند. بخش‌های ساخته‌شده، از ذراتی که منظم کنار هم نشسته‌اند تشکیل شده است. انرژی باید پایسته بماند، اما چون موجودات زنده برای رشد به غذا نیاز دارند، باید شار انرژی از بیرون موجود زنده به درون آن داشته باشیم. رشد یا ایجاد اندام‌های جدید، علی‌الاصول می‌تواند باعث کاهش انرژی در این بخش از سیستم شود. موجودات زنده می‌توانند تولید مثل کنند و در این فرآیند اطلاعاتی به نسل‌های بعدی منتقل کنند. این فرآیند هم می‌تواند متناظر با تولید انرژی شود.

در مورد هر مسئله‌ی زیستی زیست‌شناس‌ها سوال‌های مهمی مطرح می‌کنند. اما روش‌ها و نوع نگاه فیزیک‌پیشه‌ها به همان موجود زنده معمولاً متفاوت است. فیزیک‌پیشه‌ها ممکن است با

استفاده از روش‌های مرسوم در فیزیک بتوانند به بعضی از سوال‌های زیست‌شناس‌ها پاسخ دهند. ولی کار دیگری که معمولاً می‌کنند، این است که از منظری دیگر سوال‌های جدیدی مطرح کنند و سعی کنند به آن سوال‌ها پاسخ دهند. احتمالاً این پاسخ‌ها به کار زیست‌شناسان می‌آید.

هر موجود زنده برای انجام فعالیت‌های حیاتی مثل تولید مثل، ساختن اندام‌ها و بافت‌های جدید، انتقال اطلاعات و خلاصه زنده ماندن انرژی لازم دارد. متابولیسم^۱ یا سوخت و ساز مجموعه‌ای لازم از واکنش‌های شیمیایی برای زنده ماندن موجودات زنده است. به سوخت و ساز یک عدد نسبت می‌دهیم که واحد آن توان یا انرژی بر واحد زمان است. وقتی انسان در حال استراحت است و هیچ کاری هم انجام نمی‌دهد سوخت و ساز کمینه یا میزان سوخت و ساز پایه‌ای^۲ لازم دارد که به اختصار BMR نامیده می‌شود. برای بدن انسان این مقدار حدود 80 W است، یعنی چیزی به اندازه‌ی یک لامپ ۸۰ وات. این توان حدوداً 70 kcal/h است. ما این مقدار پایه را با Γ_0 نمایش می‌دهیم. سوخت و ساز هر فرد بسته به فعالیت، معمولاً تا چندین برابر این مقدار است. معمولاً در این موارد به جای ژول به عنوان واحد انرژی یا وات (ژول بر ثانیه) به عنوان واحد توان، از کالری یا کیلو کالری به عنوان واحد انرژی و کیلو کالری بر ساعت به عنوان واحد توان استفاده می‌شود. برای بدن انسان عدد بالا حدوداً

(۱.۲)

$$\Gamma_0 = 1 \text{ BMR} = 70 \text{ kcal/h} = 70 \times 1000 \frac{\text{cal}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ sec}} \times \frac{4.18 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \approx 80 \text{ W}$$

است. این عدد معرف توان لازم برای انجام فعالیت‌های حیاتی مانند تنفس و گردش خون است. این مقدار تقریبی است و برای یک فرد با قد و وزن متوسط است. این کمیت برای مردان و زنان کمی فرق می‌کند. اگر کسی بلند قد باشد، این عدد کمی بزرگ‌تر می‌شود. افراد لاغر قد بلند نسبت به افراد هم‌وزن خود ولی با قد کوتاه‌تر به دلیل این‌که سطح پوست‌شان بیش‌تر است، BMR یا سوخت و ساز پایه‌ی بزرگ‌تری دارند. چرا؟ برای سادگی بدن آن دو نفر را با مدلی مکعب مستطیلی به ابعاد (a, b, h) و (a', b', h') ($a' := \alpha a$, $b' := \alpha b$, $h' := \alpha h$) همانند می‌کنیم. فرض کنید این دو نفر هم‌وزن هستند. با فرض این‌که چگالی‌شان نزدیک چگالی آب است، حجم بدن‌شان

تقریباً باید برابر باشد.

$$hab = h'a'b' = \alpha^2 h'ab, \Rightarrow \alpha^2 = \frac{h}{h'}. \quad (۲.۲)$$

نسبتِ سطحِ بدنِ شان

$$\frac{S}{S'} = \frac{2ab + 2(a+b)h}{2a'b' + 2(a'+b')h'} \quad (۳.۲)$$

برای فردی که قدش $h = 180$ cm و وزنش $w = 80$ kg است، با توجه به این که چگالیِ بدنِ انسان حدودِ چگالیِ آب $\rho \approx 1 \text{ g cm}^{-3} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ است

$$ab = \frac{w}{h\rho} = \frac{4000}{9} \text{ cm}^2 \quad (۴.۲)$$

و فردی که قدش $h' = 160$ cm و وزنش همان $w = 80$ kg است،

$$a'b' = \frac{w}{h'\rho} = 500 \text{ cm}^2, \quad (۵.۲)$$

در این صورت

$$\alpha = \sqrt{\frac{a'b'}{ab}} = \sqrt{\frac{45}{40}} \approx 1.06. \quad (۶.۲)$$

فرضِ زیر با این مقدارِ α سازگارند

$$a = 50 \text{ cm}, \quad b = 10 \text{ cm}, \quad (۷.۲)$$

$$a' = 53 \text{ cm}, \quad b' = 10.6 \text{ cm}. \quad (۸.۲)$$

و نسبتِ سطحِ ها

$$\frac{S}{S'} = \frac{2ab + 2(a+b)h}{2a'b' + 2(a'+b')h'} \approx 1.05. \quad (۹.۲)$$

یعنی فردِ بلندترِ سطحِ پوستِ بیش‌تری دارد. انتقالِ حرارتِ بدن از طریقِ سطحِ پوست است. هرچه سطحِ پوستِ بیش‌تر باشد، در دمایِ متعارفِ اتاق، ثابت‌نگه داشتنِ دمایِ بدن در ۳۷ درجه

سخت‌تر است و انرژی‌ی بیش‌تری لازم دارد. البته همه‌ی این‌ها با این فرض بود که تمام شرایطِ دیگرشان مثلِ فعالیتِ بدنی، سن، و ... یک‌سان باشد. توجه داشته باشید که در این‌جا ما تخمینی از سطح پوست هم زدیم. برای فردِ بلندتر این سطح

$$S = 2ab + 2(a + b)h \approx 2.26 \text{ m}^2 \quad (۱۰.۲)$$

و برای کوتاه‌تر $S' \approx 2.15 \text{ m}^2$ است. توجه داشته باشید که در هر دو مورد سطح بدن انسان به تقریب 2 m^2 است. یک بازی‌کن فوتبال در حین بازی مقدار زیادی عرق می‌کند. اگر فرض کنیم مقداری که یک بازی‌کن عرق کرده است، تقریباً معادل با لایه‌ای از عرق به ضخامت متوسطِ 1 mm باشد، مقداری که عرق کرده حجمش تقریباً 2 lit است، یعنی تقریباً 2 kg . معمولاً در باشگاه‌های مدرن فوتبال بازی‌کنان را قبل و بعد از بازی وزن می‌کنند. اگر در طی بازی آب نخورند حدود 2 kg وزن کم می‌کنند.

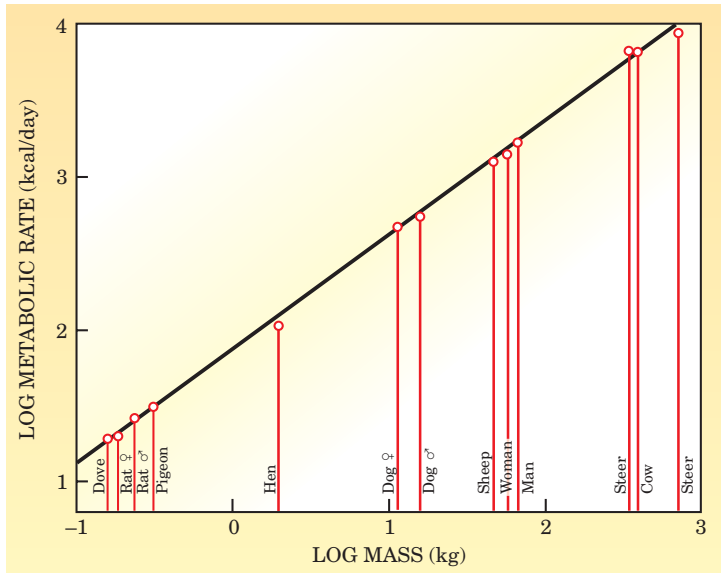
میزان سوخت و ساز در هنگام خواب کاهش و هنگام ورزش افزایش می‌یابد. افرادی که مرتب ورزش می‌کنند، نسبت به افراد کم‌تحرك، سوخت و ساز پایه بزرگ‌تری دارند. سوخت و ساز بدن هر کسی متفاوت است. در واقع عوامل بسیاری بر سوخت و ساز بدن اثر می‌گذارد. با افزایش سن سوخت و ساز کند می‌شود. افرادی که مشکل تیروئید دارند، سوخت و سازشان مختل می‌شود. افرادی که پرکاری تیروئید دارند سوخت و سازشان بیش‌تر می‌شود و بنابراین لاغر می‌شوند و بر عکس کسانی که دچار کم‌کاری تیروئید می‌شوند، چاق می‌شوند. بدن خانم‌های باردار سوخت و ساز بیش‌تری دارد. افرادی که بدنی عضلانی و چربی‌ی کم‌تری دارند، بدنشان سوخت و ساز بیش‌تری دارد.

برای پرندگان و پستانداران رابطه‌ی بین سوخت و ساز پایه بر حسب جرم وجود دارد، که قانونِ کلاپر^۱

$$\Gamma_0 = CM^b \quad (۱۱.۲)$$

است. شکل (۱۰.۲) را ببینید. محورهای افقی و عمودی لگاریتمی هستند و شیب به‌ترین خطی که از داده‌ها عبور می‌کند، حدود 0.74 است. پس نمای b حدوداً $3/4$ است. ضریب C را با

^۱kleiber's law



شکل ۱.۲ سوخت و ساز پایه برای موجودات با جرم‌های مختلف - قانون مقیاسی کلایپر Life's universal scaling laws Physics today, 2004

استفاده از داده‌های مربوط به سوخت و ساز انسان می‌توانیم به دست آوریم. ضریب تناسب تقریباً

$$C = \frac{70 \times 24}{80^{3/4}} \approx 63 \frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{kg}^{3/4}} \quad (۱۲.۲)$$

است. مقدار سوخت و ساز در اندام‌های مختلف بدن انسان مختلف است. مثلاً

- قلب حدود ۸ درصد
- کلیه حدود ۸ درصد
- کبد حدود ۲۱ درصد
- مغز حدود ۲۰ درصد
- عضلات حدود ۲۱ درصد
- دستگاه هاضمه حدود ۱۰ درصد
- باقی بدن حدود ۱۲ درصد

همان‌طور که می‌بینیم مغز با آن‌که حدود ۲ درصد وزن بدن است، مسئول حدود ۲۰ درصد سوخت

و سازِ بدن است. هرچه فعالیتِ بیش‌تر شود مصرفِ اکسیژنِ بیش‌تر و منجر به سوخت و سازِ بیش‌تر می‌شود. سوخت و سازِ پایه‌ی بدن حدود 1700 kcal در روز است. اما با فعالیتِ بدنیِ بیش‌تر سوخت و سازِ واقعی چند برابر بزرگ‌تر می‌شود. مثلاً فردی با فعالیتِ کم، سوخت و سازش

$$70 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \times 12 \text{ h} + 150 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \times 12 \text{ h} \approx 2600 \frac{\text{kcal}}{\text{day}} \quad (۱۳.۲)$$

و فردی با فعالیتِ سنگین حدوداً

$$70 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \times 12 \text{ h} + 450 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \times 12 \text{ h} \approx 6200 \frac{\text{kcal}}{\text{day}} \quad (۱۴.۲)$$

سوخت و ساز دارد. برای انجامِ هر فعالیتی از جمله خوابیدن مقداری انرژی لازم است. توجه داشته باشید حتی موقعی که خوابیم اندام‌های حیاتی مثل قلب و تا حدی مغز مشغولند.

یک استاندارد برای برآوردِ مصرفِ انرژی در طول فعالیتِ بدنی استفاده از MET^۱ یا سوخت‌وسازِ معادل است. 1 MET نمایانگر سوخت‌وسازِ فردی است که آرام جایی نشسته است. یک فرد بالغ که با سرعتِ 3 Km/h روی یک سطح صاف قدم می‌زند، در حدودِ 2 MET است، یعنی انرژی‌ای که در واحدِ زمان می‌سوزاند دو برابر انرژی‌ای است که در حالتِ استراحت است. اگر روی همان سطح با سرعتِ 8 Km/h بدود، تقریباً 8 MET مصرفِ انرژی دارد. در جدول (۲.۲) انرژیِ مصرفیِ نوعیِ یک نفر به ازای بعضی فعالیت‌ها آمده است.

موجودات با مصرفِ غذا انرژی را می‌گیرند و بخشی را به صورت گرما به محیط پس می‌دهند. مثلاً گیاهان فوتون‌های خورشید را با نورساخت^۲ (یا فوتوسنتز) می‌گیرند و به صورت تابش حرارتی (فروسرخ) به محیط پس می‌دهند. آیا نمی‌توانند همه‌ی انرژی را مصرف و به کار تبدیل کنند؟ در واقع پاسخ این است که نه. بخشی از انرژی یا همان انرژیِ آزاد بخشی است که در دست‌رس آن‌هاست. همه‌ی موجودات زنده انرژیِ خود را مستقیم یا غیر مستقیم از نور خورشید می‌گیرند. تنها گیاهان سبز هستند که می‌توانند نور خورشید را مستقیماً به کار گیرند و در فرآیندِ نورساخت با کمک مواد اولیه‌ی ساده‌ای مانند دی‌اکسید کربن، آب و آمونیاک ترکیبات سلولی به وجود آورند. قسمت اعظم موجودات دیگر محصولات حاصل از نور ساخت را به صورت

photosynthesis^۱ Metabolic Equivalent Task^۱

| Light <3.0 METs | Moderate 3.0 – 6.0 METs | Vigorous >6.0 METs |
|---|--|--|
| Walking Walking slowly around home, store or office = 2.0* | Walking Walking 3.0 mph = 3.3* Walking at very brisk pace (4 mph) = 5.0* | Walking, jogging & running Walking at very brisk pace (4.5 mph) = 6.3* Walking/hiking at moderate pace and grade with no or light pack (<10 lb) = 7.0 Hiking at steep grades and pack 10–42 lb = 7.5–9.0 Jogging at 5 mph = 8.0* Jogging at 6 mph = 10.0* Running at 7 mph = 11.5* |
| Household & occupation Sitting — using computer work at desk using light hand tools = 1.5 Standing performing light work such as making bed, washing dishes, ironing, preparing food or store clerk = 2.0–2.5 | Cleaning — heavy: washing windows, car, clean garage = 3.0 Sweeping floors or carpet, vacuuming, mopping = 3.0–3.5 Carpentry — general = 3.6 Carrying & stacking wood = 5.5 Mowing lawn — walk power mower = 5.5 | Shoveling sand, coal, etc. = 7.0 Carrying heavy loads such as bricks = 7.5 Heavy farming such as baling hay = 8.0 Shoveling, digging ditches = 8.5 |
| Leisure time & sports Arts & crafts, playing cards = 1.5 Billiards = 2.5 Boating — power = 2.5 Croquet = 2.5 Darts = 2.5 Fishing — sitting = 2.5 Playing most musical instruments = 2.0–2.5 | Badminton — recreational = 4.5 Basketball — shooting around = 4.5 Bicycling — on flat: light effort (10–12 mph) = 6.0 Dancing — ballroom slow = 3.0; ballroom fast = 4.5 Fishing from river bank & walking = 4.0 Golf — walking pulling clubs = 4.3 Sailing boat, wind surfing = 3.0 Swimming leisurely = 6.0† Table tennis = 4.0 Tennis doubles = 5.0 Volleyball — noncompetitive = 3.0–4.0 | Basketball game = 8.0 Bicycling — on flat: moderate effort (12–14 mph) = 8.0; fast (14–16 mph) = 10 Skiing cross country — slow (2.5 mph) = 7.0; fast (5.0–7.9 mph) = 9.0 Soccer — casual = 7.0; competitive = 10.0 Swimming — moderate/hard = 8–11† Tennis singles = 8.0 Volleyball — competitive at gym or beach = 8.0 |

شکل ۲.۲ انواع فعالیت‌های بدنی و سوخت و ساز معادل آن

غذا استفاده می‌کنند. یعنی یا گیاهان را می‌خورند، یا موجوداتی را می‌خورند که با گیاهان تغذیه می‌شوند.

۲.۲ مواد غذایی

در هر لحظه تعداد بسیار زیادی واکنش شیمیایی در بدن انجام می‌شود. در بعضی از آن‌ها مولکول‌هایی تجزیه می‌شوند و مقداری انرژی آزاد می‌شود. گاهی هم مولکول‌های جدیدی ممکن است تشکیل شوند. در حین انجام این واکنش‌های شیمیایی دمای بدن انسان، در حدود 37 درجه سانتی‌گراد ثابت می‌ماند. مواد غذایی عمدتاً به سه دسته کربوهیدرات، پروتئین و چربی تقسیم می‌شوند. البته هر ماده‌ی غذایی ممکن است ترکیبی متفاوت از کربوهیدرات‌ها، چربی و پروتئین‌ها باشد.

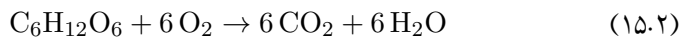
همه‌ی واکنش‌های انرژی‌زا در بدن انسان به میزان مصرف اکسیژن بستگی دارند و با سوخت و ساز بدن CO_2 و بخار آب آزاد می‌شود. با هر دم و بازدم نسبت اکسیژن و CO_2 در محیط اطراف مانع عوض می‌شود. به همین دلیل است که وقتی در یک محیط در بسته که تعدادی در آن محیط نفس می‌کشند هستیم، پس از مدتی احتیاج به هوای تازه داریم. بهره‌ی تنفسی^۱ که با RQ نمایش داده می‌شود با نسبت CO_2 ی تولیدشده به O_2 ی مصرف‌شده تعریف می‌شود. در بخش‌های بعد با این سه دسته ماده‌ی غذایی بیشتر آشنا می‌شویم. در ضمن برای هر کدام از این‌ها RQ را نیز به دست می‌آوریم.

۱.۲.۲ کربوهیدرات

کربوهیدرات‌ها (هیدرات‌های کربن یا مواد قندی) از اتم‌های کربن، هیدروژن و اکسیژن تشکیل شده‌اند. کربوهیدرات‌ها در بدن بیشتر به عنوان مولکول‌های ذخیره‌کننده انرژی عمل می‌کنند. کربوهیدرات‌ها موادی هستند که در مولکول‌هایشان، نسبت اتم‌های هیدروژن به اکسیژن ۲ به ۱ است، مثلاً با فرمول شیمیایی $C_x(H_2O)_x$. مولکول‌های کربوهیدرات‌ها، طیف وسیعی از مولکول‌های بسیار ساده (مانند شکر سفید) تا مولکول‌های پیچیده و بزرگ (مثل نشاسته) را

^۱respiratory quotient

شامل می‌شوند. نان و شکر، منابع سرشار از کربوهیدرات هستند. در سوختن هر گرم گلوکز 3.7 Cal (یا 3.7 kcal) و در سوختن هر گرم نشاسته 4.2 Cal انرژی آزاد می‌شود. گلوکز به همراه فروکتوز، و گالاکتوز با فرمول شیمیایی یکسان $C_6H_{12}O_6$ قندهای ساده هستند. تفاوت این قندها در ساختار فضایی‌شان، یا به تعبیری ایزومرهای مختلف‌شان، است. یعنی تعداد اتم‌های مختلف‌شان یکی است ولی موقعیت نسبی اتم‌ها متفاوت است. کربوهیدرات‌ها منبع اصلی سوخت بدن ما هستند. بدن ما نشاسته را به قند تبدیل می‌کند و آن را به کمک جریان خون جذب می‌کند و گلوکز می‌سازد. کربوهیدرات‌ها به انرژی‌ای که بدن و مغز ما برای فعالیت‌هایش نیاز دارد، تبدیل می‌شوند. گلوکز به صورت زیر می‌سوزد (اکسید می‌شود).

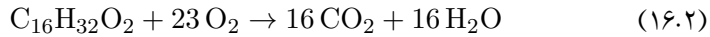


بنابراین برای گلوکز که یک کربوهیدرات است، $RQ_{\text{glucose}} = 1$ است. توجه داشته باشید که در کربوهیدرات‌های هیدروژن دو برابر اتم‌های اکسیژن هستند. علاوه بر این همان‌طور که در فرآیند شیمیایی (۱۵.۲) می‌بینیم، یک مول $C_6H_{12}O_6$ (یعنی حدود 180 g گلوکز) با 6 مول O_2 (با حدود 192 g مولکول اکسیژن) ترکیب می‌شود. پس برای سوزاندن مقداری کربوهیدرات تقریباً همان مقدار اکسیژن لازم داریم. قندهای ساده مستقیماً جذب خون می‌شوند و لازم نیست در بدن هضم شوند. گلوکز قند خون است. بعضی از میوه‌های شیرین، هم گلوکز دارند و هم حاوی نوع دیگری از قند به نام فروکتوز هستند. در سیب فروکتوز تقریباً دو برابر گلوکز و در خرما تقریباً برابرند. عسل هم گلوکز و هم فروکتوز دارد. فروکتوز شیرین‌ترین کربوهیدرات طبیعی است. قندهای پیچیده‌تر هم هستند. نشاسته کربوهیدرات ذخیره‌ای در گیاهان (سیب زمینی، نان، برنج و ...) است که از بهم پیوستن قندهای ساده ساخته می‌شود. نشاسته پس از گوارش در بدن به قندی‌های ساده (گلوکز، فروکتوز و گالاکتوز) تبدیل می‌شود.

۲.۲.۲ چربی

چربی‌ها در مقایسه با کربوهیدرات‌ها، نسبت به کربن و هیدروژن اتم‌های اکسیژن کم‌تری دارند. بنابراین برای سوختن چربی‌ها اکسیژن بیش‌تری لازم است. پالمیتیک اسید با فرمول $C_{16}H_{32}O_2$

به صورت زیر می سوزد (اکسید می شود).



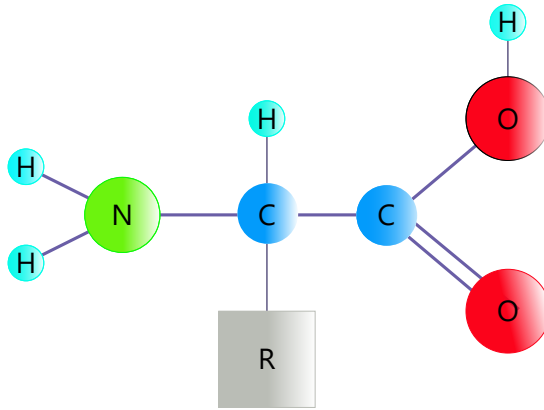
بنابراین برای پالمیتیک اسید

$$RQ_{\text{Palmitic acid}} = \frac{16}{23} \approx 0.7 \quad (۱۷.۲)$$

است. هرچند نام این چربی از پالم یا همان نخل گرفته شده و چربی‌ی روغن نخل است ولی این ترکیب شیمیایی در بسیاری از جانوران، گیاهان، باکتریها و میکرو-ارگانیسمها یافت می شود. کربوهیدرات‌های اضافی در بدن به پالمیتیک اسید تبدیل می شوند. چربی‌ها مولکول‌هایی نسبتاً کوچک شامل کربن، هیدروژن و اکسیژن تشکیل هستند. انرژی حاصل از سوختن چربی بستگی به ساختار مولکولی آن دارد و برای چربی‌ی گوشت، ماهی یا کره مقدار آن کمی متفاوت است ولی به طور متوسط در سوختن هر گرم چربی حدود 9.4 kcal انرژی آزاد می شود.

۳.۲.۲ پروتئین

پروتئین‌ها، مولکول‌های بسیار بزرگ شامل کربن، هیدروژن، اکسیژن و نیتروژن هستند. پروتئین ساختاری سه بعدی از اتم‌ها در زنجیره‌ای از آمینواسیدها یا اسیدهای آمینه است. آمینواسیدها در فرآیندی مولکول آب را از دست می دهند و به هم می چسبند. در واقع آمینواسیدها، اجزای سازنده یا حروف الفبای پروتئین‌ها هستند. چون امکانات فراوانی برای زنجیره‌ای از آمینواسیدها وجود دارد، انواع بی شماری از پروتئینها نیز می توانند وجود داشته باشند. عناصر اصلی‌ی یک اسید آمینه کربن (C)، هیدروژن (H)، اکسیژن (O) و نیتروژن (N) است، اگرچه عناصر دیگر در زنجیره‌های جانبی اسیدهای آمینه خاص یافت می شوند. آمینواسیدها ترکیباتی آلی از گروه‌های آمین ($-NH_2$) و کربوکسیل ($-COOH$) به همراه یک زنجیره جانبی‌ی ویژه (R) برای هر اسید آمینه هستند. شکل (۳.۲) را ببینید. حدود 500 اسید آمینه که به طور طبیعی وجود دارند شناخته شده‌اند، گرچه به دلایلی ناشناخته تنها 20 تای آن‌ها در ژنوم انسان وجود دارد. از این 20 تا 9 تایشان برای بدن ضروری هستند به این معنی که بدن انسان قادر به تولید آن‌ها نیست و باید از طریق غذا تامین شوند. 20% بدن انسان از پروتئین تشکیل شده است. پروتئین‌ها نقشی



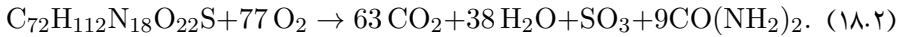
شکل ۳.۲ ساختار یک نوع آمینو اسید

اساسی در تقریباً تمام فرآیندهای بیولوژیکی دارند.

دو عامل در انرژی آزاد شده در پروتئین‌ها نقش دارند. اول نوع پروتئین در غذا و دوم مقدار نسبی نیتروژن در آن است. این مولکول‌ها برای ساخت و ترمیم بافت‌های بدن، نقش مهمی دارند. پروتئین‌ها از بلوک‌های ساختمانی کوچک‌تری به نام آمینواسیدها ساخته شده‌اند. بدن برای رشد و ترمیم خود به پروتئین نیاز اساسی دارد. غذاهایی که پروتئین زیادی دارند، مثل لبنیات، گوشت، تخم‌مرغ، ماهی، و لوبیا در معده هضم و به آمینواسید تبدیل می‌شوند، و در روده کوچک جذب می‌شوند. در ادامه وظیفه کبد است که تصمیم بگیرد که کدام یک از این اسیدها برای بدن الزامی است. هر چه باقی بماند از طریق ادرار دفع می‌شود. به بزرگسالانی که فعالیت خاصی ندارند توصیه می‌شود که روزانه به ازای هر کیلوگرم وزن حدود 0.75 گرم پروتئین مصرف کنند. اگر میانگین بگیریم، سهم مردها به طور میانگین 55 گرم و برای زن‌ها 45 گرم می‌شود که حدود دو مشت گوشت، ماهی، دانه‌های مختلف است. پروتئین‌هایی مثل گوشت، تخم‌مرغ، ذرت و لوبیا 16% نیتروژن و انرژی 5.75 kcal در هر گرم دارند. آجیل‌ها نیتروژن بیشتری حدود 19% دارند. به طور متوسط در سوختن هر گرم پروتئین حدود 5.65 kcal انرژی آزاد می‌شود.

سوختن پروتئین‌ها پیچیده‌تر است. سولفور و نیتروژن آن‌ها از طریق تعرق، ادرار و مدفوع از بدن دفع می‌شوند. پروتئین اصلی خون آلبومین است. آلبومین اکسید می‌شود. مثلاً اکسید شدن

پروتئین در واکنش زیر



بنابراین برای آلبومین

$$RQ_{Albumin} = \frac{63}{77} \approx 0.8 \quad (۱۹.۲)$$

است.

۴.۲.۲ دخل و خرج انرژی

از این اعداد نتیجه می‌شود به طور متوسط در سوختن هر گرم چربی حدود 65% بیش‌تر از یک گرم پروتئین و 120% بیش‌تر از یک گرم کربوهیدرات انرژی آزاد می‌شود. بنابراین غذاهای پرچرب نسبت به غذاهای کم‌چرب انرژی‌ی بیش‌تری دارند. یک لیوان شیر پرچرب حدود 150 kcal و شیر کم‌چرب حدود 100 kcal انرژی دارد. اگر روزی یک لیوان شیر می‌خورید، اختلاف انرژی‌ای که از شیر پرچرب در یک سال به بدن‌تان می‌رسد، معادل انرژی‌ی جذب‌شده از طریق خوردن تقریباً 2 کیلوگرم چربی است. همان‌طور که دیدیم سوخت و ساز بدن در خواب حدود 80 kcal در ساعت است. بعد از یک خواب 10 ساعته 800 kcal انرژی مصرف می‌شود. برای جبران این انرژی اگر یک صبحانه ساده مثلاً با 400 kcal بخوریم، بقیه انرژی‌ی مصرف‌شده باید از جایی مثلاً چربی‌ی بدن بیاید. چون هر گرم چربی تقریباً 9.4 kcal است، تقریباً 43 g از چربی‌ی بدن مصرف می‌شود. اگر صبحانه‌ی مفصلی مثلاً با 1500 kcal بخوریم، تقریباً 74 g جذب بدن می‌شود.

با محاسبه‌ای ساده می‌توان برای کم کردن یا اضافه کردن وزن، یک رژیم غذایی برنامه‌ریزی کرد. بدیهی است در یک رژیم غذایی مناسب باید نیازهای اساسی بدن را در نظر گرفت، ولی ما می‌خواهیم فقط با محاسبه‌ی انرژی در این مورد برنامه‌ریزی کنیم. علاوه بر این باید اطلاعات دقیق‌تری در مورد اندازه‌ی سوخت‌وساز بدن‌مان داشته باشیم. برای یک فرد عادی اگر مصرف روزانه‌اش تقریباً 3700 kcal باشد، با مصرف روزانه 2000 kcal روزی 1700 kcal کم می‌آورد که در 2 ماه تقریباً معادل انرژی ناشی از سوختن 10 kg از چربی بدن است.

راه دیگر برای کم کردن وزن به جای دریافت انرژی کم تر، افزایش انرژی مصرفی روزانه است. فرض کنید کسی می خواهد با روزی 1 ساعت دوچرخه سواری وزن کم کند. بسته به این که وزن آن فرد چه قدر باشد و با چه سرعتی دوچرخه براند و این که جاده تخت باشد یا سربالایی، میزان مصرف انرژی فرق می کند. اگر به ازای هر ساعت حدود 600 kcal انرژی مصرف کند. برای کم کردن 10 kg حدود

$$\frac{9.4 \times 10 \times 1000}{600} \approx 160 \quad (۲۰.۲)$$

روز لازم است. بعضی وقت ها افرادی را می بینیم که می گویند من کم تر می خورم ولی وزنم کم نمی شود. آیا این ممکن است؟ چند اتفاق ممکن است رخ داده باشد.

- یکی این است که فرد ظاهراً در وعده های غذایی اش کم تر غذا می خورد ولی واقعا انرژی ورودی کم تر نشده است. اصطلاحاً می گوئیم آن شخص خرده چرانی می کند. غذای کم تری خورده ولی بین وعده ها و در فرصت های مختلف ورودی انرژی داشته است. بنابراین در محاسبه انرژی ورودی باید همه واحدهای غذایی مصرفی محاسبه شود.

- گاهی ورودی انرژی را واقعاً کم می کنیم ولی از آن طرف مصرف انرژی یا تحرک را هم کم کرده ایم. نشنیده اید که می گوید ضعف کرده ام و سعی می کند بیش تر استراحت کند.
- مواقعی هم هست که خود بدن روشی دفاعی می گیرد. مثلاً دمای بدن کمی کاهش می یابد. احتمالاً کسانی را دیده اید که وقتی احساس ضعف می کند می گوید بدنم یخ کرده است. بخشی از انرژی مصرفی به خاطر این است که دمای بدن را 37 درجه سانتی گراد ثابت نگه داریم. اگر دمای بدن کمی کم تر باشد، انرژی مصرفی هم کمی کم تر شده است.

گاهی در رژیم های غذایی از شیرین کننده های کم کالری استفاده می شود. سوکرالوز^۱ با فرمول شیمیایی C₁₂H₁₉Cl₃O₈ یک شیرین کننده مصنوعی و شیرین کننده ای است که حدوداً 600 بار شیرین تر از شکر است. جایگزینی 3 اتم کلر باعث می شود که سوکرالوز مانند شکر قابلیت شکستن و مشارکت در سوخت و ساز را ندارد. بنابراین بدون جذب شدن (حتی اگر جذب هم

^۱ Sucralose

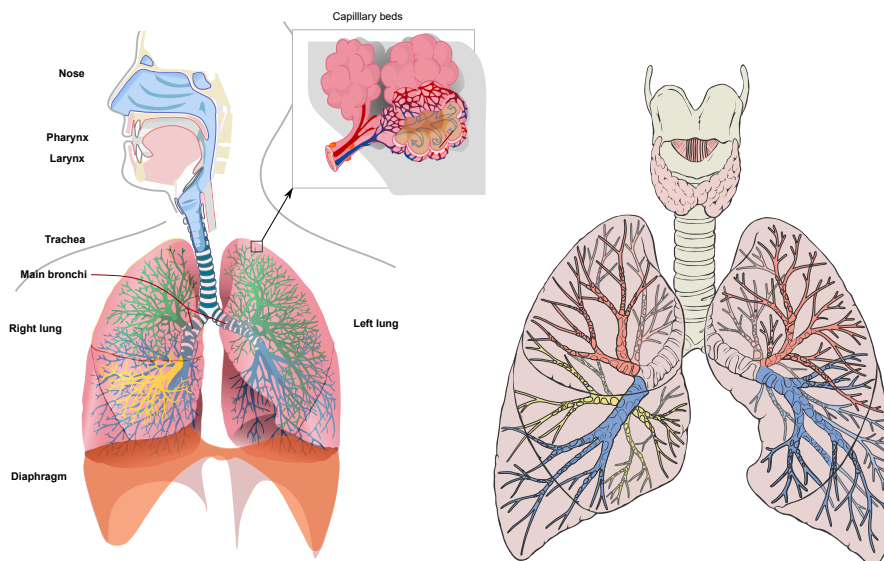
شود آن قدر مقدارش کم است که انرژی تولیدی آن قابل چشم‌پوشی است) و یا تغییر از بدن دفع می‌شود. تا کنون عارضه‌ی جانبی برای سلامتی‌ی انسان نداشته است. شیرین‌کننده‌های مصنوعی یا طبیعی‌ی دیگری هم وجود دارند که آن‌ها هم بسیار کم‌کالری هستند، مثل ساخارین^۱، آسپارتام^۲، که مصنوعی هستند و استویا^۳ که طبیعی است.

۳.۲ تنفس - اکسیژن

موجودات زنده برای سوخت و ساز نیاز به اکسیژن دارند. گیاهان اکسیژن را از طریق برگ‌هایشان جذب می‌کنند و بعضی از حیوانات مثلاً حشرات اکسیژن مورد نیاز خود را از طریق پوست‌شان جذب می‌کنند. تعدادی از موجودات برای جذب اکسیژن یک سیستم تنفسی دارند. ماهی‌ها نوعاً آب‌شش دارند و موجودات دیگر مثل انسان‌ها از شش‌ها برای جذب اکسیژن استفاده می‌کنند^۴. گیاهان فقط در طول شب اکسیژن مصرف می‌کنند، در روشنایی روز در فرآیند فتوسنتز اکسیژن آزاد می‌کنند. در این چرخه جذب شبانه‌ی اکسیژن و فتوسنتز روزانه میزان اکسیژن هواتقریباً ثابت می‌ماند. انسان ممکن است بدون غذا تا یک ماه و بدون آب تا حدود یک هفته زنده بماند اما اگر حدود پنج دقیقه اکسیژن به انسان نرسد احتمالاً دچار مرگ مغزی می‌شود. در واقع در این چند دقیقه دی‌اکسید کربن خون بالا می‌رود

شش یا ریه، بخش اصلی‌ی دستگاه تنفسی در انسان و بسیاری از جانداران است. بخش‌هایی از فرآیند تنفس دم^۵ و بازدم^۶ است. بخش دیگری از آن که گاهی به آن تنفس داخلی هم گفته می‌شود شامل تبادل اکسیژن و دی‌اکسید کربن بین خون و سلول‌های بدن است. به کل این فرآیند یعنی جذب اکسیژن از بیرون و فرستادن دی‌اکسید کربن به خارج از بدن تنفس^۷ می‌گوییم. راه هوایی برای تنفس، یعنی راهی برای انتقال هوا از بیرون تا ریه‌ها، شامل بینی، دهان، حلق^۸، حنجره^۹، نای^{۱۰}، برونش‌ها^{۱۱} (نای‌ژه‌ها) و برونشیل‌ها^{۱۲} (نای‌ژک‌ها) است. انسان‌ها دو ریه دارند که درون سینه جای دارند. ریه‌ها بخشی از راه هوایی هستند. انسان هوا را با دم و از مسیر راه هوایی به داخل می‌کشد. نای‌ژک‌ها در ریه‌ها به گوی‌چه‌های هوایی‌ی کوچکی به نام کیسه

Sacharine¹ Aspartham² Stevia³ البته به غیر از چشم‌ها! قرنیه چشم اکسیژن را مستقیماً از هوا دریافت می‌کند. Inhale⁵ Exhale⁶ Respiration⁷ Pharynx⁸ Larynx⁹ Trachea¹⁰ Bronchioles¹² Bronchi¹¹



شکل ۴.۲ نمودار ریه‌های انسان با جزئیات داخلی و نمودار دستگاه تنفس

هوایی^۱ ختم می‌شوند. کیسه‌های هوایی دارای مویرگ‌های فراوانی هستند و تعویض اکسیژن هوا با دی‌اکسید کربن خون داخل این حفره‌ها انجام می‌شود. گلبول‌های قرمز خون اکسیژن را دریافت می‌کنند و به سلول‌های بدن می‌رسانند. هوا از طریق نای و نای‌ژه وارد ریه می‌شود. خون از طریق سرخرگ‌های ریوی وارد ریه شده و از طریق سیاه‌رگ ریوی خون اکسیژن‌دار خارج می‌شود. بیش‌تر حجم ریه را کیسه‌های هوایی بسیار کوچک یا حبابک‌ها پر کرده‌اند. فرایند تبادل اکسیژن و دی‌اکسید کربن در کیسه هوایی روی می‌دهد. دو ریه روی هم، نزدیک به ۲۴۰۰ کیلومتر راه هوایی و ۳۰۰ تا ۵۰۰ میلیون کیسه‌ی هوایی دارند.

تعداد نفس کشیدن یک فرد بالغ در زمان استراحت در دقیقه تقریباً چند تاست؟ تعداد نفس‌های خود در سه دقیقه را بشمارید. یک فرد سالم بزرگسال در حالت نشسته و بدون تحرک بدنی تقریباً بین ۱۲ تا ۲۰ بار (به طور متوسط حدود ۱۶ بار) در دقیقه نفس می‌کشد. تعداد متوسط نفس کشیدن برای مرد و زن یا کودک و بزرگسال فرق می‌کند. برای مردان به طور متوسط کم‌تر از زنان و برای بزرگسالان به طور متوسط بیش‌تر از کودکان است. یک کودک چند ماهه ممکن است تا حدود ۶۰ بار در دقیقه نفس بکشد. با بزرگ شدن به تدریج تعداد

تنفس در دقیقه کم می‌شود^۱. در هر بار تنفس تقریباً نیم لیتر هوا وارد ریه‌ها می‌شوند. بیابید تخمین بزنیم که ما روزانه تقریباً به چه مقدار هوا نیاز داریم. تقریباً 20% هوا اکسیژن است. البته همه‌ی اکسیژن موجود در دم در ریه‌ها جذب نمی‌شوند. در بازدم هنوز حدود 15% اکسیژن وجود دارد. از این‌جا می‌توانیم مقدار اکسیژن مورد نیاز روزانه را تخمین بزنیم. روزانه حدود $23 \times 10^3 \approx 24 \times 60 \times 16$ بار نفس می‌کشیم. در هر تنفس حدود نیم لیتر هوا وارد ریه‌ها شود. تقریباً 20% هوا اکسیژن است. اما همه‌ی اکسیژن موجود در دم در ریه‌ها جذب نمی‌شوند. پس اکسیژن جذب شده در ریه‌ها روزانه حدود

$$23 \times 10^3 \times 0.5 \times \frac{5}{100} \approx 600 \text{ lit}, \quad (21.2)$$

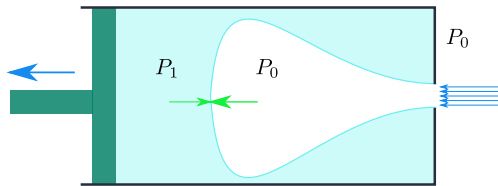
که حدود 0.8 kg و 25 mole است. میزان هوای روزانه‌ی مورد نیاز حدوداً 20 برابر این حجم یعنی حدود 10 m^3 است. دفع دی‌اکسید کربن و بخار آب روزانه هم حدود 25 mole است. اگر تحرک بدنی داشته باشیم میزان اکسیژن مصرفی می‌تواند خیلی بیش‌تر باشد. اگر فعالیت بدنی هم‌راه با کم‌شدن اکسیژن باشد وضع بدتر می‌شود. مثلاً در کوه‌نوردی در ارتفاع فشار هوا و اکسیژن کم‌تر است. در آن‌جا توجه داریم که اکسیژن مورد نیازمان را کم‌کم و در یک فرآیند تدریجی تنفس می‌کنیم. اگر درصد اکسیژن تنفسی بیش‌تر شود چه می‌شود؟ مثلاً اگر ما اکسیژن خالص تنفس کنیم چه اتفاقی ممکن است بیفتد؟ فرض کنید مقداری کربوهیدرات در بدن آماده‌ی سوختن و تولید انرژی است که در حالت عادی این فرآیند آهسته و تدریجی است. اگر همه‌ی اکسیژن لازم ناگهانی فراهم شود فرآیند سوخت‌وساز قاعدتاً خیلی سریع‌تر می‌شود و همه‌ی انرژی و گرما در زمان کوتاه‌تری آزاد می‌شود. برای همین مصرف اکسیژن خالص می‌تواند خطرناک باشد. برای غواصان یا فضانوردان که مجبورند از اکسیژن خالص استفاده کنند زمان‌بندی اکسیژن مصرفی و حجم آن باید به دقت کنترل شود.

مهم‌ترین کارکرد دستگاه تنفسی انتقال اکسیژن از خارج از بدن به سیستم گردش خون است. به این ترتیب اکسیژن لازم برای سوخت‌وساز فراهم می‌شود. کارکرد دیگر آن انتقال دی‌اکسید کربن تولیدشده در فرآیند سوخت‌وساز و بخشی از بخار آب به خارج از بدن‌مان است. در ضمن

^۱ضربان قلب کودک هم همین‌طور است. مثلاً در چند ماهگی قلب کودک تا حدود دو برابر بزرگسال می‌زند.

در فرآیند تنفس و انتقال مواد به خارج از بدن کمی گرما هم از بدن خارج می‌شود. بدن ما برای تامین انرژی با استفاده از اکسیژن، نیتروژن و هیدروژن پروتئین هم می‌سازد.

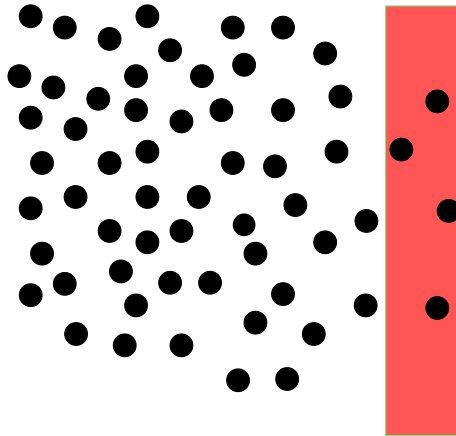
هنگام دم با بزرگ کردن فضای قفسه‌ی سینه هوا را به درون بدن می‌کشیم. در این حالت کیسه‌های هوایی منبسط می‌شوند. هنگام بازدم که نفس را بیرون می‌دهیم، کیسه‌های هوایی جمع و منقبض می‌شوند و هوا از ریه‌ها خارج می‌شود. بیایید مدلی ساده برای درک فرآیندهای دم و بازدم در تنفس بسازیم. شکل (۵.۲) را ببینید. مسیر لوله‌ی هوایی و ریه با شکلی شبیه



شکل ۵.۲ مدلی برای تنفس.

بادکنک در شکل نشان داده شده است. فضای قفسه سینه و دیافراگم با مستطیل آبی رنگ نشان داده شده است. فشار هوای بیرون P_0 است. بخش آبی رنگ با مایع پر شده و تراکم ناپذیر است. قبل از دم فشار درون ریه همان P_0 است. وقتی پیستون عقب می‌رود، فضای قفسه سینه بزرگ می‌شود. چون حجم مایع ثابت است، ریه که با حباب نشان داده شده بزرگ می‌شود. در این صورت $P_1 < P_0$ است، و جریان هوا به سمت ریه می‌رود. در فرآیند دم ریه بزرگ و پر از هوا می‌شود. در هر دقیقه حدود 15 بار نفس می‌کشیم و زمان دم از مرتبه‌ی چند ثانیه است. وقتی ریه‌ها از هوا پر می‌شوند، هوا از طریق نای‌ژک‌ها به کیسه هوایی وارد می‌شوند. سطح داخلی ریه‌ها حدود 0.1 m^2 است. همین‌که نسج ریه‌ها اسفنجی و شامل تعداد زیادی کیسه‌ی هوایی (از مرتبه‌ی چندصد میلیون) که قطر هر کدام از کیسه‌های هوا به طور متوسط حدود $d \approx 200 \mu\text{m} = 200 \times 10^{-6} \text{ m}$ است باعث می‌شود سطح موثر زیاد شود. مساحت کل کیسه‌های هوا حدوداً $60 \text{ m}^2 \approx 5 \times 10^8 \times \pi d^2$ است. به این ترتیب سطح موثر تقریباً هزار برابر بزرگ شده است. مویرگ‌ها مثل توری هر کیسه هوایی را احاطه کرده‌اند. اما خون درون این مویرگ‌ها کم‌تر از 100 cm^3 است. مطابق قانون فیک^۱ که می‌گوید هر جا در چگالی

^۱ بحث کامل‌تر را در بخش ۴.۶ می‌توانید ببینید.



شکل ۶.۲ هر جا در چگالی نایک‌نواختی داشتیم، جریانی برای کم کردن این نایک‌نواختی از ناحیه با چگالی زیاد به ناحیه با چگالی کم وجود می‌آید.

نایک‌نواختی داشتیم، جریانی برای کم کردن این نایک‌نواختی به وجود می‌آید. گاهی این را به نیرویی با عنوان نیروی آنتروپیک نسبت می‌دهیم. به عبارتی گاهی در فیزیک، رفتار آماری کل سیستم برای افزایش آنتروپی آن را به یک نیروی آنتروپیک نسبت می‌دهیم. جریان از یک ناحیه با چگالی زیاد به یک ناحیه با چگالی کم‌تر حرکت می‌کند. شکل (۶.۲) را ببینید. چگالی مولکول‌های اکسیژن در کیسه‌های هوا زیاد و در جریان خون مویرگ‌ها کم است. مولکول‌های اکسیژنی که از دیواره کیسه‌های هوایی عبور و در جریان خون وارد می‌شوند خیلی خیلی بیشتر از برعکس آن است. بنابراین سرجمع مثل این است که شاری از مولکول‌های اکسیژن از کیسه‌های هوایی به مویرگ‌ها به وجود می‌آید. به همین صورت شاری از دی‌اکسید کربن از مویرگ‌ها به کیسه‌های هوایی به وجود می‌آید. به این بخش گاهی تنفس داخلی گفته می‌شود. اما بافت ریه کش‌سان است، بنابراین هنگامی که ریه‌ها منبسط می‌شوند، وقتی قفسه سینه و دیافراگم به جای خود باز می‌گردند (یا در این مدل پیستون رها می‌شود) نیروی بازگرداننده ناشی از کش‌سانی، هوا که حالا چگالی اکسیژن آن کم و چگالی دی‌اکسید کربن آن زیاد شده را به بیرون از ریه‌ها می‌راند. این بخش همان بازدم است.

علاوه بر همه‌ی این‌ها دستگاه تنفسی مسئول تولید جریان هوا برای صحبت کردن، سرفه،

عطسه، و همین‌طور خمیازه هم هست. بخشی از دستگاه تنفسی یعنی بینی در بویایی نقش دارند. فهم فیزیک بویایی از مسائل پژوهشی جدید است^۱. سیستم بویایی از تعداد کمی گیرنده‌ی حساس تشکیل شده ولی تعداد بوهای زیادی وجود دارد که سیستم بویایی با کُدگذاری ترکیبی، آن‌ها را شناسایی می‌کند. گیرنده‌هایی هستند که کارشان این نیست که ببینند یک بوی خاص وجود دارد یا نه. وظیفه‌ی این گیرنده‌ها یافتن این اطلاع است که مثلاً تعداد از بوها وجود ندارند. یعنی به کمک روش حذف، امکان تعیین مواد معطر و غلظت آن‌ها فراهم می‌شود. پس فقط به کمک چند گیرنده که ساکت و بی صدا باشند و فعالیتی نداشته باشند می‌توان بیش‌تر بوهای که وجود ندارند را شناسایی و حذف کرد.

۴.۲ آب

در بازدم مقداری آب به صورت بخار هم از بدن خارج می‌شود. احتمالاً در زمستان‌ها وقتی کنار یک شیشه‌ی سرد هستید، بخار بازدم‌تان را روی شیشه دیده‌اید. عرق کردن یکی از راه‌های تنظیم درجه‌ی حرارت بدن است. وقتی هوا گرم می‌شود یا به علت فعالیت بدنی، دمای بدن بالا می‌رود. غدد عرق باعث تعریق می‌شوند. برای آن‌که رطوبت سطح بدن تبخیر شود گرما لازم است. بنابراین در اثر تبخیر رطوبت سطح پوست، بدن کمی از گرمایش را می‌تواند از دست بدهد و بدن خنک می‌شود. برای همین است که وقتی گرم‌مان است صورت‌مان را با آب می‌شویم. اگر آب خنک‌تر از بدن باشد، خودش دمای بدن را پایین می‌آورد. تبخیر آب سطح پوست هم بدن را کمی خنک می‌کند. البته در هوای مرطوب و شرجی، عرق نمی‌تواند از سطح پوست تبخیر شود تا کمکی به خنک‌شدن پوست کند. در هنگام ورزش به طور متوسط در هر ساعت حدود 1.4 – 0.8 لیتر عرق می‌کنیم و بیشینه آهنگ تعریق در انسان بزرگ‌سال حین ورزش سنگین 4 – 2 لیتر در ساعت است، که تقریباً معادل $34 - 17 \text{ g}/(\text{min} \cdot \text{m}^2)$ است. البته واضح است که کسی نمی‌تواند به طور ممتد و طولانی فعالیت بدنی سنگین داشته باشد. در هر حال بیشینه تعریق روزانه حدود 14 – 10 لیتر است. تعریق در بسیاری از پستانداران وجود دارد، اما انسان و اسب جزو موارد استثنا هستند که می‌توانند برای خنک‌شدن تعریق زیادی داشته باشند.

¹What the odor is not: Estimation by elimination; Physical Review E104, 024415 (2021)

بعضی حیوانات مانند سگ، غدد عرق کمی دارند. آن‌ها با نفس نفس زدن و بیرون آوردن زبان بخار آب را از طریق دهان دفع و بدنشان را خنک می‌کنند. سگ‌ها در پنجه‌هایشان غدد عرق دارند. گربه‌ها هم از طریق پنجه‌هایشان تعرق دارند. اما چون نسبت اندازه‌ی پنجه‌ها به بدن کوچک است کمکی زیادی به خنک شدنشان نمی‌کند. البته غدد عرق دیگری هم دارند که زیر پوششی از موهای بدنشان است. گربه‌ها برای کاهش حرارت درجه‌ی بدن خود در فصل گرما به دنبال سایه و مکان‌های خنک هستند. در تابستان در جای خشک و سخت گاهی می‌توان رد پای مرطوب گربه را دید.

مسائل

- ۱.۲ الف- ما در هر بار تنفس حدوداً 0.5 لیتر هوا وارد ریه‌مان می‌کنیم. در یک دقیقه تقریباً چند گرم هوا تنفس کرده‌ایم؟ تقریباً چه بخشی از آن اکسیژن و چه قدر نیتروژن است؟
 ب- چند کیلو هوا روزانه تنفس می‌کنیم؟
 ج- چند مولکول اکسیژن روزانه وارد ریه‌هایمان می‌شود؟
- ۲.۲ الف- سوخت‌وساز فردی روزانه حدود 3700 kcal است. انرژی مصرفی این فرد تقریباً چند MJ است.
 ب- اگر او فقط کربوهیدرات مثلاً بیش‌تر نشاسته مصرف کند، تقریباً چند کیلو غذا لازم دارد؟
 ج- برای این مقدار غذا چقدر اکسیژن لازم دارد؟ برای به دست آوردن این مقدار اکسیژن تقریباً چه مقدار هوا لازم دارد؟ در تنفس در هر دم مقداری هوا وارد ریه‌ها می‌شود. همهی اکسیژن هوا در ریه‌ها جذب نمی‌شوند و در بازدم هنوز تقریباً 15% اکسیژن وجود دارد.
- ۳.۲ سوخت‌وساز مجموعه‌ای لازم از واکنش‌های شیمیایی برای سوزاندن غذا و آزاد کردن انرژی است. در جدول ۱.۲ داده‌هایی در مورد سوخت و ساز و تبادل گاز برای کربوهیدرات‌ها، چربی، پروتئین و الکل در انسان می‌بینیم. در این جدول انرژی آزاد شده، اکسیژن مصرف شده و دی‌اکسید کربن آزاد شده برای هر گرم از ماده‌ی مصرفی داده شده را

جدول ۱۰۲ انرژی آزادشده، اکسیژن مصرف شده و دی اکسید کربن آزادشده برای هر گرم از کربوهیدرات، چربی، پروتئین و الکل.

| غذا | kcal/g | liter O ₂ /g | liter CO ₂ /g |
|------------|--------|-------------------------|--------------------------|
| کربوهیدرات | 4.1 | 0.81 | 0.81 |
| چربی | 9.3 | 1.96 | 1.39 |
| پروتئین | 4.0 | 0.94 | 0.75 |
| الکل | 7.1 | 1.46 | 0.97 |

می بینیم.

الف- انرژی آزادشده به ازای سوخت یک لیتر اکسیژن برای هر کدام از مواد بالا چه قدر است؟ نشان دهید که برای همه‌ی موارد نتیجه تقریباً یکی است. با اندازه‌گیری آهنگ سوزاندن اکسیژن، سوخت و ساز هر فرد را می‌توانیم به دست آوریم. اما نسبت CO₂/O₂ برای مواد مختلف متفاوت است که به ما این امکان را می‌دهد تا با استفاده از نسبت اکسیژن ورودی به دی اکسید کربن خروجی بتوانیم تخمین بزنیم چه چیزی به عنوان چشمه‌ی انرژی استفاده شده است.

ب- در هنگام استراحت یک انسان بالغ تقریباً ۱۶ لیتر O₂ در ساعت مصرف می‌کند. گرمای آزادشده سوخت و ساز پایه BMR است. آن را بر حسب kcal/hour و kcal/day به دست آورید.

ج- توان خروجی بر حسب وات چه قدر است؟

د- آهنگ CO₂ ی خروجی نوعاً 13.4 liter/hour است. چه چیزی (اگر امکان داشته باشد) در مورد ماده‌ی غذایی مصرفی می‌توان گفت؟

ه- در هنگام ورزش آهنگ سوخت و ساز زیاد می‌شود. کسی که روزانه ۱۰ ساعت کار سنگین می‌کند، احتمالاً به 3500 kcal انرژی در روز احتیاج دارد. فرض کنید این شخص کار مداومی برای ۱۰ ساعت با توان 50 W انجام دهد. می‌توانیم راندمان بدن او را به صورت نسبت کار مکانیکی انجام داده به انرژی مازادی که گرفته (اضافه بر BMR که در بند ب حساب کردید) تعریف کنیم. راندمان بدن او چه قدر است؟

۴.۲

تور دو فرانس^۱ یا تور فرانسه یکی از معتبرترین مسابقه‌های دوچرخه‌سواری جاده دنیاست که هر ساله به مدت سه هفته در جاده‌های فرانسه و کشورهای پیرامون آن، در فصل تابستان برگزار می‌شود. این مسابقه معمولاً از مرکز شهر پاریس شروع می‌شود و در همان جا هم به پایان می‌رسد. هر دوچرخه سوار در این مسابقه مقدار زیادی می‌خورد. اگر کل مصرف روزانه غذای او بسوزد، حدود 8000 کیلوکالری گرما آزاد می‌شود. در طول سه یا چهار هفته مسابقه وزن او تغییر زیادی نمی‌کند. بنابراین ورودی و خروجی انرژی او باید تقریباً برابر باشند.

الف- دوچرخه‌ها در این مسابقه فوق‌العاده کارآمد هستند. انرژی تلف شده در اثر اصطکاک داخلی و حتی لاستیک‌ها ناچیز است. اما اتلاف انرژی به خاطر مقاومت هوا که روزانه حدود 10^7 J است، قابل توجه است. این انرژی اتلافی معادل چندکیلوکالری است؟ اختلاف انرژی ورودی و این انرژی تلف شده چه قدر است؟

ب- مسیر مسابقه را تقریباً هم سطح بگیرید. بنابراین تغییر انرژی پتانسیل تقریباً صفر است. اختلاف انرژی ورودی و انرژی تلف شده بر اثر مقاومت هوا صرفاً بالارفتن دمای بدن دوچرخه‌سوار می‌شود. هر دوچرخه‌سوار روزانه مقدار زیادی آب می‌نوشد. این آب با گرفتن گرمای ناشی از سوخت و ساز تبخیر می‌شود. گرمای نهان تبخیر آب $574 \text{ kcal/L} \approx L$ است. یعنی برای تبخیر یک لیتر آب 574 kcal لازم است و یا برای تبخیر حدود 2 L آب، تقریباً 1000 kcal لازم است. هر دوچرخه‌سوار روزانه تقریباً چه قدر آب می‌نوشد؟

ج- هر دوچرخه‌سوار روزانه 6 ساعت مسابقه می‌دهد و مقدار زیادی آب می‌نوشد. نیروی مقاومت هوا را متناسب با مجذور سرعت $f = bv^2$ بگیرید که b مقداری ثابت است. در یک تونل باد، $b = 1.5 \text{ kg/m}$ به دست می‌آید. فرض کنید دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت حرکت می‌کند. با در نظر گرفتن انرژی اتلافی بند قبل یعنی روزانه حدود 10^7 J، این سرعت را به دست آورید.

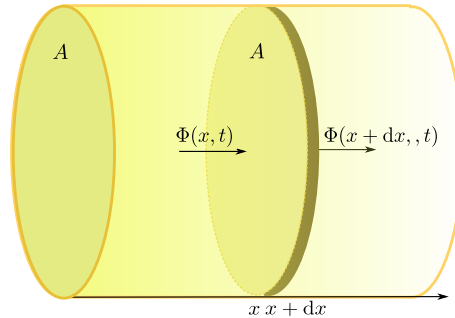
^۱ Tour de France

تولید و انتقال حرارت

۱.۳ معادله‌ی حرارت

معادله‌ی حرارت^۱ معادله‌ای است که توزیع دما، $T(r, t)$ را برحسب زمان و مکان می‌دهد. میله‌ای را در نظر بگیرید که گرما در آن جریان دارد. سطح مقطع میله A و میله در راستای محور x است. ابتدا برای سادگی خود را به مسائل یک‌بعدی محدود می‌کنیم. کمیت‌های فیزیکی مسئله مثل دما و شار انرژی گرمایی در مقطع میله یک‌نواخت است و فقط می‌توانند تابعی از x و زمان t باشند. نقاط مختلف این میله دماهای مختلفی دارند و شاری از انرژی گرمایی در میله جریان دارد. چگالی انرژی گرمایی یعنی انرژی گرمایی بر واحد حجم میله را با $\mathcal{E}(x, t)$ نمایش می‌دهیم. انرژی گرمایی بر واحد حجم مقدار انرژی‌ای است که باید به صورت گرما به یک واحد حجم ماده داده شود تا دمای آن یک درجه زیاد شود. اگر عنصری از میله به طول dx را در نظر بگیریم، حجم این عنصر $A dx$ و انرژی گرمایی در این عنصر میله عبارت است از $du = \mathcal{E}(x, t) A dx$. شار انرژی در نقطه‌ی x و زمان t (یعنی مقدار انرژی در واحد زمان از واحد سطح عبور می‌کند) را $\phi(x, t)$ بگیرید. شکل ۱.۳ را ببینید. تغییر انرژی در عنصر dx در زمان δt از سه جا ناشی می‌شود:

• انرژی‌ای که از سمت چپ به آن وارد می‌شود، $\phi(x, t) A \delta t$. این مقدار انرژی باعث



شکل ۱.۳ شاری از انرژی گرمایی، $\phi(x, t)$ ، در میله‌ای جریان دارد. این شار باید ناشی از اختلاف دمای دو سر میله یا یک چشمه گرم باشد.

افزایش چگالی انرژی گرمایی می‌شود.

- انرژی‌ای که از سمت راست از آن خارج می‌شود، $\phi(x + dx, t)A\delta t$. این مقدار انرژی باعث کاهش چگالی انرژی گرمایی می‌شود.
- اگر چشمه گرمایی در این ناحیه وجود داشته باشد می‌تواند باعث افزایش چگالی انرژی گرمایی می‌شود. اندازه چشمه گرمایی بر واحد حجم را $q(x, t)$ بگیرید. در این صورت سهم این بخش در تغییر انرژی در عنصر dx در زمان δt عبارت است از $q(x, t)A\delta t$.

با در نظر گرفتن همه‌ی این‌ها نتیجه می‌شود

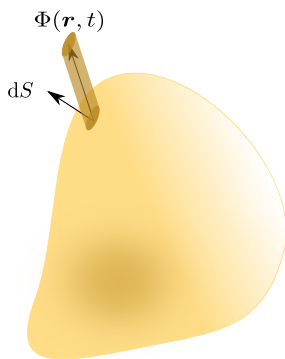
$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}(x, t) A dx &= (\mathcal{E}(x, t + \delta t) - \mathcal{E}(x, t)) A dx \\ &= (\phi(x, t) - \phi(x + dx, t) + q(x, t)) A \delta t, \end{aligned} \quad (1.3)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = q(x, t) \quad (2.3)$$

این معادله به این معناست که اگر یک نایک‌نواختی در شار انرژی گرمایی داشته باشیم، می‌تواند سهمی در تغییر چگالی انرژی گرمایی در یک نقطه از فضا داشته باشد. حضور چشمه گرمایی هم همین نتیجه را می‌دهد. اگر مساله‌مان یک بُعدی نباشد، شار انرژی $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ، چگالی $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$

انرژی گرمایی $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ و چشمه‌ی گرمایی بر واحد حجم $q(\mathbf{r}, t)$ است. توجه داریم که در حالت سه‌بعدی شار انرژی یک بردار است (در یک‌بعد شار انرژی مولفه‌ی برداری که جهت آن ثابت است و با انتخاب راستای مناسب دو مولفه‌ی آن صفر است). سطح بسته‌ای که حجم V را در بر می‌گیرد، در نظر بگیرید. شکل ۲.۳ را ببینید. در زمان t ، انرژی گرمایی‌ای که درون حجم V است، عبارت است از $\int_V \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) dV$. روی سطحی که این حجم را در بر می‌گیرد، عنصر سطح dS را انتخاب می‌کنیم انرژی‌ی خارج شده از عنصر dS در زمان dt عبارت است



شکل ۲.۳ انرژی‌ی خارج شده از عنصر dS در زمان dt عبارت است از $dS \cdot \Phi dt$.

از $dS \cdot \Phi dt$ برای به دست آوردن آهنگ خروج انرژی‌ی گرمایی از کل حجم V باید روی کل سطح S انتگرال بگیریم. آهنگ ورود انرژی به حجم V نیز همان مقدار ولی با علامت منفی است

$$- \oint_S \Phi \cdot d\mathbf{S}. \quad (۳.۳)$$

آهنگ افزایش انرژی در حجم V را به صورت

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) dV, \quad (۴.۳)$$

نیز می‌توان نوشت. چون حجم V یک حجم ثابت معین است در مشتق‌گیری از انتگرال مرزهای انتگرال ثابت هستند و کافی است از انتگرال ده مشتق بگیریم

$$\int_V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dV. \quad (۵.۳)$$

قانون بقای انرژی می‌گوید که انرژی در حجم V نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود. به این ترتیب افزایش انرژی باید فقط ناشی از ورود انرژی به V یا به واسطه چشمه انرژی باشد، یعنی

$$\int_V q(\mathbf{r}, t) dV - \oint_S \Phi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dV, \quad (6.3)$$

که با استفاده از قضیه‌ی واگرایی به شکل

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi - q(\mathbf{r}, t) \right\} dV = 0, \quad (7.3)$$

در می‌آید. اما این رابطه برای هر حجم دل‌به‌خواه V درست است پس انتگرال‌ده در هر نقطه از شماره باید صفر باشد

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t). \quad (8.3)$$

به این معادله که از شرط پایستگی انرژی به دست آمد معادله‌ی پیوستگی^۱ می‌گوییم. در این رابطه تغییرات زمانی چگالی انرژی در یک نقطه به تغییرات مکانی شار Φ و چشمه در همان نقطه مربوط می‌شود.

اما چرا شار انرژی گرمایی داریم. اگر دما یک‌نواخت باشد شار انرژی گرمایی نداریم ولی مثلاً اگر دو نقطه‌ی مجاور اختلاف دما داشته باشند، انرژی گرمایی از نقطه‌ی با دمای بیشتر به نقطه‌ی با دمای کمتر جریان پیدا می‌کند. انتظار داریم اندازه‌ی این شار انرژی به این‌که محیط چیست هم بسته‌گی داشته باشد. پس

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -\kappa \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (9.3)$$

که κ ضریب هدایت گرمایی است. معادله‌ی (۹.۳) قانون هدایت گرمایی فوریه^۲ است. انرژی گرمایی بر واحد حجم مقدار انرژی‌ای است که باید به صورت گرما به یک واحد حجم ماده داده شود تا دمای آن یک درجه زیاد شود، پس

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = C(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}, t)T(\mathbf{r}, t) \quad (10.3)$$

۲.۳ انتقال حرارت در محیط‌های زیستی

۴۱

که C ظرفیت گرمایی بر واحد جرم و ρ چگالی است. با جاگذاری (۹.۳) و (۱۰.۳) در (۸.۳) و با فرض این که چگالی، ضریب هدایت و ظرفیت گرمایی یک نواخت باشند، می‌رسیم به

$$C\rho \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t). \quad (۱۱.۳)$$

در جدول (۱۱.۳) مقدار تقریبی ضریب هدایت گرمایی، چگالی و ظرفیت گرمایی برای چند ماده‌ی مختلف داده شده است. در غیاب چشمه این معادله به صورت زیر در می‌آید

جدول ۱۱.۳ مقدار تقریبی ضریب هدایت گرمایی، چگالی و ظرفیت گرمایی برای چند ماده‌ی مختلف

| ماده | κ (Wm ⁻¹ K ⁻¹) | ρ (kg m ⁻³) | C (kJ/(kg K)) |
|-----------------|--|------------------------------|-----------------|
| آب | 0.6 | 1×10^3 | 1.0 |
| هوا در دمای 0°C | 0.025 | $(2 - 6) \times 10^2$ | 1.0 |
| پوست بدن | 0.3 | 1.05×10^3 | 3.77 |
| چربی | 0.23 | 8.5×10^2 | 2.51 |
| بافت عضله | 0.46 | 1.05×10^3 | 3.77 |
| استخوان | 2.28 | 1.7×10^3 | 1.59 |
| خون | 0.52 | 1.06×10^3 | 4.0 |

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 T(\mathbf{r}, t), \quad (۱۲.۳)$$

که $D := \frac{\kappa}{C\rho}$ است. معادله‌ی (۱۲.۳) معادله‌ی پخش یا حرارت است. در فصل ۶ هم معادله‌ی پخش از ترکیب قانون فیک و معادله‌ی پیوستگی به دست می‌آید. این معادله یک معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای است. برای حل آن دو شرط مرزی و یک شرط اولیه لازم است.

۲.۳ انتقال حرارت در محیط‌های زیستی

موجودات همیوترم^۱ دمای بدنشان بدون توجه به دمای محیط اطراف تقریباً ثابت است. در این بین بعضی از آن‌ها خون‌گرم^۲ هستند و می‌توانند دمای‌شان را حتی بالاتر از دمای محیط هم نگه

^۱ Homeotherms^۱ warm blooded^۲

دارند. چه در تابستان که هوا گرم است و یا در زمستان که هوا سرد است و همین‌طور در طول شب و روز، دمای بدن موجودات خون‌گرم ثابت است. پرنده‌گان و پستانداران خون‌گرم هستند. بعضی موجودات هم هستند که دمای بدن‌شان تقریباً برابر با دمای محیط اطراف‌شان است. این‌ها را پویکیلوترم^۱ یا گاهی با مسامحه خون‌سرد می‌نامند. این موجودات هم‌راه با تغییر دمای محیط دمای بدن‌شان تغییر می‌کند. در هوای گرم، مثلاً در تابستان و در طول روز دمای بدن جانوران خون‌سرد بالا می‌رود و انرژی‌ی لازم برای فعالیت را بدست می‌آورند. شب‌ها و در طول فصل زمستان با توجه به سردی‌ی هوا، دمای بدن‌شان کاهش پیدا می‌کند. میزان فعالیت یک جانور خون‌سرد به درجه حرارت محیطش بستگی دارد. جانوران خون‌سرد برای تحرک به هوای گرم نیاز دارند. اما موجودات خون‌گرم برای ثابت نگه‌داشتن دمای بدن‌شان، مجبورند سوخت‌وساز سریعی داشته باشند و می‌توانند در محیط‌های با دماهای مختلف فعال بمانند، به دنبال غذا بگردند و از خود دفاع کنند. از همین رو اگر آب و غذا باشد، موجودات خون‌گرم می‌توانند خود را تقریباً با انواع شرایط محیطی بر روی زمین سازگار کنند.

تولید گرما برای یک موجود خون‌گرم با تعداد مولکول و در نتیجه حجم متناسب است. اما ازدست داده گرما با سطح متناسب است. یعنی این پدیده زندگی برای یک موجود خون‌گرم کوچک را سخت‌تر می‌کند. برای همین است که پستان‌داران کوچک برای تأمین انرژی‌ی لازم برای جبران گرمایی که از سطح پوست‌شان از دست می‌دهند باید مدام در حال خوردن باشند. ولی خزندگان و کلاً جانوران خون‌سرد برای ادامه‌ی زندگی در مقایسه با جانوران خون‌گرم به انرژی و غذای کمتری نیاز دارند. پستانداران و پرنده‌گان در مقایسه با جانوران خون‌سرد هم‌وزن خود به انرژی و در نتیجه به خوراک بیشتری احتیاج دارند. بیابان‌ها و کویر که آب و غذا کم است، قلمرو جانوران خون‌سرد مثل خزندگان است. اما در محیط‌های سردی که موجودات خون‌سرد به حالت کاملاً غیر فعال در می‌آیند، موجودات خون‌گرم می‌توانند هم‌چنان فعال بمانند.

همان‌طور که دیدیم بدن انسان یک سوخت‌وساز پایه دارد که حدود 80 وات است. به این طریق بدن شروع به گرم‌شدن می‌کند. نرخ این گرمای تولیدشده باید با نرخ از دست دادن گرما متعادل شود. بالا رفتن دمای بدن به اندازه چند درجه کشنده است. به همین ترتیب، از دست دادن گرما و پایین آمدن دما اگر بیش‌تر از چند درجه باشد، باز هم کشنده و خطرناک است. بدن

^۱Poikilotherm

از چند مکانیسم برای ثابت ماندن دما استفاده می‌کند؛ هدایت، همرفت، تابش و بالاخره تعریق. دمای اندام‌های مختلف در بدن انسان حول و حوش 37 درجه‌ی سانتی‌گراد (یا حدود 99 درجه‌ی فارنهایت) است. البته بیش‌تر گرمایی که در هنگام استراحت در بدن تولید می‌شود مربوط به اندام‌هایی مثل قلب، کبد و مغز است. انتقال گرما از نواحی درونی‌تر بدن به سطح بدن از دو طریق رسانش و همین‌طور همرفت انجام می‌شود. در فرآیند همرفت گرما از طریق جریان خون در رگ‌ها و مویرگ‌های سطحی به اندام‌های بیرونی‌تر می‌رسد. در بافت‌های درونی‌تر انتقال گرمای بیش‌تر از طریق همرفت و در اندام‌هایی سطحی از عمدتاً از طریق رسانش است.

۱۰.۲.۳ هدایت و همرفت

یک راه از دست‌دادن گرمای بدن، هدایت است.

$$P_{\text{conduction}} = \kappa \frac{S \Delta T}{d} \quad (۱۳.۳)$$

ضریب تناسب، κ ، ضریب هدایت است. توان تلافی بر اثر هدایت، $P_{\text{conduction}}$ ، متناسب با مساحت بدن، $S \approx 2 \text{ m}^2$ ، اختلاف دمای بدن با محیط، $\Delta T \approx 10$ (مثلاً برای محیطی با دمای ۲۷ درجه‌ی سانتی‌گراد) و نسبت عکس با لایه‌ای با این اختلاف دما، d است. وقتی ما لباس تن‌مان است، تخمین $d \approx 1 \text{ cm}$ معقول است، در واقع با این انتخاب d فرض کرده‌ایم، جریان هوا نداریم و هوا تقریباً ساکن است و یک لایه‌ای از هوا به ضخامت d بدن را پوشانده است. برای هوا $\kappa = 0.025 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ است. بنابراین

$$P_{\text{conduction}} = 0.025 \frac{2 \times 10}{0.01} \approx 50 \text{ W}. \quad (۱۴.۳)$$

با توجه به این‌که سوخت و ساز پایه حدود 80 W است، این مقدار برای خنک کردن بدن کم است. اگر اختلاف دما با محیط کم‌تر از 10 درجه باشد، این عدد کوچک‌تر می‌شود. اگر ضخامت لایه‌ی هوا را بیش‌تر مثلاً $d \approx 3 \text{ cm}$ بگیریم، از دست‌دادن گرما باز هم سه مرتبه کم‌تر می‌شود. یا اگر در حال فعالیت بدنی باشیم تولید گرما بیش‌تر می‌شود که در آن‌صورت وضع بدتر است. علاوه بر هدایت جمله‌ی همرفت هم وجود دارد. توان از دست‌دادن گرمای بدن از طریق همرفت شبیه

جدول ۲.۳ مدتی که انسان در آب سرد می‌تواند دوام بیاورد.

| مدت زمان زنده ماندن | مدت زمان خسته شدن یا از دست دادن هشیاری | دمای آب |
|---------------------|---|-----------|
| 3 h – ∞ | 3 – 12 h | 21 – 27°C |
| 2 h – 40 h | 2 – 7 h | 16 – 21°C |
| 1 h – 6 h | 1 – 2 h | 10 – 16°C |
| 1 h – 3 h | 30 min – 60 min | 4 – 10°C |
| 30 min – 90 min | 15 min – 30 min | 0 – 4°C |
| < 15 min – 45 min | < 15 min | < 0°C |

هدایت است، با این تفاوت که کافی است به جای $\frac{k_i}{d}$ ضریب دیگری مثل \mathcal{K} قرار دهیم. پس

$$P_{\text{Convection}} = \mathcal{K}S\Delta T$$

ضریب همرفت \mathcal{K} به سرعت باد بستگی دارد. S مساحت بدن است. برای همرفت در واحد SI کافی است مقدار تقریبی $\mathcal{K} \approx 1 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ را قرار دهیم. در این صورت

$$P_{\text{convection}} \approx 2 \times 10 = 20 \text{ W}. \quad (15.3)$$

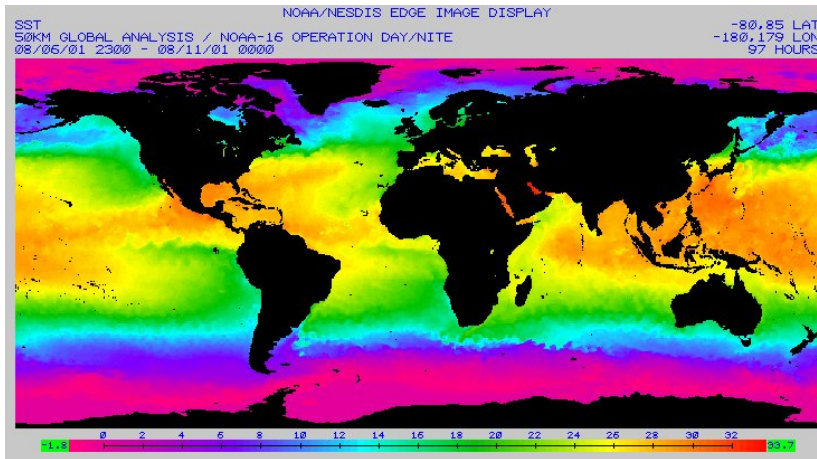
که این بخش هم اهمیت چندانی ندارد.

اگر محیط را به جای هوا، آب بگیریم، $k_i = 0.6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ است. ضریب هدایت گرمایی برای آب خیلی بزرگتر از هوا است. در این صورت توان اتلاف گرما از طریق هدایت چه می‌شود؟ مثلاً اگر در یک حوض چه‌ی آب سرد باشیم، چه مدت می‌توانیم دوام آوریم؟ در جدول (۲.۳) مدتی که انسان در آب سرد می‌تواند دوام بیاورد، آورده شده است. بسته به سن و خصوصیات فرد می‌تواند زمان‌های مختلفی را هشیار یا زنده بماند. این اعداد از سایت www.ussartf.org/cold_water_survival.htm آورده شده‌اند.

وقتی کشتی تایتانیک داشت غرق می‌شد، خیلی‌ها (بیش از ۱۵۰۰ نفر) نتوانستند سوار قایق‌های نجات بشوند. آن‌هایی که در آب بودند و سعی کردند به قایق‌های نجات بچسبند نتوانستند در آب سرد آن ناحیه دوام بیاورند. دمای آب نزدیک 2°C بود. توجه داشته باشید که به خاطر نمک محلول در آب، دمای انجماد آب اقیانوس می‌تواند کم‌تر از صفر و تا 2°C -
<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

۲.۳ انتقال حرارت در محیط‌های زیستی

۴۵



شکل ۳.۳ در این عکس دمای آب سطح اقیانوس نشان داده شده است. اندازه‌گیری از ۶ تا ۱۱ اوت ۲۰۱۱ انجام شده است. واحد دما درجه سلسیوس است. دمای سرد از صورتی تا بنفش، دمای متوسط آبی تا سبز و دمای گرم به رنگ زرد تا قرمز نشان داده شده است.
www.windows2universe.org/earth/Water/temp.html

باشد. غوطه‌وری ناگهانی در آب منجمد، باعث مرگ بر اثر ایست قلبی، بلع غیرقابل کنترل آب و یا ناتوانی در سرما است. در جنگ جهانی دوم در جنگ بین کشتی‌ها و زیردریایی‌ها در نواحی سرد، آن‌هایی که از انفجار جان سالم به‌در می‌بردند، پس از مدتی به خاطر سرمای آب می‌مردند. البته در همه‌ی نقاط این طور نیست. در شکل (۳.۳) دمای آب سطح اقیانوس نشان داده شده است. چنان‌که در شکل می‌بینید، آب خلیج فارس گرم است. پس اگر در خلیج فارس مجبور شدیم برای مدتی طولانی در آب بمانیم، سرما برای ما مشکلی ایجاد نمی‌کند.

۲.۲.۳ تابش

یک راه دیگر برای از دست دادن گرما تابش است. مطابق قانون استقن^۱ - بولتزمن^۱ توان گرمایی تابش شده توسط یک جسم سیاه از معادله‌ی

$$P_{SB} = \sigma ST^4. \quad (۱۶.۳)$$

^۱ Stefan-Boltzmann

داده می‌شود که $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ثابت استقن-بولتزمن، T دمای جسم به درجه‌ی کلونین، و S مساحت جسم است. برای جسم سیاه 100 درصد انرژی تابیده به خود را جذب می‌کند، و اگر در تعادل با محیط اطراف خود باشد، همهی انرژی تابیده را نیز تابش می‌کند. اگر جسم کاملاً سیاه نباشد، باید یک ضریب مثلاً e در نظر بگیریم. برای یک جسم کاملاً سیاه این ضریب $e = 1$ است و برای یک بازتابنده‌ی کامل $e = 0$ است. برای بدن انسان $e \approx 0.98$ می‌گیرند، که تقریباً همان 1 است. با فرض این‌که مساحت بدن را $S \approx 2 \text{ m}^2$ بگیریم، توان گرمایی تابش شده توسط بدن انسان

$$P_{\text{SB}} \approx 5.67 \times 10^{-8} \times 2 \times (310)^4 \approx 1050 \text{ W}. \quad (17.3)$$

این از ده برابر سوخت و ساز پایه هم بیش تر است. اگر این محاسبه درست باشد، ما باید به سرعت یخ بزنیم. بنابراین چیزی هست که در نظر نگرفته‌ایم. ایراد این است که همان‌طور که ما تابش حرارتی داریم، جذب از محیط اطراف هم داریم. در واقع توان گرمایی تابش شده خالص توسط بدن انسان

$$(18.3)$$

$$P_{\text{SB}} = \sigma S(T_1^4 - T_2^4) \approx 5.67 \times 10^{-8} \times 2 \times [(310)^4 - (300)^4] \approx 130 \text{ W}.$$

توجه داریم به خاطر لباس بخشی از بدن پوشیده است و انرژی تابشی عملاً کم‌تر از این مقدار است. در این جا دمای محیط را 10 درجه‌ی کلونین خنک‌تر از بدن گرفته‌ایم. نتیجه خیلی نزدیک به سوخت و ساز پایه است. اگر فعالیتی نداشته باشیم بیش‌تر گرما از طریق تابش به محیط داده می‌شود. اما اگر فعالیتی داشته باشیم، بدن از تعرق و نفس‌نفس زدن برای خنک‌شدن کمک می‌گیرد.

۳.۲.۳ تعریق

در بازدم مقداری آب به صورت بخار از بدن خارج می‌شود. در زمستان‌ها وقتی کنار یک شیشه‌ی سرد هستیم، بخار بازدم‌مان را روی شیشه دیده‌ایم. عرق کردن یکی از راه‌های تنظیم درجه‌ی حرارت بدن است. وقتی هوا گرم می‌شود یا به علت فعالیت بدنی، دمای بدن بالا می‌رود. غدد عرق باعث تعریق می‌شوند. در اثر تبخیر رطوبت سطح پوست، بدن خنک می‌شود. در هوای

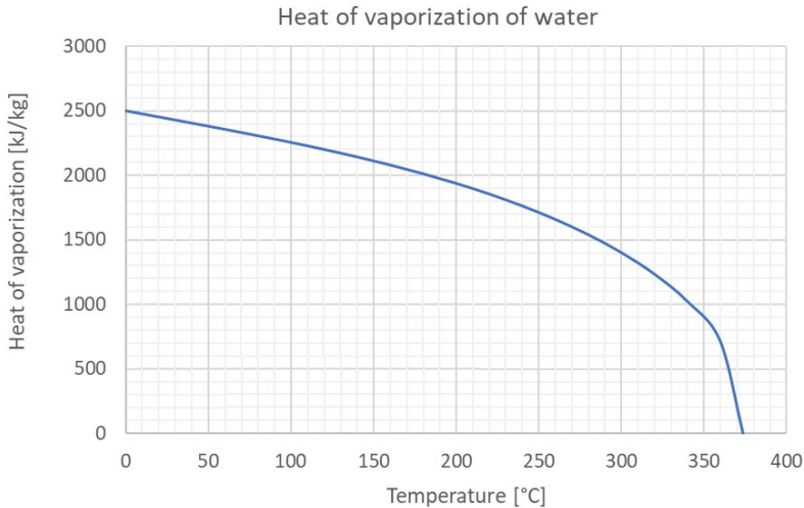
مرطوب و شرجی، عرق نمی‌تواند از سطح پوست تبخیر شود تا کمکی به خنک‌شدن پوست کند. در هنگام ورزش به طور متوسط در هر ساعت حدود 1.4 – 0.8 لیتر عرق می‌کنیم و بیشینه آهنگ تعرق در انسان بزرگسال حین ورزش سنگین 4 – 2 لیتر در ساعت است، که تقریباً معادل $34 - 17 \text{ g}/(\text{min} \cdot \text{m}^2)$ است. بیشینه تعریق روزانه 14 – 10 لیتر است. تعرق در بسیاری از پستانداران وجود دارد، اما انسان و اسب جزو موارد استثنا هستند که می‌توانند برای خنک‌شدن تعرق زیادی داشته باشند. بعضی حیوانات مانند سگ، غدد عرق کمی دارند. آن‌ها با نفس‌نفس زدن و بیرون آوردن زبان بخار آب را از طریق دهان دفع و بدن‌شان را خنک می‌کنند. سگ‌ها در پنجه‌های‌شان غدد عرق دارند. گربه‌ها هم از طریق پنجه‌های‌شان تعرق دارند. اما چون نسبت اندازه‌ی پنجه‌ها به بدن کوچک است کمک زیادی به خنک‌شدن‌شان نمی‌کند. البته غدد عرق دیگری هم دارند که زیر پوششی از موهای بدن‌شان است. گربه‌ها برای کاهش حرارت درجه‌ی بدن خود در فصل گرما به دنبال سایه و مکان‌های خنک هستند. در تابستان در جای خشک و سخت گاهی می‌توان رد پای مرطوب گربه را دید.

بدن برای خنک‌شدن از تعرق استفاده می‌کند. وقتی فعالیت‌مان زیاد باشد، تعریق از مکانیزم‌های مهم برای خنک‌شدن است. آب برای بخار شدن، مقداری از گرمای اطراف خود را می‌گیرد. مردم معمولاً برای خنک‌شدن دست و روی خود را آب می‌زنند یا روی زمین و در و دیوار اطراف خود را خیس می‌کنند. پارامتری کمی برای توصیف این مساله، گرمای نهان تبخیر است. گرمای نهان تبخیر انرژی‌ای است که توسط یک سیستم ترمودینامیکی در طی یک فرایند دمای ثابت جذب می‌شود، تا آن ماده از فاز مایع به فاز گاز برود. این کمیت به دما بستگی دارد. شکل (۴.۳) را ببینید. در دمای 40°C ، گرمای نهان تبخیر

$$L \approx 2.4 \times 10^3 \text{ kJ/kg} \approx 2.4 \times 10^3 \text{ kJ/L} \quad (۱۹.۳)$$

$$\approx \frac{2.4 \times 10^3}{4.18} \text{ kcal/L} = 574 \text{ kcal/L} \quad (۲۰.۳)$$

است. یعنی برای تبخیر یک لیتر 574 kcal لازم است. پس برای تبخیر حدود 2 L آب، تقریباً 1000 kcal لازم است. البته اگر بخش‌هایی از بدن در معرض جریان هوا مثل باد یا جریان هوایی مثلاً از یک پنکه داشته باشیم، باید هم‌رفت اجباری^۱ را هم در نظر بگیریم. در این نوع انتقال



شکل ۴.۳ گرمای نهان تبخیر بر حسب دما برای آب- https://www.engineeringtoolbox.com/water-properties-d_1573.html

گرما هم هوای گرم اطراف بدن و هم رطوبت ناشی از تعرق که اطراف بدن جمع شده جابه‌جا می‌شوند. بنابراین در محیطی که خیلی شرجی نباشد با استفاده از پنکه تعریق بیشتر می‌شود. در محیط‌های خیلی مرطوب تعرق کمتر می‌شود و نمی‌تواند کمکی به خنک شدن بکند.

۴.۲.۳ ظرفیت گرمایی

ظرفیت گرمایی آب حدود $C \approx 4.18 \text{ kJ}/(\text{kg K}) = 1 \text{ kcal}/(\text{kg K})$ است. بدن انسان ترکیبی از بافت‌های مختلف است. به خاطر چربی ظرفیت گرمایی بدن انسان کمی از ظرفیت گرمایی آب کمتر است. مقدار آن برای یک انسان به طور متوسط حدود

$$C \approx 3.5 \text{ kJ}/(\text{kgK}) = 0.83 \text{ kcal}/(\text{kgK})$$

است.

مثال ۱.۲.۳. اگر بدن انسان را کاملاً عایق حرارتی کنیم، در این صورت گرمای تولیدشده بر اثر سوخت‌وساز منجر به بالا رفتن دمای بدن می‌شود. برای یک فرد ۸۰ کیلوگی در چه مدتی مثل <https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

دمای بدن انسان $\Delta T = 5^\circ C$ زیاد می‌شود؟

حل. اگر فرض کنیم این فرد در حال استراحت است، گرمای تولید شده کم‌ترین مقدار و زمان این افزایش دما بیشینه خواهد بود. ظرفیت گرمایی ی‌بافت بدن انسان را همان ظرفیت گرمایی ی‌آب می‌گیریم.

$$Q = \Gamma_0 \Delta t = mC\Delta T$$

$$\Delta t = \frac{mC\Delta T}{\Gamma_0} \approx \frac{80 \times 3500 \times 5}{80} = 17500 \text{ s} = 4.8 \text{ h} \quad (21.3)$$

این مقدار افزایش دما برای انسان خطرناک است.



مثال ۲.۲.۳. حالا اگر بر عکس کسی در آب سرد برود. ممکن است بر اثر کاهش دما به همین اندازه یعنی $\Delta T = -5^\circ C$ مشکلاتی برایش ایجاد شود. در این صورت اختلاف دما با آب سرد از طرفی باعث تغییر دمای بدن به اندازه‌ی ΔT در مدت t می‌شود. این انرژی $mC\Delta T$ است. از طرف دیگری به خاطر هدایت نیز مقداری گرما از دست می‌دهد. توجه داریم که با سرد شدن بدن اختلاف دمای بدن با محیط تابعی از زمان است. برای سادگی فرض کنیم اختلاف دمای بدن با محیط اطرافش به طور متوسط $\Delta T' = 20^\circ C$ و لایه‌ای از آب که بین بدن و آب سرد است $d \approx 3 \text{ cm}$ بنابراین

$$\Delta t \approx \frac{mC\Delta T}{-\Gamma_0 + \kappa_{\text{water}} \frac{S\Delta T'}{d}} \approx \frac{80 \times 3500 \times 5}{-80 + 0.6 \frac{2 \times 20}{0.03}} = 1944 \text{ s} \approx 32 \text{ min.} \quad (22.3)$$

با توجه به تقریب‌هایی که زدیم این نتیجه با نتایج جدول (۱.۷) ناسازگاری زیادی ندارد. البته معادله‌ی بالا را با دقت بیشتری به عنوان یک معادله‌ی دیفرانسیل هم می‌توان حل کرد. در این صورت

$$mC \frac{dT}{dt} = \Gamma_0 - \kappa_{\text{water}} \frac{S(T - T_{\text{out}})}{d}, \quad (23.3)$$

<https://www.youtube.com/@amiraghahmohammadi>

که $T(t)$ دمای بدن در زمان t و T_{out} دمای آب سرد است. این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{\Gamma_0}{mc} + \frac{T_{out}}{\tau}, \quad (24.3)$$

که

$$\tau := \frac{mCd}{\kappa_{water} S} = \frac{80 \times 3500 \times 0.03}{0.6 \times 2} = 7000 \text{ s} \approx 2 \text{ hr} \quad (25.3)$$

است. جواب هم‌گن و جواب خاص این معادله

$$\begin{aligned} T_g &= Ae^{-t/\tau} \\ T_p &= \frac{\Gamma_0 \tau}{mc} + T_{out}, \end{aligned} \quad (26.3)$$

و جواب کلی‌ی معادله

$$T(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{\Gamma_0 \tau}{mc} + T_{out} \quad (27.3)$$

یا

$$\Delta T(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{\Gamma_0 \tau}{mc} \quad (28.3)$$

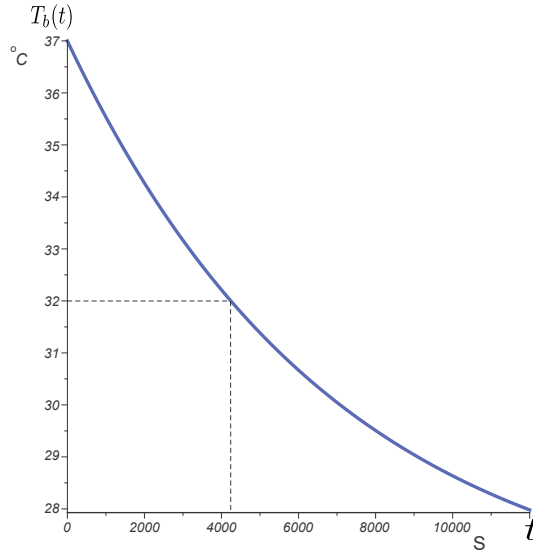
که با استفاده از این‌که در ابتدا دمای بدن $T_b(0) = 310^\circ\text{K}$ و دمای آب $T_{out} = 290^\circ\text{K}$ است، $\Delta T(0) = 20^\circ\text{K}$ و ثابت A به دست می‌آید

$$A = \Delta T(0) - \frac{\Gamma_0 \tau}{mc}. \quad (29.3)$$

پس اختلاف دمای بدن و آب به عنوان تابعی از زمان به صورت زیر است

$$\Delta T(t) = (\Delta T(0) - \frac{\Gamma_0 \tau}{mc})e^{-t/\tau} + \frac{\Gamma_0 \tau}{mc}. \quad (30.3)$$

در شکل (۵.۳) دمای بدن بر حسب زمان وقتی در آبی با دمای 17°C غوطه‌ور است و انرژی ناشی از سوخت‌وسازش را با هدایت از دست می‌دهد، نشان می‌دهد.

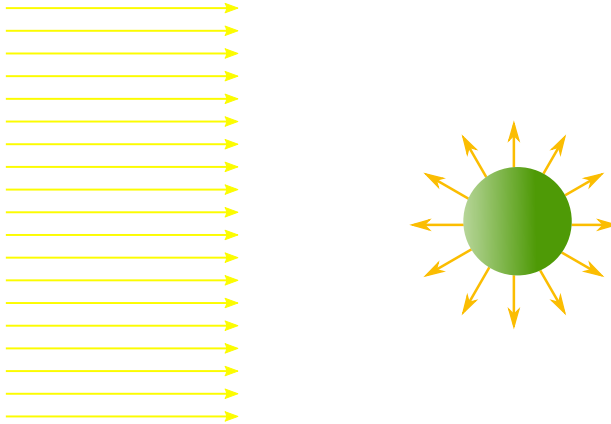


شکل ۵.۳ دمای بدن بر حسب زمان وقتی در آبی با دمای 17°C غوطه‌ور است و انرژی ناشی از سوخت‌وساز را با هدایت از دست می‌دهد.

مسائل

۱.۳ خورشید با توان $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ تابش می‌کند. شار انرژی ورودی روی زمین، I_e ، تقریباً 1.4 kW/m^2 است. در این مساله می‌خواهیم ببینیم آیا در هیچ سیاره‌ی دیگری در منظومه‌ی شمسی امکان وجود حیات بر مبنای آب مشابه آن‌چه در زمین می‌بینیم وجود دارد. سیاره‌ای در فاصله‌ی d از خورشید در نظر بگیرید (فاصله‌ی زمین از خورشید را d_e بگیرید). چون شار انرژی به صورت عکس مجذور فاصله کم می‌شود، در این فاصله شار انرژی خورشید $I = I_e(d_e/d)^2$ است. شعاع سیاره را R بگیرید و فرض کنید کسر α از نور تابشی خورشید را جذب و بقیه را به فضا تابش می‌کند. سطح مقطع سیاره در مقابل نور خورشید πR^2 است، بنابراین کل توان جذب شده $\pi R^2 \alpha I$ است. شعاع زمین حدود 6400 km است.

خورشید مدتی طولانی است که تابش می‌کند، ولی دمای زمین تقریباً ثابت است. برای



شکل ۶.۳ انرژی خورشیدی جذب شده توسط زمین، مجدداً بازتابیده شود

آن که چنین اتفاقی بیفتد، انرژی خورشیدی جذب شده باید به مجرد ورود مجدداً بازتابیده شود چون تابش حرارتی یک جسم به دمای آن بستگی دارد، دمای متوسط سیاره از رابطه‌ی

$$\sigma T^4 = \text{شار انرژی حرارتی تشعشع شده}$$

به دست می‌آید. در این رابطه $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ ثابت استفن-بولتزمن است. این رابطه آهنگ از دست دادن انرژی از واحد سطح جسمی که تابش می‌کند. در این جا دما، دمای سطح زمین است.

الف- با استفاده از این رابطه دمای متوسط سطح زمین را به دست آورید و آن را با جواب واقعی که حدود 289 K (16 C) است، مقایسه کنید.

ب- بر مبنای فرمولی که به دست آورده‌اید، سیاره‌ای که شعاعش از مرتبه‌ی زمین است در چه فاصله‌ای از خورشید (چه مرتبه‌ای از d_e) می‌تواند باشد به طوری که دمای متوسط آن هنوز بالای دمای انجماد آب باشد. اگر شعاع سیاره دو برابر شعاع زمین باشد نتیجه‌ی شما فرقی می‌کند؟

ج- بر مبنای فرمولی که به دست آورده‌اید، سیاره‌ای که شعاعش تقریباً همان شعاع زمین است، چه قدر می‌تواند به خورشید نزدیک باشد (چه مرتبه‌ای از d_e) به طوری که دمای

متوسط آن هنوز کم‌تر از دمای جوشیدن آب باشد.

د- با دانستن شعاع مدار سیارات و این معیارهای خیلی ساده، کدام یک می‌تواند کاندیدی برای وجود حیات باشد؟

۲.۳ ماهی‌ها خون سرد هستند، دمای بدنشان با دمای محیطشان برابر است. علاوه بر این آن‌ها شش ندارند. آن‌ها با استفاده از آبشش اکسیژن محلول در آب اطرافشان را می‌گیرند، یا به عبارتی اکسیژن آب را تنفس می‌کنند. آیا موجودی می‌تواند خون‌گرم باشد و با استفاده از آبشش از اکسیژن آب تنفس کند؟ یک آبی‌ی خون‌گرم که دمای بدنش ۲۰ درجه سانتی‌گراد بالاتر از آب اطرافش است را در نظر بگیرید. وقتی آن آبی‌ی آب را وارد آبشش خود می‌کند، خون درون آبشش با آب هم‌دما است.

الف- انرژی لازم برای گرم کردن یک لیتر از خون ماهی به دمای بدنش چه قدر است؟ هم برای موجود آبی و هم برای آب اطرافش $c = 4200 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$ و $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ بگیرد.

ب- اکسیژنی که یک لیتر خون حمل می‌کند برای سوخت‌وساز انرژی در حدود ۴۰۰۰ J کفایت می‌کند. از مقایسه نتیجه‌ی این بند با بند قبل چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت. دلفین یک آبی‌ی خون‌گرم است. دلفین‌ها آبشش ندارند. آن‌ها به روی آب می‌آیند و هوا تنفس می‌کنند.

۲.۳ متخصصین پزشکی قانونی گاهی لازم است زمان مرگ یک قربانی را تخمین بزنند. فرض کنید که در زمان مرگ دمای بدن همان دمای معمول باشد. بدن جسد دیگر سوخت‌وسازی ندارد، و پس از مرگ با محیط اطرافش هم‌دما می‌شود. میزان از دست دادن گرمای بدن متناسب با سطح بدن، S و اختلاف دمای بدن با دمای محیط $T(t) - T_{\text{out}}$ است. ضریب تناسب را همان ثابت هم‌رفت بگیرید و با k نمایش دهید.

الف- معادله‌ی دیفرانسیلی برای تغییر دمای جسد به دست آورید.

ب- این معادله دیفرانسیل را حل کنید. ثابت زمانی افت دمای جسد چیست؟ آن را بر حسب حجم، سطح، چگالی، ظرفیت گرمایی جسد و ثابت هم‌رفت به دست آورید.

ج- دو بدن که مشابه هم ولی یکی مقیاس‌شده‌ی دیگری است، کدام جسد زودتر سرد می‌شود؟

۴.۳ در هوای سرد وقتی در معرض باد قرار می‌گیریم سوز سرما را بیش‌تر حس می‌کنیم. سوز سرما ناشی از همرفت اجباری است. توان از دست‌دادن گرمای بدن از طریق هدایت اجباری

$$P_{\text{Forced Convection}} = \mathcal{K}S\Delta T$$

ضریب همرفت اجباری \mathcal{K} به سرعت باد بستگی دارد. S مساحت بدن است. فرض کنید در محیطی قرار داریم که دمای هوا 3- درجه سانتی‌گراد و باد آن‌چنان می‌وزد که ضریب همرفت اجباری $\mathcal{K} = 20 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ است.

الف- اگر لباس نازکی تن‌مان باشد، ΔT اختلاف دمای بدن با محیط است. توان اتلافی برای این حالت را حساب کنیم. توان اتلافی تقریباً چند برابر توان حرارتی بدن است.
ب- با لرزیدن توان حرارتی بدن تا سه برابر بزرگ‌تر می‌شود. آیا لرزیدن مشکل را برطرف می‌کند؟

قوانین مقیاسی در زیست‌شناسی

موجودات زنده از نظر اندازه بسیار متنوع‌اند. این تنوع زیستی بسیار زیاد از باکتری‌های بسیار کوچک تا بزرگترین حیوانی که در کره‌ی زمین زندگی می‌کند یعنی نهنگ آبی^۱ است که وزنش به طور میانگین حدود ۱۰۰ تن است. فیل آفریقایی بزرگ‌ترین حیوان روی سطح زمین است. وزن فیل آفریقایی به طور متوسط حدود ۵ تن است. موجودات بسیار کوچک هم هستند. اگر گیاهان را هم در نظر بگیریم، درختانی بسیار بزرگ‌تر هم وجود دارند. درختانی به ارتفاع ۷۰ متر و قطر ۱۰ متر. عمر بعضی از آن‌ها ممکن است به ۳ تا ۴ هزار سال هم برسد. در واقع پیرترین موجودات روی زمین گونه‌ای از درختان هستند. در جدول ۱۰۴ جرم بعضی از موجودات زنده را ببینید. موجودات بزرگ‌تر چه فرق‌ها و چه شباهت‌هایی با موجودات کوچک‌تر دارند؟ آیا روی اندازه‌ی موجودات حدی وجود دارد؟ مایکوپلازما، کوچک‌ترین موجود زنده‌ای است که می‌شناسیم. برای این‌که فعالیت حیاتی داشته باشد، تولید مثل کند و ماکرومولکول‌های حامل اطلاعات ژنتیکی هم ضروری هستند، نمی‌توانند کوچک‌تر از این باشند. احتمالاً مایکوپلازما حد نهایی‌ی پایین برای موجود زنده برای فعالیت حیاتی است. ویروس‌ها حتی از این هم کوچک‌تر هستند. بهای کوچک‌تر شدن این است که آن‌ها تجهیزات سوخت‌وساز و تولید مثل ندارند و فقط از اطلاعات ژنتیکی تشکیل شده‌اند و با یک روش انگلی از موجودات زنده برای تکثیر خود

جدول ۱.۴ جرمِ بعضی از موجوداتِ زنده

| جرم | موجود |
|-----------------|---------------|
| $< 10^{-16}$ kg | مایکوپلازما |
| 10^{-13} kg | باکتریِ متوسط |
| 10^{-10} kg | مژک‌داران |
| 10^{-7} kg | آمیبِ بزرگ |
| 10^{-4} kg | زنبورِ عسل |
| 10^{-1} kg | همستر |
| 10^2 kg | انسان |
| $> 10^5$ kg | نهنگِ آبی |

استفاده می‌کنند.

ما انتظار داریم که موجودِ زنده هم تابعِ قانون‌های فیزیک و شیمی باشد. وقتی می‌خواهیم به آب، نمک، پروتئین، آنزیم، اکسیژن و غیره در موجودِ زنده فکر کنیم ناچاریم از شیمی استفاده کنیم. از طرفِ دیگر قوانین فیزیکی هستند که امکانِ توصیفی کمی از انرژی، انتروپی، انتشار و انتقالِ گرما، انتقالِ نیرو و تکانه، استحکامِ ساختارها و غیره را فراهم می‌کنند. در فصل‌های قبل با استفاده از تحلیلِ ابعادی و انتقالِ گرما و تحلیلِ انرژی در سوخت‌وساز تا حدی با استفاده از قوانین فیزیک در مطالعه‌ی موجودهای زنده آشنا شدیم. در این فصل به قوانینِ مقیاسی در زیست‌شناسی می‌پردازیم.

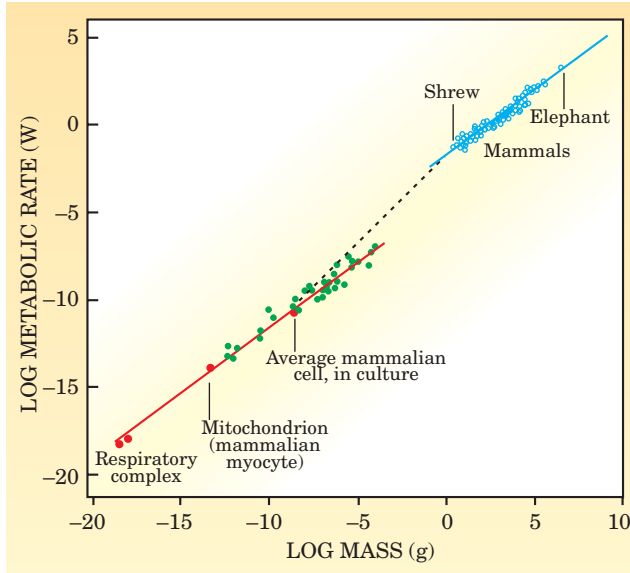
۱.۴ قانونِ کلایبر: سوخت‌وساز و جرم

همان‌طور که در قانونِ کلایبر در شکل (۱.۲) دیدیم، بین سوخت‌وساز پایه، Γ_0 و جرمِ موجودات، M ، رابطه‌ای توانی وجود دارد، که

$$\Gamma_0 = CM^{3/4} \quad (1.4)$$

است. این قانون اولین بار توسطِ ماکس کلایبر^۱ برای پستان‌داران و پرندگان ارائه شد. بعدها

Max Kleiber¹



شکل ۱.۴ سوخت و ساز پایه برای موجودات با جرم‌های مختلف - تعمیم قانون مقیاسی کلاپیر
 Life's universal scaling laws, Physics today, 2004

این قانون به موجودات دیگر از جمله موجودات خون‌سرد، موجودات تک‌سلولی و حتی گیاهان هم تعمیم داده شد. شکل ۱.۴ را ببینید. در این گونه موارد به‌تر است از دو طرف رابطه لگاریتم بگیریم. در این صورت

$$\log \Gamma_0 = \frac{3}{4} \log M + \log C \quad (۲.۴)$$

نمودار $\log B$ بر حسب $\log M$ خطی راست با شیب $\frac{3}{4}$ است.

مثال ۱.۱.۴. یک مرغ‌دار هلندی به یک شرکت مرغ‌داری تعداد زیادی جوجه سفارش داد و برای انتقال آن‌ها یک هواپیمای جت 707 را اجاره کرد تا آن‌ها را به هلند ببرند. ظرفیت این نوع هواپیما حدود 180 نفر است. قرار شد شرکت هواپیمایی حداکثر تعداد جوجه را که می‌تواند، حمل کند. با توجه به این‌که وزن هر جوجه به‌طور میانگین یک کیلو و وزن هر مسافر به‌طور میانگین 70 کیلو است، 12600 جوجه که جرم کل آنها برابر با ۱۸۰ انسان است را منتقل کردند.

نسبت سوخت و ساز این تعداد انسان با جوجه‌ها را مقایسه کنید.

حل.

$$\frac{12600 \times \Gamma_{0\text{chicken}}}{180 \times \Gamma_{0\text{human}}} = 70 \left(\frac{M_{\text{chicken}}}{M_{\text{human}}} \right)^{3/4} \approx 2.9 \quad (۳.۴)$$

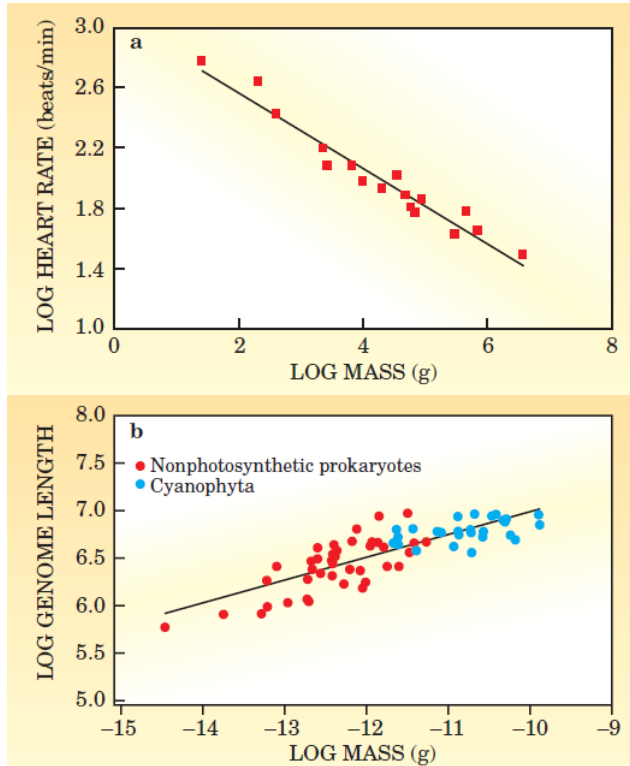
یعنی سوخت‌وسازِ جوجه‌ها حدوداً معادلِ 520 انسان بود. این یعنی حدود سه برابر سوخت‌وسازِ مسافرهایی انسانِ هواپیما وقتی ظرفیتش تکمیل است. بعد از اینکه هواپیما از زمین برخاست، پس از حدود 30 دقیقه، خلبان به خاطر مه که تمام قسمت‌های داخلیِ هواپیما را پُر کرده بود و به یک مشکل اساسی تبدیل شده بود، مجبور شد هواپیما را به زمین بنشاند.



علاوه بر این قانون، روابطِ مقیاسِ دیگری هم در زیست‌شناسی وجود دارد و این قانون‌های ساده‌ی مقیاس‌بندی فقط به سوخت‌وساز محدود نمی‌شود. مثلاً در شکل ۲.۴ نمودارِ لگاریتمِ ضربانِ قلبِ پستان‌داران برحسبِ لگاریتمِ جرم هم یک خطِ راست با شیبِ تقریباً $\frac{1}{4}$ - است. لگاریتمِ طولِ ژنوم به عنوان تابعی از لگاریتمِ جرم سلول برای انواع مختلف ارگانیسم‌های تک‌سلولی هم یک خطِ راست با شیبِ $\frac{1}{4}$ است. در این فصل می‌خواهیم به این موضوع بپردازیم. نرخ سوخت‌وساز، ضربانِ قلب، طولِ عمر و بسیاری از خصوصیات فیزیولوژیکی دیگر موجودات به جرم بدن‌شان مربوط است. داده‌های تجربی نشان می‌دهد که این روابطِ مقیاسی، و به شکلِ توانی با نماهایی معین هستند. با توجه به دینامیک و ساختارِ شبکه‌ی توزیع و انتقالِ ماده یا انرژی در موجودات، مثلاً انتقالِ خون در بدن یا سیستمِ قلبی و عروقی در موردِ پستانداران مطالعاتی در موردِ نماهای توابعِ توانی انجام گرفته است.

۲.۴ قوانین مقیاسی در زیست‌شناسی

گاهی اوقات یک موجود در فرآیند رشدش فقط مقیاس می‌شود، مثلاً قورباغه جز در یک دوره کوتاه در طی چند هفته پس از دگرذیسی به صورت ایزومتریک رشد می‌کند به این معنا که تمام اندازه‌های بدنش در تمام طول عمر متناسب با هم مقیاس می‌شوند. یک اندام که طولش



شکل ۲.۴ قانونِ مقیاسیِ Life's universal scaling laws, Physics today, 2004

ایزومتریک دو برابر می‌شود منجر به این می‌شود که مساحتِ آن اندام چهار برابر شود، در حالی که حجم و جرم هشت برابر می‌شوند. این رفتارِ مقیاسی می‌تواند مشکلاتی را برای موجودات زنده ایجاد کند. مثلاً این موجود حالا هشت برابرِ قبلِ بافتِ فعالِ بیولوژیکی دارد، در حالی که مساحتِ اندام‌هایِ تنفسیِ آن فقط چهار برابر شده‌است که می‌تواند یک عدم انطباق بینِ مقیاس‌سازی و نیازهایِ فیزیکیِ آن ایجاد کند. یا این‌که آن اندام حالا هشت برابر جرم دارد که باید بر پاهایی تکیه کند که قدرت استخوان‌ها و ماهیچه‌هایش به سطح مقطع عرضی آن‌ها بستگی دارد که فقط چهار برابر شده‌اند. این عدم انطباق می‌تواند با تغییر نسبت‌هایِ اندام‌ها در طول رشد، رفع شود.

مثال ۱.۲.۴. بر اساس مشاهده، این واقعیت‌های تقریبی در مورد پستان‌داران دیده شده. تعداد
<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

ضربان قلب همه‌ی پستانداران طی کل عمرشان یکسان است. تعداد ضربان بر واحد زمان با جرم آن به توان $\frac{-1}{4}$ متناسب است.

الف- جرم وال آبی 200 تن و جرم یک پستاندار بسیار کوچک 2 گرم است. نسبت عمر وال آبی به عمر آن پستاندار تقریباً چه قدر است؟

ب- عمر متوسط شیر ۱۰ سال و وزن متوسط آن حدود ۲۰۰ کیلوگرم است. عمر متوسط وال تقریباً چه قدر است؟

حل. الف- تعداد ضربان بر واحد زمان را با n_t ، طول عمر آن پستاندار را با T و تعداد ضربان قلب یک پستاندار در طی کل عمرش را با N نشان می‌دهیم. چون تعداد ضربان قلب همه‌ی پستانداران طی کل عمرشان یکسان است، پس $N = n_t \times T$ برای همه‌ی پستانداران یکسان است. پس

$$\frac{n_{tW} \times T_W}{n_{tS} \times T_S} = 1, \Rightarrow \frac{T_W}{T_S} = \frac{n_{tS}}{n_{tW}} = \left(\frac{m_W}{m_S} \right)^{1/4}$$

$$\frac{T_W}{T_S} = \left(\frac{200 \times 10^3}{2 \times 10^{-3}} \right)^{1/4} = 100$$

ب- نسبت عمر متوسط وال به شیر

$$\frac{T_W}{10} = \left(\frac{200 \times 10^3}{200} \right)^{1/4} = \frac{10}{\sqrt{10}} \approx 5.6 \Rightarrow T_W \approx 56 \text{ Y.}$$

بنا بر این عمر متوسط وال تقریباً پنجاه تا شصت سال است.

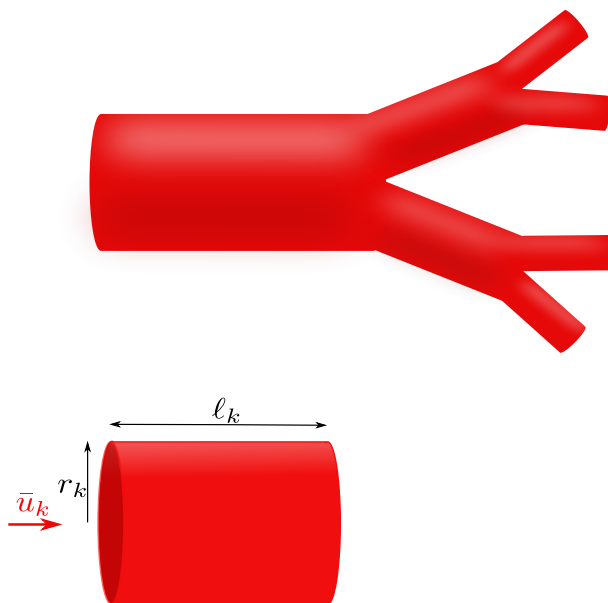


۳.۴ مدل WBE

آلومتری یا رشدسنجی^۱ شاخه‌ای از دانش است که در حوزه‌ی تجزیه و تحلیل آماری شکل و

اندازه‌ی موجودات و هم‌چنین اندام‌های آن‌ها و در کاربردهای عملی مربوط به نرخ رشد اندام‌های مختلف یک موجود زنده استفاده می‌شود. در این بخش می‌خواهیم مکانیزمی برای قانون کلایپر که رابطه‌ای است بین سوخت‌وساز و جرم موجودات ارائه دهیم. این کار توسط وست، براون و انکوویست^۱ در چارچوب مدلی که WBE نامیده می‌شود معرفی شد. آن‌ها در مقالات‌شان برای روابط آلمتری که برای گستره‌ای از موجودات است و قانون کلایپر هم یکی از آن‌هاست، مدلی ارائه دادند. مدل WBE مبنایی نظری و مکانیکی برای درک نقش محوری‌ی اندازه‌ی بدن در همه‌ی جنبه‌های زیست‌شناسی ارائه می‌دهد. روابط مقیاسی‌ی رشدسنجی، از جمله قانون کلایپر با نمای $3/4$ برای سرعت سوخت و ساز مشخصه‌ی همه‌ی موجودات است. برای تبیین نظری‌ی این قانون، مدلی کلی ارائه می‌شود. در این مدل مواد حیاتی‌ی مورد نیاز موجود زنده از شبکه‌ای فراکتالی به همه‌ی اندام‌های موجود زنده می‌رسد، چیزی مثل شبکه‌ی رگ‌ها و خون‌رسانی در بدن پستانداران یا لوله‌های تراشه‌ی حشرات^۲ که همان اعضای تنفسی‌ی حشرات هستند. در این مدل فرض می‌شود که لوله‌های انتقال با اندازه‌ی بدن مقیاس نمی‌شوند و انرژی‌ی تلف‌شده به حداقل می‌رسد. این فرض آخری معادل با کمینه کردن کل مقاومت هیدرودینامیکی‌ی سیستم است. در مدل WBE مدلی کمی برای این رفتار همگانی و آن نمای $3/4$ می‌دهد که می‌تواند ویژگی‌های ساختاری و عملکردی قلب و عروق مهره داران و سیستم‌های تنفسی، سیستم‌های آوندی‌ی گیاهان، لوله‌های تراشه‌ی حشرات و دیگر شبکه‌های توزیع را پیش بینی کند. در این مدل نحوه‌ی انتقال مواد ضروری‌ی آن موجود برای ادامه‌ی حیات (مثلاً خون در بدن انسان) از طریق شبکه‌ای از لوله‌ها به اندام‌های مختلف آن موجود مطالعه می‌شود. این مدل چندین فرض دارد. مثلاً فرض می‌شود که انرژی‌ی تلف‌شده کمینه است. در این مدل روابط مقیاس‌بندی برای سیستم‌های گردش خون پستانداران به دست می‌آید که با داده‌ها مطابقت دارند. علاوه بر آن مدل WBE ویژگی‌های ساختاری و عملکردی سیستم‌های قلبی‌عروقی و تنفسی مهره‌داران، سیستم‌های آوندی‌ی گیاهان، و لوله‌های تراشه حشرات را پیش بینی می‌کند. شبکه‌ای از رگ‌های بدن یک پستان‌دار یا لوله‌های بُرنش در یک سیستم تنفسی را در شکل ۳.۴ می‌بینید. هر رگ به تعدادی رگ منشعب می‌شود. در لایه‌ی k ام شعاع رگ r_k و طول آن l_k و سرعت متوسط خون در آن را \bar{u}_k بگیرید. در لایه‌ی k ام n_k رگ از هر رگ در لایه‌ی قبلی منشعب شده‌اند. بنا بر این

¹insect tracheal tubes² Geoffrey B. West, James H. Brown, Brian J. Enquist¹
<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>



شکل ۳.۴ شبکه‌ای از رگ‌های بدن یک پستان‌دار یا لوله‌های بُرنش در یک سیستم تنفسی.

در این لایه کلاً N_k رگ داریم که

$$N_k := n_0 n_1 \cdots n_k. \quad (۴.۴)$$

فرض می‌شود طول و شعاع رگ‌های منشعب‌شده در هر مرحله یک‌سان باشد. ضرایب مقیاس با روابط

$$\beta_k := \frac{r_{k+1}}{r_k}, \quad (۵.۴)$$

$$\gamma_k := \frac{\ell_{k+1}}{\ell_k}. \quad (۶.۴)$$

تعریف می‌شوند. شار خون در لایه‌ی k ام یعنی حجم خونی که در هر رگ از این لایه در واحد زمان جاری است، عبارت است از

$$Q_k = \pi r_k^2 \bar{u}_k. \quad (۷.۴)$$

کُل شاری که از این لایه می‌گذرد، $N_k Q_k = \pi r_k^2 N_k \bar{u}_k$ است. اما توجه داریم که اگر هیچ اندامی خون‌ریزی نداشته باشد، با استفاده از پایستگیِ خون در بدن این همان شاری است که از قلب خارج شده است. شار در همه‌ی لایه‌ها برابر است. آخرین لایه را لایه‌ی c می‌گیریم. پس

$$Q_0 = N_k Q_k = \pi r_k^2 N_k \bar{u}_k = N_c Q_c. \quad (۸.۴)$$

با در نظر گرفتن این‌که خون اکسیژن و مواد غذایی را منتقل می‌کند، انتظار داریم که سوخت و ساز، B ، با شارِ خونی که از قلب خارج می‌شود متناسب باشد: هر چه خونِ بیش‌تری در واحدِ زمان از قلب خارج شود اکسیژن و مواد غذاییِ بیش‌تری را می‌تواند به اندام‌ها برساند. پس $B \propto Q_0$. کُل حجمِ خون در بدن، V_b برابر است با

$$V_b = \sum_{k=0}^N N_k V_k = \sum_{k=0}^N N_k \pi r_k^2 \ell_k. \quad (۹.۴)$$

با یک فرض می‌توان این سری را ساده و محاسبه کرد: فرض کنیم شبکه‌ی رگ‌ها خود-مانند^۱ است. در این صورت ضرایبِ مقیاس برای همه‌ی لایه‌ها یکی می‌شود. سرخس بارنزلی^۲ مثالی از این مجموعه‌های خود-همانند است. شکل (۴.۴) را ببینید. وقتی می‌گوییم شی‌ای خودهمانند است یعنی مشابه مقیاس‌شده‌ی بخشی از خودش است. این فرض یعنی $\beta_k = \beta$ ، $\gamma_k = \gamma$ و $n_k = n$ در این صورت

$$\begin{aligned} V_b &= \sum_{k=0}^N n^k \pi r_k^2 \ell_k \\ &= \sum_{k=0}^N n^k \beta^{2k} \gamma^k \pi r_0^2 \ell_0 \\ &= \pi r_0^2 \ell_0 \sum_{k=0}^N (n \beta^2 \gamma)^k \\ &= \pi r_0^2 \ell_0 \frac{1 - (n \beta^2 \gamma)^{N+1}}{1 - n \beta^2 \gamma} \\ &= n^N V_c \frac{(n \beta^2 \gamma)^{-N-1} - 1}{(n \beta^2 \gamma)^{-1} - 1} \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$



شکل ۴.۴ سرخس بارنزلی مثالی از این مجموعه‌های خود-همانند است.

در شکل (۳.۴)، $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$ و $n = 2$ است. در هر حال $n > 1$ و $\beta, \gamma < 1$ هستند. پس برای $n\beta^2\gamma < 1$ و با توجه به این‌که $N \gg 1$ است، می‌توان از $(n\beta^2\gamma)^{N+1}$ چشم‌پوشی کرد.

پس

$$V_b \approx \frac{\pi r_0^2 \ell_0}{1 - n\beta^2\gamma} = \frac{V_0}{1 - n\beta^2\gamma} \quad (۱۱.۴)$$

$$\approx \frac{V_c(\beta^2\gamma)^{-N}}{1 - n\beta^2\gamma}. \quad (۱۲.۴)$$

مسائل

۱.۴ در این مسئله می‌خواهیم ببینیم حیوانات تا چه ارتفاعی می‌توانند بپرند. برای پریدن

لازم است عضله‌ای در بدن انرژی‌ی لازم برای این‌کار را فراهم کند. فرض کنید که انرژی

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

خروجی عضله‌ی پرشی، E متناسب با جرم بدن M باشد. ضریب تناسب را مستقل از جرم بگیرید،

$$E = kM.$$

الف- انرژی خروجی عضله‌ی پرشی، E انرژی پتانسیل موجودی که می‌پرد را تامین می‌کند. ارتفاع پرش را h بگیرید. h را بر حسب k ، ثابت گرانش g و احیاناً M به دست آورید.

ب- یک ملخ 3 گرمی می‌تواند 60 سانتی متر بپرد، یک انسان ۷۰ کیلوگرمی چه قدر می‌تواند بپرد؟ از استدلال‌های مقیاسی استفاده کنید.

ب- قاعدتاً در بند قبل نشان دادید که همه‌ی حیوانات مستقل از جرمشان تقریباً به یک ارتفاع می‌توانند بپرند. با برابر گذاشتن انرژی جنبشی در پایین‌ترین نقطه با انرژی پتانسیل، بستگی سرعت برخاستن از زمین به جرم را به دست آورید.

ج- سرعت برخاستن، v را محاسبه کنید.

د- برای رسیدن به این سرعت، موجود شتاب می‌گیرد. شتاب a را ثابت بگیرید. در این صورت $a = \frac{v^2}{2L}$ است. فرض کنید L متناسب با اندازه‌ی آن موجود باشد و هم‌چنین همه‌ی حیواناتی را در نظر بگیرید که بدنشان تقریباً مشابه هم هستند. بستگی این شتاب به جرم را به دست آورید.

ه- برای یک انسان 70 کیلویی، $L = \frac{1}{3}$ متر بگیرید. $\frac{a}{g}$ را به دست آورید.

و- برای یک کک 0.5 میلی‌گرمی $\frac{a}{g}$ را به دست آورید. شتاب a برای انسان و کک را مقایسه کنید.

۲.۴ الف- دیدیم که بین سوخت‌وساز B و جرم موجودات رابطه‌ای توانی وجود دارد، که

$$B = CM^{3/4}.$$

بستگی سوخت‌وساز بر واحد جرم بر حسب جرم چگونه است؟

ب- مرغ مگس‌خوار حدود 20 g و عقاب حدود 5 kg است. نسبت سوخت‌وساز آنها چه قدر است؟ نسبت سوخت‌وساز بر واحد جرم آنها چه قدر است؟ در این صورت

کدام یک کسر بزرگ‌تری از وزن خود را در یک روز می‌سوزاند؟

اگر حجم قلب و حجم خون همه‌ی حیوانات با جرم‌شان M متناسب باشد، تنها راه برای افزایش اکسیژن‌رسانی به اندام‌های بدن، افزایش ضربان قلب است. در این صورت ضربان قلب متناسب با سوخت‌وساز بر واحد جرم است.

ج- اگر تعداد ضربان قلب یک مرد 70 کیلویی 80 بار در دقیقه باشد، تعداد ضربان قلب یک خوکچه‌ی هندی به وزن 0.5 کیلوگرم تقریباً چند بار در دقیقه است؟

د- تعداد ضربان قلب همه‌ی پستان‌داران در کل عمرشان تقریباً 10^9 است. طول عمر یک موش 30 گرمی تقریباً 3 سال است. طول عمر یک فیل 3 تُنی را تخمین بزنید.

ه- انسان‌ها بیش‌تر از آنچه از جرم‌شان به دست می‌آید عمر می‌کنند. طول عمر یک انسان 70 کیلوگرمی که بر اساس محاسبه‌ی مقیاسی‌ی بالا به دست می‌آید، چه قدر است؟ آن را با طول عمر متوسط یک انسان مقایسه کنید.

۳.۴ الف- رابطه‌ای بین نیروی بالابر برای یک پرنده، F ، یعنی نیرویی که پرنده با بال زدن هوا را به پایین پرتاب می‌کند (و طبق قانون سوم نیوتن هوا به پرنده نیرویی رو به بالا وارد می‌کند) به ρ چگالی‌ی هوا، U سرعت بال زدن پرنده و A سطح مقطع بال پرنده بستگی دارد. با استفاده از تحلیل ابعادی رابطه‌ی بین آن‌ها را به دست آورید.

ب- دو پرنده که متشابه هم هستند را در نظر بگیرید. با دو برابر شدن یک طول مشخص از اندازه‌ی پرنده سطح مقطع بال پرنده چند برابر می‌شود؟ سطح مقطع بال پرنده با چه تابعی از یک طول مشخص از اندازه‌ی پرنده مربوط است؟ سطح مقطع بال هر پرنده با چه تابعی از جرم پرنده مربوط است؟

ج- با جاگذاری نیرویی که به دست آورده‌اید، توان پرنده $P = FU$ را به دست آورید. توان را به صورت تابعی به صورت $P \propto U^a M^b$ بنویسید. a و b را به دست آورید.

د- مطابق قانون کلاپر بین سوخت‌وساز پایه، Γ_0 و جرم موجودات، M ، رابطه‌ای توانی وجود دارد $\Gamma_0 = CM^{3/4}$. قاعدتاً توان بیشینه‌ی پرنده هنگام بال‌زدن ضریبی از سوخت‌وساز پایه است، مثلاً چند برابر آن، $P \propto \Gamma_0$. این توان را با نتیجه بند قبل مساوی قرار دهید و از آن‌جا به رابطه‌ای مثل $U \propto M^c$ برسید. c را به دست آورید.

۱.۵ سلول‌ها

^۱ سامانه‌های حیاتی زنده هستند به این معنی که غذا می‌خورند، رشد می‌کنند و تولید مثل می‌کنند. در فرآیند غذا خوردن و سوخت‌وساز مواد را می‌سوزانند و انرژی می‌گیرند ولی انرژی پایسته است. با ساختن اندام‌های جدید اجزای بی‌نظم را در یک ساختار منظم کنار هم می‌چینند. با این کار انرژی آن سیستم کم می‌شود، اما چون انرژی کل نمی‌تواند کاهش یابد، انرژی محیط باید افزایش پیدا کند. علاوه بر این‌ها پردازش اطلاعات می‌کنند و اطلاعات را به نسل‌های بعدی هم منتقل می‌کنند. در حالت پایا بعضی کمیت‌ها پایسته‌اند، مثل انرژی و تعداد اتم‌ها. هر چند به خاطر واکنش‌های شیمیایی تعداد و نوع مولکولها تغییر می‌کنند.

موجودات زنده نه می‌توانند انرژی را مصرف کنند نه می‌توانند آن را به وجود آورند، فقط قادرند انرژی را از حالتی به حالت دیگر تبدیل کنند. انرژی قابل استفاده، به صورت گرما به طبیعت باز گردانده می‌شود. آدنوزین تری فسفات یا ATP، با فرمول $C_{10}H_{16}N_5O_{13}P_3$ ، نوکلئوتیدی است که در سلول‌ها به عنوان حامل انرژی به کار می‌رود. ATP واحد تبادل انرژی (چیزی مثل واحد پول) در سلول‌ها است. آدنوزین تری فسفات با انتقال انرژی خود به مولکولهای

^۱ برای این فصل از سایت U.S. National Library of Medicine استفاده کرده‌ام.
<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

دیگر، گروه انتهایی فسفات خود را از دست داده و به آدنوزین دی فسفات ADP تبدیل می‌شود یا اینکه با از دست دادن دو گروه فسفات، به آدنوزین مونو فسفات AMP تبدیل می‌شود. این فرآورده‌ها نیز مجدداً می‌توانند با کسب فسفات به ای‌تی‌پی تبدیل شوند. آدنوزین فسفات در تمام جانداران برای تبدیل انرژی به کار می‌رود. در فرآیند نورساخت، گیاهان سبز با استفاده از ماده رنگی کلروفیل (پوروفیرین منیزیم) نور را جذب، و در حضور پروتئین‌های آهن‌دار به انرژی ذخیره‌ای ای‌تی‌پی تبدیل می‌کنند.

برای آموزش مباحث این فصل علاوه بر این متن از تعدادی انیمیشن استفاده کردم. چند مورد با لینک هایش این‌ها هستند.

DNA transcription and translation •

From DNA to protein - 3D •

Virus Lytic Cycle •

Inner Life Of A Cell - Full Version •

اگر علاقه‌مند باشید، با کمی زحمت می‌توانید موارد بیشتری را در اینترنت پیدا کنید.

سوالی که در زیست‌شناسی مطرح است، این است که چگونه سلول‌ها این تعداد زیاد از فرآیندهای شیمیایی و واکنش دهنده‌های خود را سازمان‌دهی می‌کنند؟

سلول‌ها واحدهای پایه‌ی حیات هستند. چه به تنهایی و چه در قالب مجموعه‌ای به عنوان اندام مجموعه‌ی مشترکی از فعالیت‌ها را انجام می‌دهند. به تعبیر دقیق‌تر، در حالتی که یک سلول خاص ممکن است همه موارد لیست زیر را انجام ندهد، در بدن ما چند صد گونه سلول مجزا وجود دارد، که هنوز هم پوشانی‌ی کافی بین‌شان هست تا بگوییم همه سلول‌ها اساساً مشابه هستند:

• سلول‌ها انرژی‌ی شیمیایی مصرف می‌کنند. در حالی‌که بخشی از این انرژی به انرژی‌ی مکانیکی‌ی مفید یا سنتز سایر مولکول‌های ذخیره‌کننده‌ی انرژی تبدیل می‌شود، بیش‌تر این انرژی به عنوان گرما دور ریخته می‌شود. این مطلب را تحت عنوان سوخت‌وساز بررسی کردیم.

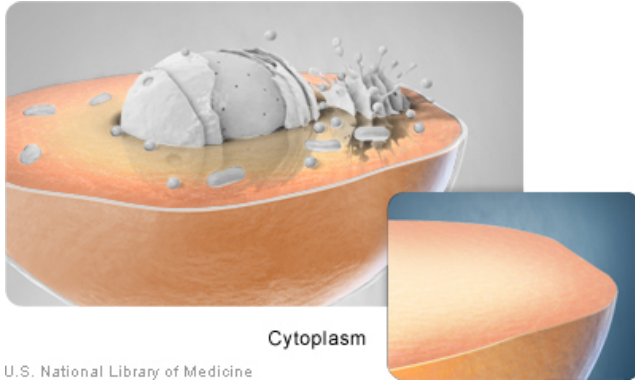
• به طور خاص، هر سلول برای رشد بیش‌تر ساختار داخلی خود را بازتولید می‌کند. بخش اعظم این ساختار شامل یک دسته‌ای از ماکرومولکول‌ها به نام پروتئین است. بدن ما

- دست‌کم حدود 20000 نوع پروتئین مختلف دارد.
 - بیشتر سلول‌ها می‌توانند در فرآیندی ساختار خود را تکثیر کنند.
 - همه‌ی سلول‌ها با وجود شرایط بیرونی بسیار متفاوت، یک ترکیب داخلی خاص را حفظ می‌کنند. سلول‌ها معمولاً حجم داخلی ثابتی دارند.
 - با ثابت‌نگه‌داشتن اختلاف چگالی یون‌های مثبت و منفی، بیش‌تر سلول‌ها اختلاف پتانسیل الکتریکی بین فضای داخلی خود و جهان خارج را حفظ می‌کنند.
 - سلول‌های ماهیچه‌ای از این پتانسیل برای نیازهای علامت‌دهی (فرستادن سیگنال) استفاده می‌کنند.
 - بسیاری از سلول‌ها برای حرکت از خزیدن یا شنا استفاده می‌کنند. فیزیک‌پیشه‌ها هنوز علاقه‌مندند چنین حرکتی را مدل کنند.
 - سلول‌ها شرایط محیطی را برای اهداف مختلف سنجش می‌کنند:
 ۱. سنجش محیط می‌تواند یک مرحله از عملیاتی باشد که ترکیب داخلی سلول را تنظیم می‌کند.
 ۲. سلول‌ها می‌توانند رفتار خود را در پاسخ به فرصتها یا مشکلات تغییر دهند.
 ۳. سلول‌های منفرد حتی می‌توانند در مواجهه با سلول‌های دیگر حمله، دفاع و یا فرارکنند.
 ۴. سلول‌های عصبی و ماهیچه‌ای خاصی وجود دارند که می‌توانند چگالی موضعی مولکول‌های کوچک خاصی در هم‌سایگی‌شان را بسنجند.
 - سلول‌ها می‌توانند شرایط داخلی خود را به عنوان بخشی از حلقه‌های بازخورد و کنترل بسنجند. به عنوان مثال، عرضه‌ی فراوان یک محصول خاص می‌تواند منجر به خاتمه‌ی تولید آن محصول شود.
 - یک سلول حتی می‌تواند خود را از بین ببرد. این بخشی طبیعی از رشد ارگانیسم‌های بالاتر است، برای توسعه‌ی مغز، نوروهای غیرضروری از بین می‌روند.
- علاوه بر هم‌پوشانی زیادی که بین عمل‌کردهای همه‌ی سلول‌ها وجود دارد، بین معماری داخلی آن‌ها در مقیاس درشت هم اشتراک زیادی می‌بینیم: بیشتر سلول‌ها مجموعه‌ی مشترکی از ساختارهای شبه-دائمی دارند که بسیاری از آنها در میکروسکوپ‌های نوری قابل مشاهده‌اند.

اما برای دیدن برخی از زیرساختارها از میکروسکوپ الکترونی استفاده می‌شود. ابزاری که با وضوح بهتری می‌توان دید ولی نیاز به کشتن سلول‌ها دارد.

سلول‌ها بخش‌های زیادی دارند که هر کدام عمل‌کرد متفاوتی دارند. بعضی از آن‌ها ساختارهایی هستند که وظایف مشخصی را درون سلول انجام می‌دهند. بعضی از بخش‌های اصلی سلول‌های انسانی این‌ها هستند:

Cytoplasm درون سلول‌ها، سیتوپلاسم از مایعی ژله‌ای و سایر سازه‌هایی که هسته را احاطه کرده اند ، تشکیل شده است.



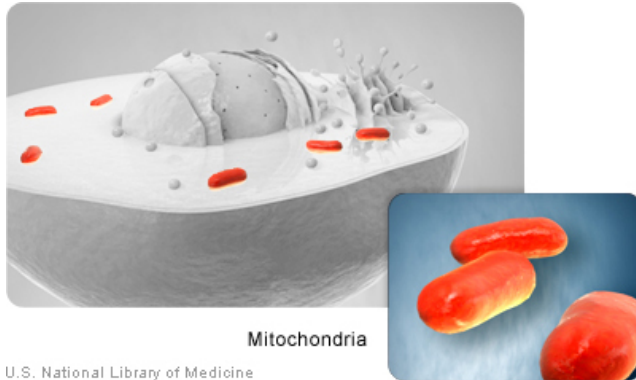
U.S. National Library of Medicine

شکل ۱.۵ سیتوپلاسم U.S. National Library of Medicine

Cytoskeleton اسکلت سلولی شبکه‌ای از الیاف بلند است که چارچوب ساختاری سلول را تشکیل می‌دهد و چندین کارکرد مهم دارد، از جمله تعیین شکل سلول، شرکت در تقسیم سلولی و فراهم کردن امکان حرکت سلول. علاوه بر این‌ها سیستمی مسیرمانند را فراهم می‌کند که حرکت‌ها درون سلول را هدایت می‌کند.

Mitochondria میتوکندریا (یا میتوکندری) اندامک‌های پیچیده‌ای هستند که انرژی را از غذا به شکلی تبدیل می‌کنند که سلول بتواند از آن استفاده کند. آن‌ها ماده ژنتیکی خاص خود را دارند که از دی‌ان‌ای موجود در هسته جداست و می‌توانند نسخه‌هایی از خودشان تهیه کنند.

Nucleus هسته مرکز فرماندهی سلول است، مواردی مثل رشد، بلوغ، تقسیم سلولی یا مرگ سلول. علاوه بر این جای‌گاه دی‌ان‌ای ماده وراثتی سلول است. هسته توسط غشایی به

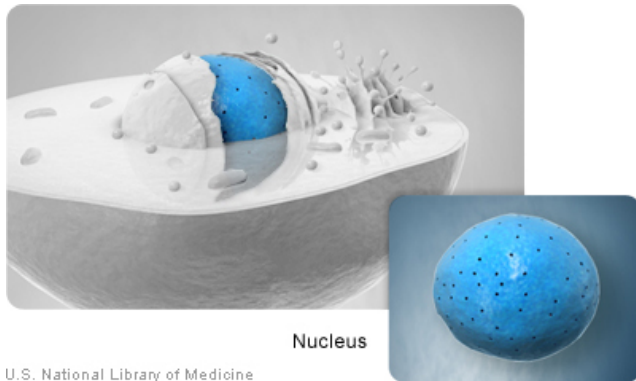


Mitochondria

U.S. National Library of Medicine

شکل ۲.۵ میتوکندری U.S. National Library of Medicine

نام پاکت هسته احاطه شده است، که از دی‌ان‌ای محافظت و هسته را از بقیه‌ی سلول جدا می‌کند.



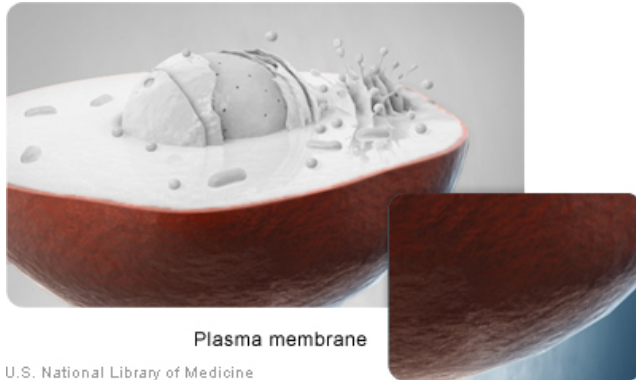
Nucleus

U.S. National Library of Medicine

شکل ۳.۵ هسته U.S. National Library of Medicine

Plasma membrane غشای پلاسمایی پوشش بیرونی سلول است. سلول را از محیط پیرامونش جدا می‌کند و اجازه می‌دهد که مواد وارد سلول شوند و یا از آن خارج شوند.

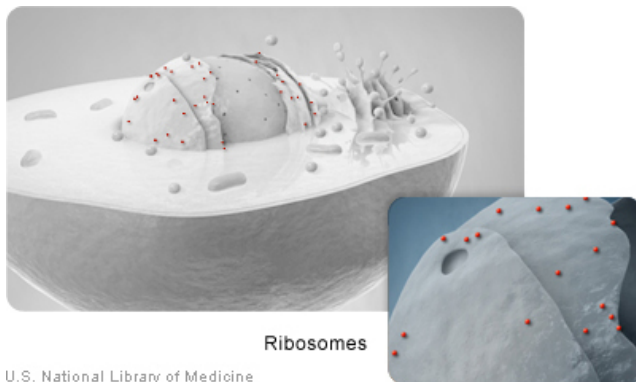
Ribosomes اندامک‌هایی هستند که دستورالعمل‌های ژنتیکی سلول را برای ایجاد پروتئین پردازش می‌کنند. این اندامک‌ها می‌توانند آزادانه در سیتوپلاسم شناور شوند یا به شبکه آندوپلاسمی متصل شوند.



Plasma membrane

U.S. National Library of Medicine

شکل ۴.۵ غشای پلاسمایی U.S. National Library of Medicine



Ribosomes

U.S. National Library of Medicine

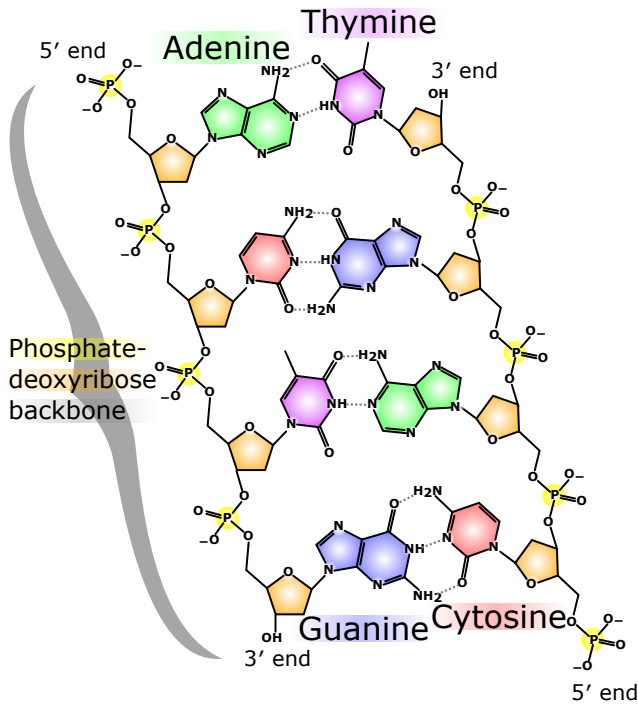
شکل ۵.۵ U.S. National Library of Medicine

DNA ۲.۵

دی‌ان‌ای یا دی‌اکسی‌ریبونوکلیک اسید^۱، ماده‌ای ژنتیکی در انسان و تقریباً همه‌ی موجوداتِ دیگر است که از مولکول‌هایی به نام نوکلئوتید تشکیل شده است. هر نوکلئوتید حاوی یک گروه فسفات، یک گروه قند و یک باز نیترोजن است. شکل (۶.۵) را ببینید.

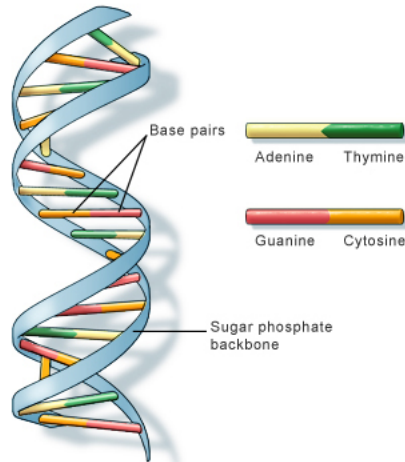
تقریباً همه‌ی سلول‌های بدن دی‌ان‌ای یک‌سان دارد. بیشتر دی‌ان‌ای در هسته سلول است، اما مقدار کمی از آن را می‌توان در میتوکندری هم پیدا کرد. میتوکندری^۲ ساختاری است که

^۱ Mitochondria ^۲ Deoxyribonucleic acid

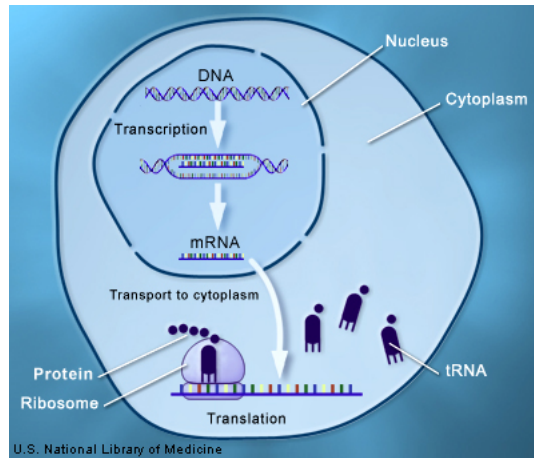


شکل ۶.۵ ساختار شیمیایی دی‌ان‌ای / Chemical Structure of DNA

درون سلول وجود دارد و انرژی حاصل از غذا را به شکلی قابل استفاده برای سلول تبدیل می‌کند. اطلاعات موجود در دی‌ان‌ای به عنوان کدی از چهار باز: آدنین (A)^۱، گوانین (G)^۲، سیتوزین (C)^۳ و تیمین (T)^۴ ساخته شده است. ترتیب این بازها همان چیزی است که دستورالعمل‌های دی‌ان‌ای یا کد ژنتیکی را تعیین می‌کند. دی‌ان‌ای انسان از حدود ۳ میلیارد باز تشکیل شده است که بیش از 99% از این بازها در همه‌ی افراد یک‌سان است. ترتیب یا توالی‌ی این بازها، اطلاعات لازم برای ساخت و نگهداری از یک اندام را تعیین می‌کند، همان‌طور که وقتی حروف الفبا به ترتیب خاصی کنار هم قرار می‌گیرند، کلمات و جملات را می‌سازند. بازهای دی‌ان‌ای با یکدیگر جفت می‌شوند: A با T و C با G تا واحدهایی به نام جفت‌باز تشکیل دهند. هر باز نیز به یک مولکول قند و یک مولکول فسفات وصل می‌شود. یک باز، قند و فسفات با هم یک نوکلئوتید



U.S. National Library of Medicine



U.S. National Library of Medicine

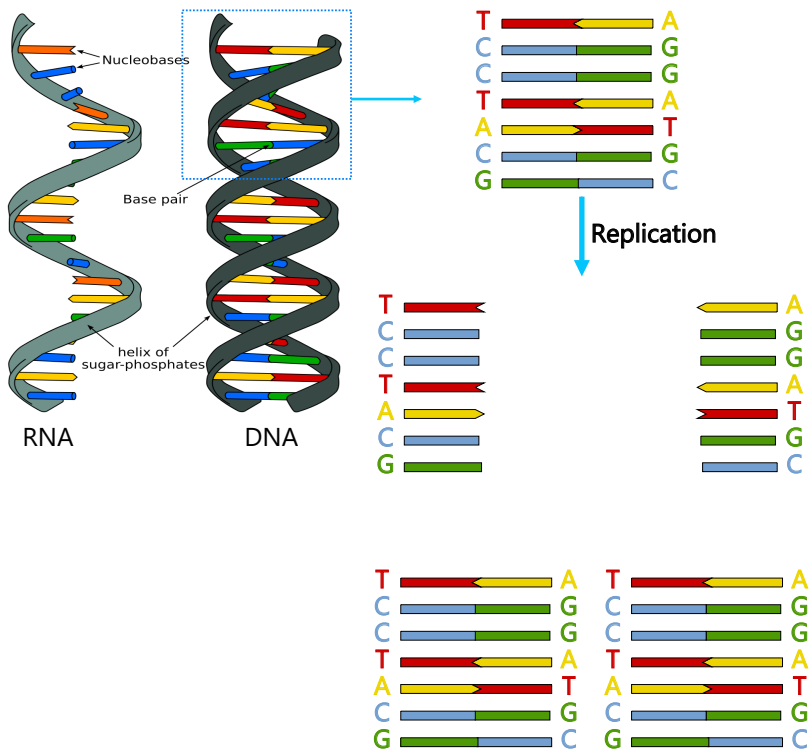
شکل ۷.۵ ساختار دی‌ان‌ای و تولید پروتئین U.S. National Library of Medicine

را می‌سازند. نوکلئوتیدها در دو رشته‌ی بلند مرتب شده‌اند که مارپیچی به نام مارپیچ دوگانه^۱ را می‌سازند. ساختار مارپیچ دوگانه تقریباً شبیه نردبانی است که جفت‌های باز، پله‌های نردبان را می‌سازند و مولکول‌های قند و فسفات قسمت‌های اصلی‌ی نردبان هستند. یکی از ویژگی‌های مهم دی‌ان‌ای این است که می‌تواند تکثیر شود یا نسخه‌های جدیدی از خود بسازد. هر رشته دی‌ان‌ای در مارپیچ دوگانه می‌تواند به عنوان الگویی برای تکثیر رشته‌ی بازها کمک کند. این مساله در هنگام تکثیر سلولی بسیار مهم است، زیرا هر سلول جدید نیاز به یک رونوشتی دقیق از دی‌ان‌ای موجود در سلول قدیمی دارد.

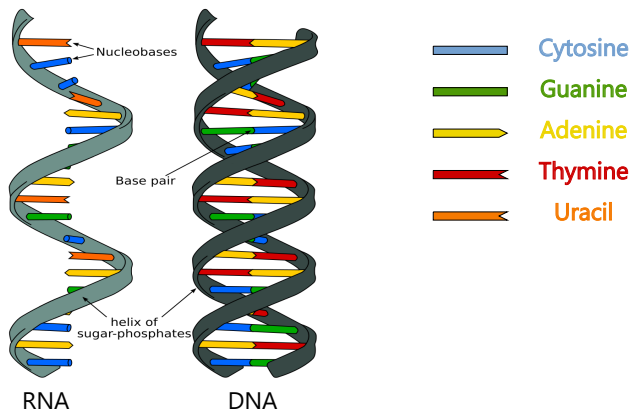
- اطلاعات مربوط به اجرای برنامه سلولی در دنباله‌ی دی‌ان‌ای ذخیره می‌شود.
- دی‌ان‌ای مانند سخت‌افزار (هارد دیسک) رایانه است.
- دی‌ان‌ای اطلاعات را ذخیره می‌کند و حاوی برنامه‌هایی است که در زمان‌های مشخص اجرا می‌شوند
- هر پروتئین دنباله‌ی خاصی در دی‌ان‌ای دارد که ژن نامیده می‌شود، و این دی‌ان‌ای به عنوان دی‌ان‌ای کُدکننده شناخته می‌شود، زیرا برای پیام‌هایی که پروتئین ایجاد می‌کند کُد می‌شود.
- اکثر دنباله‌ی دی‌ان‌ای برای ژن کُدگذاری نمی‌کند و به عنوان دی‌ان‌ای غیر کُدکننده شناخته می‌شود.
- این دی‌ان‌ای غیر کُدگذاری کننده است که شامل ”برنامه‌ها” است که تعیین می‌کند ژنها در یک زمان یا مکان معین ساخته شوند.
- سلول‌های مختلف برنامه‌های مختلفی را اجرا می‌کنند و بنابراین ژن‌های متفاوتی ایجاد می‌کنند.

در شکل ۸.۵ نحوه‌ی تکثیر^۲ DNA را می‌بینید. در شکل بخشی از مارپیچ دوگانه‌ی DNA که با خط چین مشخص شده را باز کرده‌ایم. دو رشته از هم جدا شده و هرکدام مطابق قاعده‌ای که گفتیم با بازهای مکمل خود، یعنی A با T و C با G مارپیچ دوگانه‌ی جدیدی می‌سازند. مارپیچ‌های جدید از یک رشته‌ی قدیمی و یک رشته‌ی جدید ساخته شده‌اند.

بیشتر ژنها حاوی اطلاعات مورد نیاز برای ساختن پروتئین هستند. عملیات ساخته‌شدن پروتئین پیچیده و با کنترل دقیق در سلول انجام می‌شود. این کار شامل دو مرحله اصلی است:

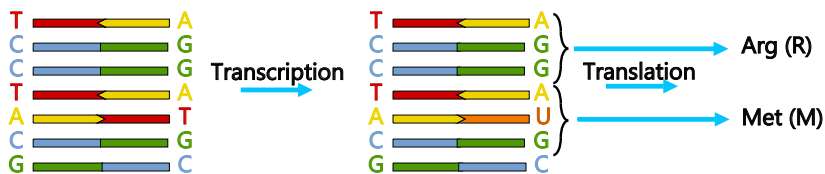


شکل ۸.۵ تکثیر دی‌ان‌ای [Wikimedia Commons](https://commons.wikimedia.org/)



شکل ۹۰۵ ساختار دی‌ان‌ای و آر‌ان‌ای [Wikimedia Commons](#)

رونویسی^۱ و ترجمه^۲. در فرآیند رونویسی، اطلاعات ذخیره شده در دی‌ان‌ای به مولکولی مشابه به نام RNA (اسید ریبونوکلیئیک)^۳ در هسته سلول منتقل می‌شود. هر دوی آر‌ان‌ای و دی‌ان‌ای از زنجیره‌ای از نوکلئوتید ساخته شده‌اند. شکل ۹۰۵ را ببینید. همان‌طور که از شکل هم پیداست دو فرق عمده بین این دو است: اول این‌که دی‌ان‌ای دو رشته‌ی قند و فسفات دارد، در حالی که آر‌ان‌ای یک رشته‌ی قند و فسفات دارد. علاوه بر این آر‌ان‌ای باز T ندارد و به جای آن باز U اُراسیل^۴ دارد. در مرحله‌ی رونویسی که درون هسته انجام می‌شود با استفاده از یک رشته از DNA رشته‌ای ساخته می‌شود که شبیه مکمل همان رشته است که به جای باز T باز U نشسته است. ترجمه، یعنی دومین مرحله از تولید پروتئین، در ریبوزوم^۵ صورت می‌گیرد. شکل ۱۰۰۵ را ببینید. در این فرآیند به هر دنباله از سه باز یک کُد نسبت می‌دهیم برای یک اسید



شکل ۱۰۰۵ بازنویسی و ترجمه

آمینو خاص کُدگذاری می‌شود. به هر یک از این دنباله‌ها یک کُدان^۱ می‌گوییم. در هر جای‌گاه چهار بازِ مختلف می‌تواند باشد. در این صورت ۶۴ کُدانِ مختلف داریم. از این تعداد یک کُدان AUG برای شروع کُد و سه کُدان UGA, UAG و UAA برای خاتمه‌ی کُدگذاری هستند. بقیه‌ی کُدان‌ها هر کدام علامتی برای ساختن یک آمینو اسید هستند. اسیدهای آمینو بلوک‌های ساختاری پروتئین‌ها هستند. از کنارهم قرارگرفتن تعدادی اسیدآمینو پروتئین ساخته می‌شود. در شکل ۱۱.۵ دستورالعمل ترجمه‌ی کُد را می‌بینید. سه باز یک کُدان به ترتیب از درونی‌ترین باز تا بیرونی‌ترین باز هستند. لایه‌ی آخر در شکل مربوط به آمینواسید متناظر با کُدان‌ها هستند. مثلاً کُدان AUG برای آمینواسید متیونین^۲ Met (M) است.

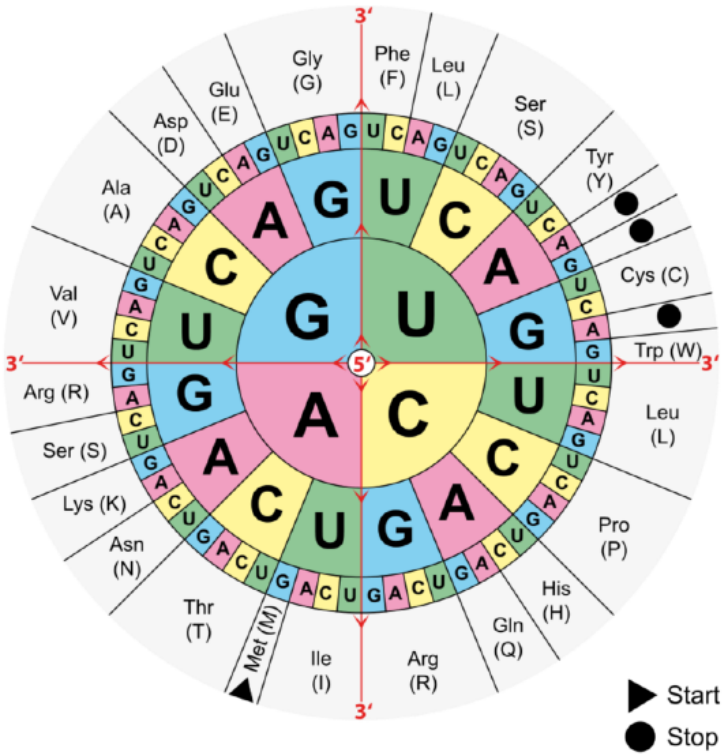
۳.۵ ژن و کروموزوم

ماده‌ی اصلی و پایه‌ی وراثت ژن است. ژن بخشی از دی‌ان‌ای است. عمل کردِ بعضی از ژن‌ها دستورالعمل برای ساختن پروتئین است. با این حال، بسیاری از ژن‌ها پروتئین کُد نمی‌کنند. در انسان، اندازه‌ی ژن‌ها می‌تواند از چند صد تا بیش از ۲ میلیون باز دی‌ان‌ای باشد. در پروژه‌ی ژنوم انسانی تخمین زده می‌شود که انسان‌ها بین 20000 تا 25000 ژن داشته باشند.

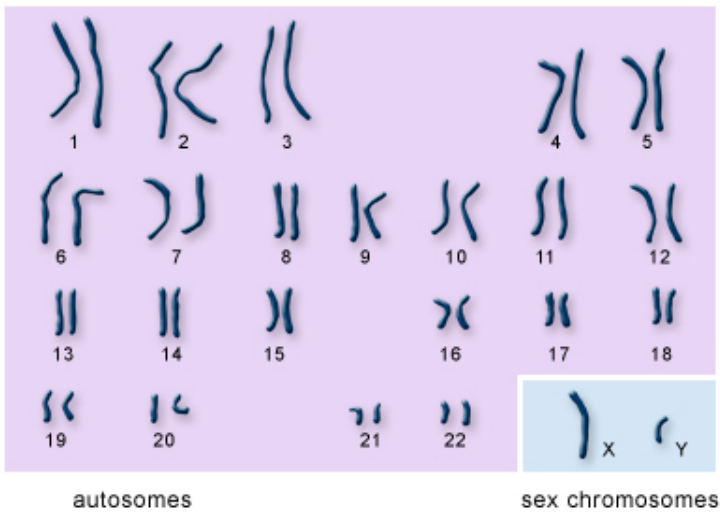
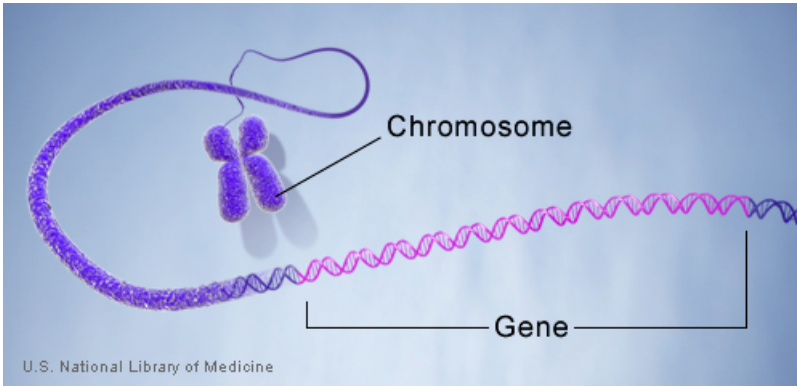
هر فرد دو نسخه از هر ژن دارد، که یکی از آن‌ها را از هر کدام از والدین به ارث می‌برد. اکثر ژن‌ها در همه‌ی افراد یک‌سان هستند، اما تعداد کمی از ژن‌ها (کمتر از ۱ درصد از کل) بین افراد کمی متفاوت است. همین اختلاف اندک است که باعث ویژگی‌های منحصر به فرد هر شخص می‌شود.

در هسته‌ی هر سلول، مولکول دی‌ان‌ای درون ساختارهایی نخ‌مانند به نام کروموزوم بسته‌بندی می‌شود. هر کروموزوم از دی‌ان‌ای که چندین بار محکم به دور پروتئین‌هایی پیچیده شده، ساخته شده است. در انسان‌ها معمولاً در هر سلول ۲۳ جفت کروموزوم وجود دارد. بیست و دو مورد از این جفت‌ها در مردان و زنان یک‌سان هستند. جفت ۲۳^{ام}، کروموزوم‌های جنسی، بین زن و مرد متفاوت است. زن‌ها دو نسخه از کروموزوم X دارند، در حالی که مرد‌ها یک کروموزوم X و یک Y دارند.

^۱ Codon^۲ methionine



شکل ۱۱.۵ دستورالعمل ترجمه‌ی کُد. سه بازِ یک کُدان به ترتیب از درونی‌ترین باز تا بازِ بیرونی هستند. کُدان AUG برای شروع کُد و سه کُدان UAG, UGA و UAA برای خاتمه‌ی کُدگذاری هستند. آخرین لایه مربوط به آمینواسیدِ متناظر با کُدان‌ها هستند.



شکل ۱۲.۵ ژن و کروموزوم U.S. National Library of Medicine

ژنوم^۱ انسان همه‌ی اطلاعاتیِ ژنتیکی یک فرد است که شامل دی‌ان‌ای هسته و میتوکندری است. ژنوم دستورالعمل‌های ارثی برای ساخت، پیش‌برد و نگهداریِ یک موجود زنده است. بدن انسان حدوداً از پنجاه تا صد میلیارد سلول تشکیل شده که در هر سلول تمام دستورالعمل‌های کدگذاری شده‌ی لازم برای هدایتِ تمامیِ فعالیت‌های سلول و ساختِ پروتئین‌های لازم، موجود است. هر گروه کامل از این دستورالعمل‌های ما ژنوم است.

ژنوم از چهل و شش مولکولِ دی‌ان‌ای متمایز از هم به نام کروموزوم تشکیل شده است. در باکتری‌ها و اشکال ساده‌تر زندگی، ژنوم تنها حاویِ یک کروموزوم است. کروموزوم‌های انسانی از نظر اندازه و اطلاعات بسیار گسترده و گوناگون هستند. کروموزوم‌های انسان بیشترین تعداد ژن‌ها یعنی بیش از پنجاه هزار ژن را دارند. کروموزوم Y در انسان کمترین تعداد ژن یعنی ۲۳۱ عدد است. ژنوم انسان حاوی بیش از سه میلیارد ذره‌ی رمزیِ دی‌ان‌ای است که در کروموزوم‌ها قرار دارند. ژنوم انسان که در دی‌ان‌ای ذخیره شده است، مثل کتاب‌خانه‌ای است که شامل ۴۶ کتاب (کروموزوم) است. کتاب‌ها بین ۴۰۰ تا ۳۳۴۰ صفحه (ژن) دارند و هر کتاب بین ۴۸ تا ۲۵۰ میلیون حرف (نوکلئوتید) کوچک دارد. یک کپی از کتابخانه (تمام ۴۶ کتاب) در تقریباً همه سلول‌های بدن ما قرار دارد. تهیه‌ی نقشه و توالی ژنوم انسان از سال ۱۹۸۸ در آمریکا شروع شد. این تلاش بزرگ برای پروژه‌ی ژنوم انسان به سرعت به یک تحقیق جهانی تبدیل شد و سرانجام در سال ۲۰۰۳ این پروژه به پایان رسید.

گاهی ممکن است در فرآیند تکثیرِ دی‌ان‌ای تغییری خودبه‌خودی رخ دهد. به تغییر جهش^۲ می‌گویند. جهش گاهی باعث می‌شود کُد اشتباهی تولید شود. در این صورت پروتئینی ناقص تولید می‌شود. گاهی نتیجه به صورت تغییر در ژن و ظاهر فرد یا تغییری در یک ویژگی یا صفت مشاهده شود. بعضی از جهش‌ها ممکن است هیچ تأثیری در زیست آن موجود نداشته باشند یا ممکن است مضر باشند. گاهی هم ممکن است باعث سازگاریِ بیشتر با محیط شوند. بعضی از بیماری‌ها ژنتیکی هستند. بیماری‌های ژنتیکی در اثر وقوع انواع مختلف جهش‌ها در ژن‌ها ایجاد می‌شوند، مثلاً اخیراً هم‌بستگی بین تومور مغز در کودکان و بخشی از دی‌ان‌ای آن‌ها مشاهده شده است. این لینک را ببینید

New cancer-driving mutation discovered in the “dark matter” of the cancer

genome

۴.۵ ویروس

ویروس‌ها بسته‌های کوچکی از مواد ژنتیکی هستند که در بسته‌ای از پروتئین قرار دارند. آنها به تنهایی قادر به سوخت‌وساز یا تولید مثل نیستند، بنابراین بعضی دانش‌پیشه‌ها بنا به تعریف آنها را به عنوان موجود زنده در نظر نمی‌گیرند. با این حال، آنها می‌توانند یک سلول را آلوده کرده و عمل‌کردهای سوخت‌وسازی و تولیدمثلی آن را کنترل کنند. اندازه‌ی ویروس از 20 nm تا 300 nm است، مثلاً ویروس HIV که باعث ایدز می‌شود تقریباً کروی است و قطر آن در حدود 120 nm است. بیش‌تر ویروس‌ها کوچک‌تر از آن هستند که به راحتی بتوان با میکروسکوپ نوری آنها را دید. قدرت تفکیک میکروسکوپ با طول موج نور، که حدود 500 nm است، محدود می‌شود. بنابراین، با استفاده از میکروسکوپ نوری می‌توانیم سلول‌ها را با جزئیات مطالعه کنیم، می‌توانیم باکتریها را البته بدون تفکیک بالا ببینیم، ولی ویروس‌ها را ممکن است به سختی بتوان دید.

ویروس انگل داخلی سلولی کوچکی است که طبق تعریف یا حاوی آر‌ان‌ای یا ژنوم دی‌ان‌ای است و توسط یک پوشش پروتئینی یا کپسید^۱ احاطه شده. ویروس برای انتقال متکی به سلول‌هایی است که نقش میزبان را دارند. ویروس آر‌ان‌ای یا دی‌ان‌ای خود را برای رونویسی و ترجمه به سلول میزبان می‌فرستد. بدون سلول میزبان، ویروس‌ها قادر به تکثیر نیستند. آنها نمی‌توانند پروتئین‌ها را سنتز کنند، زیرا فاقد ریبوزوم هستند و باید از ریبوزوم سلول‌های میزبان خود برای ترجمه‌ی آر‌ان‌ای پیام‌رسان ویروسی به پروتئین‌های ویروسی استفاده کنند. ویروس‌ها نمی‌توانند به صورت ای‌تی‌پی انرژی تولید یا ذخیره کنند، و مجبورند انرژی خود و سایر عمل‌کردهای مربوط به سوخت‌وساز خود را از طریق سلول میزبان انجام دهند. طبقه‌بندی ویروس‌ها معمولاً بر اساس موجوداتی است که آلوده می‌کنند، مثلاً حیوانات، گیاهان یا باکتری‌ها. البته ویروس‌ها نمی‌توانند به دیواره‌ی سلول‌های گیاهی نفوذ کنند. تقریباً همه‌ی ویروس‌های گیاهی توسط حشرات یا موجودات زنده‌ی دیگر که از گیاهان تغذیه می‌کنند، منتقل می‌شوند. ویروس یک

”دُم“ دارد که با استفاده از پین‌های پروتئینی به سطح باکتری متصل می‌شود. شاخه‌ی دم به دیواره‌ی سلول و غشای زیرین نفوذ میکند و نوکلئیک‌اسیدهای ویروسی را به سلول تزریق میکند. ویروس‌ها شکل‌های مختلفی دارند، اما در حالت کلی ساختمان ویروس‌ها شامل ژنوم یا نوکلئیک‌اسید و پوششی از پروتئین به نام کپسید است. ژنوم ویروس‌ها عبارت است از نوعی نوکلئیک‌اسید که بر مبنای نوع آن، ویروس‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند. ویروس‌های حاوی دی‌ان‌ای یا دی‌ان‌ای. عفونت‌زایی ویروس‌ها فقط و فقط حاصل فعالیت داخل سلولی نوکلئیک‌اسید یا ژنوم آنهاست. به همین دلیل تا وقتی خارج از سلول هستند، ویروس و ژنومش هیچ‌گونه فعالیتی ندارند و مثل یک مولکول بزرگ هستند. ویروس‌ها به علت نداشتن هیچ‌گونه ساختار سلولی و این‌که قادر به سوخت‌وساز و فعل و انفعال شیمیایی نیستند، به تنهایی قادر به تکثیر خود نیستند. برای تکثیر باید درون سلولی نفوذ کنند تا از انرژی و ساختار پروتئین‌سازی سلول زنده استفاده کنند. انتقال ویروس به داخل سلول هم فقط توسط سلول امکان‌پذیر است و این عمل فقط توسط سلول حساس و حامل گیرنده‌های آشنا به ویروس انجام می‌شود. سلول‌هایی که این نوع گیرنده‌ها را برای جذب ویروس آماده دارند احتمالاً می‌توانند انواع مختلف ویروس‌ها را منتقل کنند. سلول در مقابل ویروس مقاوم است و هرگونه تماسی با ویروس بی‌نتیجه است. اما با ورود به داخل سلول توسط آنزیم‌های سلول، فعالیت نوکلئیک‌اسیدی ویروس شروع می‌شود. نوکلئیک‌اسید ویروس ژن‌های کافی برای مهار کردن و به خدمت‌گرفتن سوخت‌وساز سلول میزبان را دارند و به کمک آن فعل و انفعال‌های شیمی‌ی حیاتی برای تکثیر خود را توسط سلول میزبان تأمین می‌کند. بعضی ویروس‌ها مشترک انسان و بعضی حیوان‌ها هستند. یعنی هم سلول انسان و هم آن حیوان خاص می‌توانند میزبانی برای تکثیر آن ویروس باشند. همان‌طور که قبلاً دیدیم در فرآیند تکثیر و رونویسی دی‌ان‌ای ممکن است جهش رخ دهد. مثلاً ویروس آنفولانزا بارها جهش پیدا می‌کند و به همین دلیل است که هرچند ما قبلاً هم آنفولانزا گرفته‌ایم، هر ساله ممکن است مجدداً به آنفولانزا دچار شویم. علاوه بر این وقتی ویروس جهش پیدا می‌کند ممکن است رام‌تر یا وحشی‌تر شود. راهی برای شناخت یک ویروس شناخت دی‌ان‌ای آن ویروس است. اگر برای ویروسی واکسن تهیه شود و آن ویروس دچار جهش شود، بسته به آن‌که آن جهش در ناحیه‌ای از دی‌ان‌ای باشد که قرار است غیرفعال شود یا ناحیه‌ی دیگر، ممکن است آن واکسن دیگر کارایی نداشته باشد. اخیراً برای ویروس کرونا واکسن‌هایی ساخته شده است که در مرحله‌ی

آزمون است. در دانمارک مزرعه‌های تولید مینک (حیوانی از خانواده‌ی راسو که برای استفاده از خز آن‌ها پرورش‌شان می‌دهند) وجود دارد. مینک‌ها هم بیماری‌های تنفسی از جمله آنفولانزا و کرونا می‌گیرند. اخیراً تعدادی از مینک‌ها از کارگران مزرعه کرونا گرفته‌اند. این ویروس در بدن آن‌ها جهش پیدا کرده و مجدداً انسان‌هایی از این مینک‌های مریض کرونا گرفته‌اند. سوال این است که واکسن‌های تولیدی برای پیش‌گیری از کرونا‌ی جهش‌یافته‌ی جدید هم کارآ هستند؟ مطابق اخبار در دانمارک حدود ۱۷ میلیون مینک را معدوم کرده‌اند. در مقاله‌ی زیر یک جهش در ویروس کرونا مطالعه شده است:

Spike mutation D614G alters SARS-CoV-2 fitness.

مسائل

۱۰۵ روی سطح ویروس کرونا پروتئین شاخه‌ای است که وقتی ویروس وارد بدن می‌شود با استفاده از آن به سلول می‌چسبد. در یکی از انواع واکسنی که اخیراً برای ویروس کرونا تدارک دیده شده بدن به جای آن‌که با ویروس ضعیف شده‌ی ویروس آلوده شود با پروتئین شاخه‌ای که روی سطح ویروس است، آشنا می‌شود. در واقع حتی پروتئین هم به بیمار تزریق نمی‌شود بل‌که دنباله‌ای که بدن با استفاده از آن پروتئین را می‌سازد به بدن تزریق می‌شود. با استفاده از این دنباله بدن پروتئین را می‌سازد. سیستم دفاعی بدن هم در مقابل این پروتئین پادتن لازم را می‌سازد. این پادتن هرگاه بدن با ویروس واقعی کرونا مواجه شود به آن حمله می‌کند و جلوی بیماری را می‌گیرد. بخشی از این دنباله

AUGUUCGUUUCCUUGUUCUG... (۱۰۵)

است. آمینواسیدها و پروتئینی که بدن بر مبنای این دنباله می‌سازد چیست؟

۲۰۵ یک مینی-پروتئین فرضی‌ی

M(Met) – H(His) – E(Glu) – R(Arg) – S(Ser) – T(Thr) (۲۰۵)

که از ۶ آمینواسید تشکیل شده را در نظر بگیرید.

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

الف- رشته‌ی RNA ای که به این آمینو اسید کُد می‌شود، از چند نوکلئوتید تشکیل شده است؟

ب- چند رشته‌ی RNA ی مختلف می‌توانند به این مینی- پروتئین فرضی کُد شوند؟ چهار تا از آن‌ها را مثال بزنید.

۲.۵ در ژنوم تب‌خال، نوکلئوتیدهای A ، G ، C و T به ترتیب با احتمال‌های 35%، 35%، 15% و 15% رخ می‌دهند. احتمال اینکه قطعه‌ی دی‌ان‌ای انتخاب شده به طول ۱۵ قطعه حاوی‌ی هشت C یا G و هفت A یا T باشد، چقدر باشد؟

۴.۵ یک آغازگرِ دی‌ان‌ای^۱ یک شاخه از رشته‌ی دی‌ان‌ای است که برای اتصال به یکی از رشته‌های یک مولکولِ دی‌ان‌ایِ هدف طراحی شده است. آغازگرِ رشته‌ای کوتاه از نوکلئوتید است که نقطه‌ی شروعی برای سنتز DNA است. بدیهی است که آغازگرها می‌توانند به مکمل‌های خود یعنی یکی از دو رشته‌ی DNA جفت شوند. این احتمال هم وجود دارد که به شاخه‌ی دی‌ان‌ای که با همان طول ولی تنها در یک یا دو نوکلئوتید ناسازگار است، هم جفت شوند. اگر دی‌ان‌ای ژنومی به اندازه‌ی کافی طولانی باشد، چه تعداد دنباله‌ی دی‌ان‌ای مختلف ممکن است به یک آغازگرِ طولانی‌ی هشت نوکلئوتیدی متصل شود؟ "طول کافی" حاکی از آن است که تمام نوکلئوتیدهای ممکن به طول ۸ در دی‌ان‌ای ژنومی‌ی هدف وجود دارند.

۵.۵ توالی‌یابی‌ی دی‌ان‌ای^۲ شامل هر روش یا فن‌آوری‌ای است که برای تعیین ترتیب چهار بازآدنین، گوانین، سیتوزین و تیمین استفاده می‌شود. وقتی می‌گوییم واکنش توالی‌یابی‌ی یک زنجیره‌ی دی‌ان‌ای با خطای 10% انجام می‌شود، یعنی تعیین یک نوکلئوتید مشخص با احتمال $p = 0.9$ به درستی و یا به اشتباه با احتمال $q = 0.1$ تعیین می‌شود. انواع خطاها ممکن است رخ دهند، اما ما در این‌جا فرض می‌کنیم که فقط خطا برای همه‌ی نوکلئوتیدها از نوع تعویض است و خطاهایی مثل اضافه‌شدن یا حذف شدن یک نوکلئوتید را کنار می‌گذاریم. علاوه بر این هر نوکلئوتید سه جور به خطا ممکن است انتخاب شود، که احتمال هر سه حالت را یک‌سان بگیرد، $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{30}$. برای به حداقل رساندن میزان خطا، دی‌ان‌ای توسط $n = 3$ واکنش مستقل تعیین می‌شود. قانون انتخاب

هم این است که اگر از این سه آزمایش یک نوکلئوتید اکثریت داشت، یعنی در دو یا سه مورد به یک نتیجه رسیدیم، می‌گوییم نوع نوکلئوتید این‌جا تعیین شده است. اگر در آن موقعیت هیچ نوکلئوتیدی اکثریت نداشته باشد، نوع نوکلئوتید آن‌جا نامشخص است.

الف- با چه احتمالی نتیجه‌ی ما درست است؟

ب- با چه احتمالی نوکلئوتیدهای شناسایی شده نادرست است؟

ج- احتمال اینکه شناسایی غیرممکن باشد چه قدر است؟

د- اگر $n = 5$ یا $n = 7$ باشد، نتیجه چه تغییری می‌کند؟

۶.۵ همان‌طور که می‌دانیم رشته‌ای از آمینواسیدها ممکن است از کُدگذاریِ رشته‌هایِ مختلفِ دی‌ان‌ای حاصل شوند. برای پروتئینی که از زنجیره‌ی ده‌تاییِ آمینواسید ساخته شده است، کم‌ترین و بیش‌ترین زنجیره‌ی دی‌ان‌ای که به این پروتئین کُد می‌شود کدام هستند؟

۷.۵ دی‌ان‌ای زنجیره‌ای از چهار نوع نوکلئوتیدِ آدنین (A)، گوانین (G)، سیتوزین (C) و تیمین (T) است. فرض کنید هر جای‌گاه با احتمال یک‌سان می‌تواند یکی از این چهار نوع نوکلئوتید باشد. ژن کُدکننده‌ی پروتئین زنجیره‌ای از سه‌تایی‌ها به نام کُدان است. کُدان شروع ATG است و زنجیره تنها وقتی به یکی از سه کُدان توقف یعنی TAA، TAG، TGA می‌رسد، به پایان می‌رسد.

الف- چند کُدان مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب- زنجیره‌ای در نظر بگیرید که پس از یک کُدان معین که کُدان شروع است، با N کُدان غیر توقف ادامه می‌یابد و پس از آن با یکی از کُدان‌های توقف ختم شود. احتمال وقوع چنین زنجیره‌ای برای طول دل‌خواه N چه قدر است؟ اگر $N = 200$ باشد، این احتمال تقریباً چه قدر است؟

۸.۵ مطابق کشف جدید حیات در سیاره‌ی XYZ دارای دی‌ان‌ای و پروتئین‌هایی متشکل از بیست اسید آمینه است. بر طبق آزمایشات احتمال هر کدام از دو آمینواسید

Met (M) و Trp (W) $1/38$ و بقیه‌ی آمینواسیدها هر کدام $1/19$ است. چون دمای این سیاره بالاست، ترکیب $G + C$ خیلی بالاست. بیشینه تعداد متوسط $G + C$ که در کُدگذاریِ پروتئین با آن روبه‌رو می‌شویم چه قدر است؟ فرض کنید کُدگذاری در آن

سیاره مثل زمین باشد.

۹.۵ ژنوم ویروس HIV - 1 رشته‌ای از حروف (زوج بازها) و تعداد کلی حروف $n = 10^4$ است. در هر جهش تک‌حرفی هر حرف به 3 حرف دیگر می‌تواند جهش کند. پس کلاً 30000 جهش متمایز تک‌حرفی داریم.

در سال 1995 پِرسون و هو تخمین زدند که روزانه حدود 10^{10} ویروس جدید در بیمار بدون علامت HIV ساخته می‌شود. تخمین بعدی آن‌ها این بود که حدود 1% این ویروس‌ها می‌توانند گلوبول‌های سفید را آلوده کنند. دیدیم که خطای تکثیر ژنوم HIV حدود یک در 3×10^4 است. بنابراین تعداد گلوبول‌های سفید آلوده‌ی با تک‌جهش روزانه تقریباً

$$\lambda_1 = 10^{10} \times 0.01 \times (10^4 / (3 \cdot 10^4)) \approx 3 \cdot 10^7 \text{ day}^{-1}$$

است. این عدد خیلی بزرگ‌تر از 30000 جهش متمایز تک‌حرفی است، پس هر جهش ممکن است روزانه چندین بار رخ دهد.

الف- چند جهش دو‌حرفی ممکن است رخ دهد؟

ب- P_2 احتمال این‌که دو باز از نسل قبل به غلط رونویسی شوند را به دست آورید. با توجه به این‌که احتمال رونویسی غلط هر باز $p = 1/(3 \cdot 10^4)$ است، P_2 برابر است با این‌که دقیقاً دو غلط باشد، یعنی P^2 ضرب در احتمال این‌که 9998 باز به درستی کپی شود ضرب در تعداد انتخاب‌های دو حرف از 10000 حرف.

ج- تعداد ویروس‌های جهش‌یافته‌ی دو حرفی که گلوبول‌های سفید را روزانه آلوده می‌کنند را به دست آورید و با نتیجه‌ی بند الف مقایسه کنید.

د- بندهای الف، ب، و ج را برای جهش‌های سه حرفی تکرار کنید.

ه- فرض کنید دارویی ضد ویروس به HIV حمله می‌کند، اما ویروس برای مقابله با این تهاجم از جهش تک‌حرفی استفاده می‌کند. بر اساس نتایج بالا دارو تاثیر بلندمدتی ندارد.

چرا باید برای درمان HIV هم‌زمان از سه داروی متفاوت استفاده کرد؟

۱۰.۵ یک بیماری‌ی نادر بیماری‌ای است که درصد کمی از جمعیت را درگیر می‌کند. در

ایالات متحده، از سال 2002 بیماری‌ی نادر با توجه به شیوع آن بیماری تعریف می‌شود.

هر بیماری‌ای که کمتر از 200,000 نفر در ایالات متحده را مبتلا کند، یعنی با حدود 1 در 1500 نفر بیماری‌ی نادر است. در ژاپن تعریف بیماری نادر عبارت است از کمتر از 50,000 بیمار یعنی حدود 1 در 2,500 نفر در ژاپن. در اتحادیه اروپا این عدد 1 نفر از 2000 نفر است. احتمال درگیر شدن با یک بیماری‌ی نادر $p = 0.02\%$ یعنی یک نفر از هر 5000 نفر است. آزمایشی برای تشخیص این بیماری وجود دارد. اگر کسی این بیماری را داشته باشد، احتمال آن‌که نتیجه آزمایش مثبت شود $P(+|X) = 99.90\%$ و اگر این بیماری را نداشته باشد، احتمال آن‌که نتیجه آزمایش منفی شود $P(-|\bar{X}) = 99.95\%$ است.

الف- فرض کنید نتیجه‌ی آزمایش فردی مثبت باشد، احتمال آن‌که او واقعاً بیمار باشد چه قدر است؟

ب- فرض کنید، فردی دو بار مستقلاً آزمایش می‌شود. اگر نتیجه‌ی هر دو آزمایش مستقلاً مثبت باشد، احتمال آن‌که او واقعاً بیمار باشد چه قدر است؟

ج- فرض کنید، فردی دو بار مستقلاً آزمایش می‌شود. نتیجه‌ی آزمایش اول را با A و آزمایش دوم را با B نشان می‌دهیم که هرکدام می‌توانند مثبت یا منفی باشند. احتمال آن‌که او واقعاً بیمار باشد یعنی $P(X|A \cap B)$ بر حسب $P(A|X)$, $P(B|X)$, $P(A|\bar{X})$ و $P(B|\bar{X})$ چه قدر است؟ اگر نتیجه‌ی هر دو آزمایش مستقلاً منفی باشد، احتمال آن‌که او واقعاً بیمار نباشد چه قدر است؟

راه‌نمایی - چون نتیجه‌ی دو آزمایش یعنی A و B را مستقل گرفته‌ایم،

$$P(A \cap B|X) = P(A|X) \cdot P(B|X)$$

است.

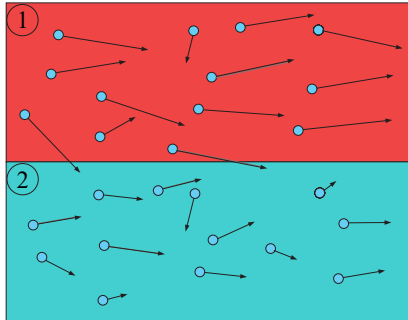
ول‌گشت و پخش

در این فصل می‌خواهیم به این موضوع بپردازیم.

۱.۶ شاره‌ها

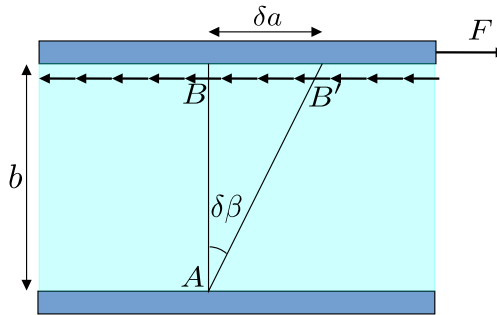
احتمالاً آبِ کناره‌های رودخانه را دیده‌اید. در کناره‌ی رودخانه آب تقریباً ساکن است. هر چه به وسطِ رودخانه نزدیک‌تر شویم، سرعتِ آب بیشتر می‌شود. در بعضی جاها جریانِ آب مثلِ لایه‌هایی نرم است که رویِ هم می‌لغزند و در جاهایی جریان متلاطم است. لوله‌ی آبی را در نظر بگیرید. در نزدیکیِ دیواره‌ی لوله سرعتِ آب کم و رویِ محورِ لوله سرعتِ آب بیش‌ترین مقدار است. برای هر شاره کمیتی به نام چگالی تعریف می‌کنیم که به جنسِ شاره بستگی دارد. کمیت‌های دیگری مانند کششِ سطحی و چسبندگی هم وجود دارند که اولی به خودِ شاره و دومی علاوه بر شاره به محیطِ پیرامون آن نیز بستگی دارد. ولی این کمیت‌ها برای توضیح رفتارِ یک شاره کافی نیستند. کمیتِ دیگری هم هست که به جریان یافتنِ یک شاره مربوط است و گرانروی نام دارد. دو لایه‌ی شاره که رویِ هم می‌لغزند را در نظر بگیرید. اگر این دو لایه‌ی هم‌سایه‌ی هم اختلافِ سرعت داشته باشند، نیروی مقاومتی بینِ آن‌ها به وجود می‌آید که مقدارِ آن به گرانروی بستگی دارد. همین مسأله را از دیدگاهِ میکروسکوپی هم می‌شود بررسی کرد. دو بخش از شاره که هم‌سایه‌ی هم هستند را در نظر بگیرید، به طوری که سرعتِ متوسطِ یک بخش از

شاره، یا سرعت کپه‌ای آن، مقدار بزرگ‌تر v_1 ، و سرعت کپه‌ای بخش دیگر مقدار کوچک‌تر v_2 ($v_2 < v_1$) باشد. با گذشت زمان تعدادی ذره از بخش پرسرعت 1 به بخش کم‌سرعت 2، و تعدادی ذره‌ی از بخش کم‌سرعت 2 به بخش پرسرعت 1 می‌رود. شکل ۱۰۶ را ببینید. با این جابه‌جایی ذرات سرعت متوسط ذرات در بخش 2، v_2 ، بزرگ و سرعت متوسط ذرات در بخش 1، v_1 کوچک می‌شود. از این رو سرعت کپه‌ای بخش‌ها با گذشت زمان تغییر می‌کند. آنچه باعث تغییر این سرعت‌ها می‌شود انتقال تکانه از هر بخش شاره به بخش دیگر است. تا وقتی گرادیان سرعت در شاره هست، انتقال تکانه هم بین بخش‌های مختلف شاره وجود دارد. مثل این است که به طور مؤثر یک نیروی برشی بین بخش‌های مختلف شاره که اختلاف سرعت دارند وجود دارد. نیرویی برشی‌ای که در شاره به وجود می‌آید، اختلاف سرعت را کم می‌کند. وقتی با قاشق چای را به هم می‌زنیم، چای درون ظرف حرکت می‌کند و گرادیان میدان سرعت



شکل ۱۰۶ وقتی لایه‌های شاره نسبت به هم اختلاف سرعت داشته باشند با جابه‌جایی ذرات میان این لایه‌ها اختلاف سرعت متوسط دو لایه کم می‌شود.

غیرصفر می‌شود. چایی که مجاور جداره‌ی ظرف است، سرعتش تقریباً صفر است. وقتی دست از هم‌زدن چای برداریم، گرانروی سبب می‌شود که به تدریج گرادیان سرعت از میان برود و چای ساکن شود. آزمایشی را در نظر بگیرید که جسم جامدی را میان دو صفحه‌ی تخت بسیار بزرگ قرار داده و محکم به صفحه‌ها چسبانده‌ایم. اگر صفحه‌ی بالایی را با نیروی F مماس بر صفحه بکشیم و در همین حال صفحه‌ی پایینی را محکم نگه داریم خط فرضی AB که بر صفحات عمود است به صورت AB' در می‌آید. شکل ۱۰۶ را ببینید. یک تنش برشی τ ، نیرو بر واحد سطح و مماس با آن، در جسم به وجود می‌آید که جلوی تغییر شکل بیش‌تر جسم را می‌گیرد. در



شکل ۲.۶ تنش برشی در یک جامد ممکن است منجر به شکستن آن شود ولی در یک شاره تنش برشی به شارش آن منجر می‌شود.

حالت تعادل

$$F = \tau A. \quad (۱.۶)$$

A مساحت صفحه‌ی بالایی است. برای اجسام جامد، مانند فولاد، اگر تنش برشی از حد کش‌سانی نگذرد، تنش برشی با زاویه‌ی $\delta\beta$ متناسب است. حالا دو صفحه‌ی بسیار بزرگ را در نظر بگیرید، به طوری که میان آن‌ها از شاره‌ای پُر شده باشد. یکی از صفحه‌ها در $y = 0$ و دیگری در $y = b$ است. اگر یکی از صفحه‌ها را در راستای مماس بر صفحه، که آن را \hat{i} می‌گیریم، بکشیم در حالت پایا صفحه با سرعت $\mathbf{v} = v\hat{i}$ حرکت می‌کند و شاره‌ی نزدیک خود را نیز همراه خود می‌کشد. ولی بخشی از شاره که هم‌سایه‌ی صفحه‌ی دیگر است، تقریباً ساکن است. بردار سرعت شاره در راستای محور x است ولی نسبت به y تغییر می‌کند. از این‌رو گرادینان میدان سرعت شاره غیر صفر خواهد شد. سطح بالایی شاره به طور پیوسته جابه‌جا می‌شود و شاره‌ای که در نزدیکی سطح ساکن است تقریباً ساکن می‌ماند. شاره این خاصیت را دارد که تحت هر تنش برشی به طور پیوسته تغییر شکل می‌دهد. پس از مدتی حرکت شاره پایا می‌شود، یعنی سرعت هر بخش از شاره، دیگر با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. بخشی از شاره که در زمان t بین x و $x + \delta x$ ، y و $y + \delta y$ است با گذشت زمان به یک متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌شود. لایه‌ای به ضخامت δy در مدت δt به اندازه‌ی $\delta\beta$ کج می‌شود. پس

$$\delta y \delta\beta = (v(y + \delta y) - v(y)) \delta t. \quad (۲.۶)$$

از این رو داریم

$$\frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{v(y + \delta y) - v(y)}{\delta y} \quad (۳.۶)$$

$$(۴.۶)$$

$$\approx \frac{v(y) + \delta y (dv/dy) - v(y)}{\delta y} = \frac{dv}{dy}. \quad (۵.۶)$$

برای بسیاری از شاره‌ها تنش برشی با $\delta\beta/\delta t$ متناسب است و

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}. \quad (۶.۶)$$

ضریب تناسب، که با μ نشان می‌دهیم، گرانروی نامیده می‌شود و بُعد آن $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$ است. گرانروی به جنس شاره بستگی دارد. بستگی‌ی گرانروی به فشار معمولاً بسیار کم است. اما نسبت به دما می‌تواند تغییرات زیادی داشته باشد. نوعاً گرانروی‌ی گازها با افزایش دما زیاد می‌شود و گرانروی‌ی مایع‌ها با افزایش دما کم می‌شود. گرادیان سرعت را کرنش^۱ می‌نامند. بنابراین تنش حاصل ضرب گرانروی در کرنش است. به ازای تنش ثابت هرچه گرانروی بزرگ‌تر باشد، کرنش کوچک‌تر است. شاره‌هایی که گرانروی در آن‌ها ثابت است، یعنی مستقل از کرنش است، شاره‌ی نیوتنی نامیده می‌شوند.

تغییرات گرانروی نسبت به دما در نزدیکی نقطه‌ی سه‌گانه شدیدتر است. اگر گرانروی‌ی شاره‌ای ثابت نباشد، شاره‌ی غیر نیوتنی نامیده می‌شود. بسیاری از شاره‌ها مانند آب، هوا، و نفت شاره‌ی نیوتنی هستند. از حل کردن نشاسته‌ی ذرت در آب شاره‌ای به وجود می‌آید که به وضوح غیر نیوتنی است.

به ازای یک گرادیان سرعت معین، هرچه گرانروی بزرگ‌تر باشد تنش برشی بزرگ‌تر است. تنش برشی باعث کم‌شدن گرادیان سرعت می‌شود. در حالتی که میدان سرعت یک‌نواخت است، تنش برشی هم وجود ندارد. بعضی شاره‌ها گرانروی‌ی شان بزرگ‌تر و بعضی کوچک‌تر است، مثلاً گرانروی‌ی آب از گرانروی‌ی گلیسیرین کوچک‌تر است. گاهی اوقات از کمیت دیگری به نام گرانروی‌ی ویژه یا گرانروی‌ی جنبشی^۲

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \quad (۷.۶)$$

برای مایعات استفاده می‌شود، که ρ چگالی مایع و μ گرانروی آن است. بُعد گرانروی ویژه $[\nu] = L^2 T^{-1}$ است.

از گرانروی، چگالی، سرعت نوعی شاره، ν و طول نوعی در شاره، l می‌توان کمیتی بی‌بُعد به نام عدد رینولدز^۱ ساخت

$$\text{Re} := \frac{\rho v l}{\mu}. \quad (۸.۶)$$

مثلاً در حرکت یک جسم در یک شاره، اندازه‌ی جسم l ، سرعت آن ν ، چگالی‌ی شاره ρ و گرانروی‌ی آن μ است. اگر در حرکت جسم عدد رینولدز بزرگ باشد حرکت آب اطراف آن تلاطمی می‌شود. وقتی عدد رینولدز بزرگ است حرکت شاره تلاطمی، و وقتی عدد رینولدز کوچک‌تر است، حرکت شاره لایه‌ای است. در حرکت لایه‌ای خطوط میدان سرعت نرم و هم‌وار است و در حرکت تلاطمی خطوط میدان سرعت به شدت درهم‌تابیده و مانند کلافی در هم پیچیده است. شیر آب را که باز می‌کنیم وقتی که جریان آب کم است، آب شفاف، سطح آن هم‌وار و حرکت لایه‌ای است. هنگامی که جریان آب زیاد می‌شود، رنگ آب کدر، سطح آن نا هم‌وار، و حرکت تلاطمی است.

اولین کسی که به طور کمی به این دو نوع حرکت پرداخت آذربورن رینولدز^۲ بود. آذربورن رینولدز (۱۹۱۲–۱۸۴۲) که در بلفاست متولد شده بود استاد مهندسی‌ی عمران و مکانیک در کالج آونس^۳ در منچستر انگلیس شد، جایی که حالا همان دانش‌گاه منچستر است. او اساساً یک مهندس بود ولی کارهای زیادی در حوزه‌های دیگر از جمله مکانیک شاره‌ها، حرارت، و الکتریسیته انجام داد. در سال ۱۸۳۳ مقاله‌ی معروفش در مکانیک شاره‌ها را نوشت. بیش‌تر آن‌چه که ما امروز در مورد گذار حرکت شاره از حالت لایه‌ای به حالت آشوبی می‌دانیم او در این مقاله توصیف کرده. او اثر کمیت‌های گرانروی، سرعت و اندازه‌ی جسم، یعنی همه‌ی آن‌چه که در عدد رینولدز وارد می‌شود، را کاملاً دریافته بود. او یک همانندی با حرکت دسته‌ای سرباز برقرار کرد. هر چه دسته‌ی سربازان بزرگ‌تر و حرکت آن‌ها سریع‌تر باشد احتمال بی‌نظمی بیش‌تر است. موریس وبر^۴ آلمانی در سال ۱۹۱۹ این کمیت بی‌بُعد را عدد رینولدز نامید. در آزمایشی از طریق دهانه‌ی باریک لوله‌ای شیشه‌ای ماده‌ای رنگی را وارد جریان از آب کرد. سرعت جریان آب

کنترل شده بود. در سرعت‌های کم ماده‌ی رنگی تقریباً با آب مخلوط نمی‌شد و در مسیری تقریباً به شکل خط راست درون جریان آب حرکت می‌کرد. با افزایش سرعت جریان آب حرکت ماده‌ی رنگی موجی شکل و با بیش‌تر شدن سرعت آب ماده‌ی رنگی به سرعت با آب مخلوط می‌شود. او مشاهده کرد تا وقتی $Re = v\ell/\nu \lesssim 2300$ است حرکت لایه‌ای است. ν گرانروی ویژه، و ℓ قطر لوله‌ی آب است. وقتی که عدد رینولدز به این مقدار می‌رسید گذار رخ می‌داد. در حدّ عددهای رینولدز پایین حتی در حضور اختلال هم حرکت پای دار است.

نتایج آزمایشی نشان می‌دهد برای $Re < 2000$ حرکت شماره لایه‌ای و برای $Re > 3000$ حرکت تلاطمی است. برای $2000 < Re < 3000$ حرکت شماره به جزییات مسئله بستگی دارد و علی‌الاصول حرکت شماره ناپای دار است. برای شماره‌ای که عدد رینولدز کوچک و حرکت لایه‌ای است، با اضافه کردن تدریجی سرعت شماره عدد رینولدز بزرگ می‌شود. اگر این تغییرات خیلی کند انجام شود ممکن است از مرزهایی که بالا گفتیم رد شویم ولی حرکت همچنان لایه‌ای بماند. در این مواقع حالت کاملاً ناپای دار است و با اختلال کوچکی حرکت تلاطمی می‌شود.

جسمی با یک طول مشخصه مثل L (مثلاً یک کره به شعاع L) درون شماره‌ای حرکت می‌کند. می‌خواهیم نیروی وارد به جسم از طرف شماره را به دست آوریم. کمیت‌های دخیل در مسئله نیرو F ، چگالی شماره ρ ، گرانروی شماره μ ، سرعت جسم v ، و طول مشخصه‌ی L است. از این‌ها دو کمیت بی‌بعد $\Pi_1 = \frac{F}{\mu Lv}$ و $\Pi_2 = \frac{F}{\rho L^2 v^2}$ را می‌توان ساخت. البته کمیت‌های بی‌بعد دیگری را نیز می‌توان ساخت که از این‌ها مستقل نیستند. مثلاً از تقسیم این دو کمیت بی‌بعد عدد رینولدز به دست می‌آید. رابطه‌ی فیزیکی مورد نظر ما باید به صورت تابعی از این دو کمیت بی‌بعد باشد.

$$\Phi\left(\frac{F}{\mu Lv}, \frac{F}{\rho L^2 v^2}\right) = 0, \quad (۹.۶)$$

کمیت‌های $F_1 := C_1 \mu Lv$ و $F_2 := C_2 \rho L^2 v^2$ بعد نیرو دارند.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{C_2 \rho L^2 v^2}{C_1 \mu Lv} = \frac{C_2}{C_1} Re, \quad (۱۰.۶)$$

در حدّ عدد رینولدز کوچک (یعنی به قدر کافی کوچک، $Re \ll \frac{C_1}{C_2}$) نیروی F_2 بی‌اهمیت

است. در این حد، نیروی اصلی F_1 است. بنابراین در این حد یعنی حدِ عددِ رینولدزِ کوچک، نیرویی که از طرفِ شماره به جسم وارد می‌شود متناسب با سرعت است. در حدِ عددِ رینولدزِ بزرگ (یعنی به قدرِ کافی بزرگ، $Re \gg \frac{C_1}{C_2}$) نیروی F_1 بی‌اهمیت است. در این حد، نیروی اصلی F_2 است. بنابراین در این حد یعنی حدِ عددِ رینولدزِ بزرگ، نیرویی که از طرفِ شماره به جسم وارد می‌شود متناسب با مجذورِ سرعت است. برای یک جسم و شماره‌ی معین عددِ رینولدزِ کوچک یعنی سرعتِ کم و عددِ رینولدزِ بزرگ یعنی سرعتِ زیاد. در سرعت‌های میانه هیچ یک از نیروهای F_1 و F_2 غالب نیستند و نیرو تابعی پیچیده از سرعت است که در (۹.۶) صدق می‌کند. در این حالت تحلیل ابعادی چیزِ بیش‌تری نمی‌گوید.

قبلاً نشان دادیم که $\frac{\rho L v}{\mu}$ یا همان عددِ رینولدزِ بی‌بُعد است. کمیت‌های بی‌بُعدِ دیگری نیز در مکانیکِ شماره‌ها ظاهر می‌شوند. کمیت‌های L یک طولِ مشخصه در شماره، U یک سرعتِ مشخصه در شماره، σ کششِ سطحی، ω فرکانسِ نوسان، μ گرانرویِ شماره، و c سرعتِ صوت در شماره را در نظر بگیرید. با این‌ها کمیت‌های بی‌بُعدی می‌توان ساخت که بیش‌تر در مکانیکِ شماره‌ها ممکن است با آن‌ها سرو کار داشته باشیم

| | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| $Re := \frac{\rho U L}{\mu},$ | ● عددِ رینولدز |
| $We := \frac{\rho U^2 L}{\sigma},$ | ● عددِ وِبر ^۱ |
| $Eu := \frac{p \sigma}{\rho U^2},$ | ● عددِ اُیلر ^۲ |
| $Fr := \frac{U}{\sqrt{gL}},$ | ● عددِ فرود ^۳ |
| $St := \frac{\omega L}{U},$ | ● عددِ استروهِال ^۴ |
| $Ma := \frac{U}{c},$ | ● عددِ ماخ ^۵ |

معادله‌ی نیوتن برای یک عنصرِ شماره معادله‌ی نَوِی-اِسْتِکس^۶ است. این معادله برای شماره‌ای تراکم‌ناپذیر با گرانروی μ ، و چگالی ρ عبارت است از

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (۱۱.۶)$$

می‌توانیم این معادله‌ی دیفرانسیل را بی‌بُعد کنیم. برای این کار می‌توانیم از یک طولِ مشخصه مثل

L ، یک سرعتِ مشخصه مثل U و فشارِ مشخصه p_0 استفاده کنیم در این صورت

$$\tilde{v} := \frac{v}{U}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{U}{L}t, \quad \tilde{p} := \frac{p}{p_0} \quad (۱۲.۶)$$

کمیت‌هایی بی‌بعد هستند. با این پارامترهای بی‌بعد و کمیت‌های بی‌بعدِ عددِ رینولدز، عددِ فرود، و عددِ ایلر معادله‌ی نوی-استکس تبدیل می‌شود به

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \right) \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{(\text{Fr})} \frac{\mathbf{g}}{g} - (\text{Eu}) \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{(\text{Re})} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (۱۳.۶)$$

اگر دو مسئله‌ی مختلف داشته باشیم که اعدادِ رینولدز، فرود، اویلر، و هندسه‌ی دو مسئله و شرایطِ مرزی یکی باشد، جوابِ دو معادله یکی است. در غیابِ گرانش در صورتی که فشارِ مشخصه‌ای نداشته باشیم، معادله‌ی نوی-استکس را به شکلِ دیگری هم می‌توانیم بی‌بعد کنیم

$$\text{Re} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \right) \tilde{\mathbf{v}} \right] = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}}. \quad (۱۴.۶)$$

که $\tilde{p} := \frac{Lp}{\mu U}$ فشارِ بی‌بعدشده است. در حدِ اعدادِ رینولدزِ کوچک سمتِ چپِ این معادله صفر است و در حدِ اعدادِ رینولدزِ بزرگ سمتِ راستِ آن صفر است. معادله‌ی نوی-استکس یک معادله‌ی دیفرانسیلِ پاره‌ای و همین‌طور غیرخطی است. این غیرخطی بودنِ حلِ معادله را بسیار سخت و در حالتِ کلی عملاً غیرممکن می‌کند. اما هنوز می‌توانیم از روش‌هایِ تحلیلِ ابعادی استفاده کنیم.

مثال ۱۰.۱۰۶ از لوله‌ای به طول ℓ و شعاع R مایعی با سرعتِ پایا جاری است، یعنی میدانِ سرعت در هر نقطه از شاره به زمان بستگی ندارد. اختلافِ فشارِ دو سرِ لوله Δp و گران‌رویِ مایع μ است. می‌خواهیم با استفاده از تحلیلِ ابعادی حجمی از مایع که در واحدِ زمان از لوله می‌گذرد Q را به دست آوریم. با این کمیت‌ها دو کمیتِ بی‌بعد $\frac{\ell}{R}$ و $\frac{\Delta p R^3}{Q\mu}$ را می‌توان ساخت. با استفاده از تحلیلِ ابعادی کلی‌ترین چیزی که می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta p R^3}{Q\mu} = f\left(\frac{\ell}{R}\right). \quad (۱۵.۶)$$

در این جا یک تابع نامعلوم f باقی می‌ماند که تحلیل ابعادی چیزی به ما نمی‌گوید. اما اگر دو لوله‌ی از این مایع را به هم بچسبانیم که فشارِ دو سرِ یکی p و $p + \Delta p$ و فشارِ دو سرِ لوله‌ی دیگر $p + \Delta p$ و $p + 2\Delta p$ باشد تغییری در جریانِ مایعِ لوله‌ها ایجاد نمی‌شود. بنابراین اگر R و μ ثابت بمانند و Δp و ℓ دو برابر شوند (یا با هر ضریبِ یک‌سانِ دیگری مثل α مقیاس شوند) Q ثابت می‌ماند. پس

$$\frac{\alpha \Delta p R^3}{Q \mu} = f\left(\frac{\alpha \ell}{R}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\alpha \ell}{R}\right) = \alpha f\left(\frac{\ell}{R}\right). \quad (۱۶.۶)$$

بنابراین f تابعی خطی است.

$$f\left(\frac{\ell}{R}\right) = C \frac{\ell}{R}, \quad (۱۷.۶)$$

که C یک ثابت است. با جاگذاریِ این تابع در (۱۵.۶) می‌رسیم به

$$Q = \frac{\Delta p R^4}{C \mu \ell}. \quad (۱۸.۶)$$

جوابِ دقیقِ مسئله که از حلِ تحلیلی به دست می‌آید

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \mu \ell}. \quad (۱۹.۶)$$

همان‌طور که می‌بینیم ضریبِ ثابتِ C از مرتبه‌ی یک است. این معادله را به شکلِ زیر هم می‌توان نوشت

$$\Delta p = ZQ, \quad (۲۰.۶)$$

که به ضریبِ $Z = \frac{8 \mu \ell}{\pi R^4}$ مقاومتِ هیدرودینامیکی^۱ می‌گویند. این نام‌گذاری بی‌دلیل نیست. در واقع معادله‌ی بالا شبیه معادله‌ی اهم است. اختلافِ فشارِ نقشِ نیروی محرکه و Q نقشِ جریان را دارد.

نکته‌ی جالب این است که به خاطرِ توانِ ۴ برای R جریان به تغییراتِ R بسیار حساس

^۱ hydrodynamic resistance

است، مثلاً با دو برابر شدن شعاع جریان ۱۶ برابر می‌شود. بنابراین با تغییر جزئی در R اندازه‌ی جریان تغییرات بزرگی می‌تواند داشته باشد.

مثال ۲۰۱.۶ با چه تغییری در شعاع رگ جریان خون ۳۰٪ بیشتر می‌شود؟ شعاع و جریان ابتدایی را R_1 و Q_1 و شعاع و جریان نهایی را R_2 و Q_2 بگیرید.

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} &= \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^{1/4} \\ &= (1.3)^{1/4} = 1.07 \end{aligned} \quad (21.6)$$

یعنی با تغییر شعاع به اندازه‌ای کمتر از ۷٪، جریان خون ۳۰٪ بیشتر می‌شود.

رگ‌های بدن با انعطافی جزئی (انقباض یا انبساط) در اندازه‌شان، اندازه‌ی جریان خون را می‌توانند تنظیم کنند. وقتی رگ‌ها این قابلیت انعطافشان را از دست بدهند خون‌رسانی به اندام‌ها دچار مشکل می‌شود.

۲.۶ توزیع دو جمله‌ای و ولگشت

یک دستگاه دو حالتی که احتمال یک حالت

$$P(A) = p \quad (22.6)$$

و احتمال حالت دیگر

$$P(B) = 1 - p =: q \quad (23.6)$$

است، را در نظر بگیرید. احتمال این که یک خروجی خاص مثل $AABA$ داشته باشیم $P(A, A, B, A) = p^3q$ است ولی احتمال این‌که از چهار مورد، مستقل از ترتیب رخ دادن آن‌ها سه مورد حالت A و یک مورد B باشد $P(3) = 4p^3q$ است. در حالت کلی احتمال این‌که از N مورد، مستقل از ترتیب رخ دادن آن‌ها n بار حالت A و $N - n$ بار B باشد

$$P(n) := C_n p^n q^{N-n} \quad (24.6)$$

است که

$$C_n := \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}. \quad (25.6)$$

واضح است که مجموع احتمال تمام حالت‌های ممکن باید یک شود

$$\sum_{n=0}^N P(n) = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1. \quad (26.6)$$

مثال ۱۰۲۰۶ یک سکه با دو رویِ مثلا شیر و خط یک دستگاه دو حالتی است. احتمال شیر آمدن p و احتمال خط آمدن q است. احتمال آن‌که پس از N پرتاب سکه n بار اول شیر بیاید و $N-n$ بار بعدی خط بیاید $p^n q^{N-n}$ است. اما اگر برای ما ترتیب شیر یا خط آمدن مهم نباشد و فقط بخواهیم احتمال این که در N پرتاب سکه n بار شیر بیاید، باید تمام همه‌ی حالت‌های ممکن را در نظر بگیریم که جواب نهایی

$$P(n) := \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad (27.6)$$

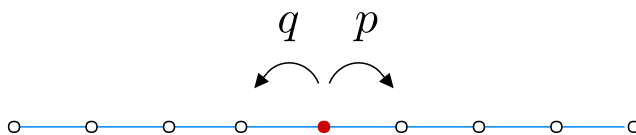
است.

ول‌گشت یک‌بعدی مثال دیگری از یک توزیع دوجمله‌ای است. در مساله‌ی ول‌گشت ساده، یک ول‌گرد که با \bullet نشان می‌دهیم، در ابتدا در نقطه‌ای است که آن را مبدا می‌گیریم. این ول‌گرد می‌تواند روی شبکه‌ای یک‌بعدی حرکت کند. جای‌گاه‌های خالی را با \circ نشان می‌دهیم. شکل (۳۰۶) را ببینید. در هر قدم یا پله زمانی او با احتمال p یک قدم به راست و با احتمال $q := 1-p$ به سمت چپ می‌رود. احتمال آن‌که بعد از N قدم، n قدم آن را به سمت راست و $N-n$ قدم را به سمت چپ برداشته باشد

$$P(n) := \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \quad (28.6)$$

است. اگر او از N قدم، n قدم را به سمت راست برداشته باشد، در این صورت در جای‌گاه

$$m = n - (N - n) = 2n - N \quad (29.6)$$



شکل ۳.۶ ولگشت

است. یک راه دیگر برای بررسی‌ی مساله‌ی ولگشت نوشتن معادله‌ی مادر^۱ و حل آن است. در ولگشت ساده احتمال آن‌که در پله‌ی زمانی‌ی N ولگرد در جای‌گاه s باشد را با $P_{N,s}$ نمایش می‌دهیم. معادله مادر یا معادله‌ی تحول $P_{N,s}$ برای حالت متقارن $p = q = 1/2$ عبارت است از

$$P_{N+1,s} = \frac{1}{2}P_{N,s-1} + \frac{1}{2}P_{N,s+1}. \quad (30.6)$$

با حل این معادله‌ی تفاضلی و یک شرط اولیه مثل $P_{0,s} = \delta_{s,0}$ می‌توانیم $P_{N,s}$ را به دست آوریم، که همان (۲۸.۶) است.

هر قدم ولگرد کمیتی تصادفی است. مثلاً در قدم i ام که با X_i نشان می‌دهیم با احتمال‌های q و p مقادیر $+1$ و -1 می‌گیرد.

$$\langle X_i \rangle = +1 \times p - 1 \times q = p - q$$

$$\langle X_i^2 \rangle = (+1)^2 \times p + (-1)^2 \times q = p + q = 1. \quad (31.6)$$

برای ولگشت متقارن

$$p = q = 1/2, \Rightarrow \langle X_i \rangle = 0, \quad \langle X_i^2 \rangle = 1 \quad (32.6)$$

اگر مکان ولگرد بعد از N قدم را با Z_N نمایش دهیم

$$Z_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad (33.6)$$

و

$$\langle Z_N \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle + \dots + \langle X_N \rangle = N(p - q)$$

^۱master equation

$$\begin{aligned}\langle Z_N^2 \rangle &= \langle X_1^2 \rangle + \langle X_2^2 \rangle + \cdots + \langle X_N^2 \rangle \\ &\quad + 2\langle X_1 X_2 \rangle + \cdots + 2\langle X_{N-1} X_N \rangle \\ \langle Z_N^2 \rangle - \langle Z_N \rangle^2 &= (\langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2) + \cdots + (\langle X_N^2 \rangle - \langle X_N \rangle^2)\end{aligned}\quad (۳۴.۶)$$

در این جا از این که قدم‌ها مستقل هستند، یعنی

$$\langle X_i X_j \rangle = \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle, \quad i \neq j \quad (۳۵.۶)$$

استفاده کرده‌ایم. اما

$$\langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2 = 1 - (p - q)^2 = (p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq. \quad (۳۶.۶)$$

از این جا برای واریانس می‌رسیم به

$$\text{Var} = \langle Z_N^2 \rangle - \langle Z_N \rangle^2 = 4Npq \quad (۳۷.۶)$$

که برای ول‌گشت متقارن

$$\text{Var} = \langle Z_N^2 \rangle - \langle Z_N \rangle^2 = N. \quad (۳۸.۶)$$

اگر فاصله‌ی هر دو جای‌گاه مجاور شبکه را ℓ و زمان پرش در هر قدم را τ بگیریم

$$\text{Var} = N\ell^2 = 2Dt. \quad (۳۹.۶)$$

که زمان N پرش $t = N\tau$ است و $D := \frac{\ell^2}{2\tau}$ را ضریب پخش می‌گوییم.

مثال ۲.۲.۶ بردار A با طول ثابت ℓ در نظر بگیرید. زاویه‌ای که این بردار با محور x می‌سازد کاملاً تصادفی است. اگر N بار برداری از این نوع که طولش ثابت و جهتش تصادفی است، پشت سر هم چیده شوند، جمع نهایی‌ی این بردارها عبارت است از

$$R = r_1 + r_2 + \cdots + r_N, \quad (۴۰.۶)$$

و متوسط آن

$$\bar{R} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \dots + \bar{r}_N. \quad (41.6)$$

اگر توزیع همه‌ی بردارها یکی باشد مثلاً همه بتوانند به طور تصادفی و با احتمال یک‌نواخت هر جهتی داشته باشند،

$$\bar{R} = N\bar{r} = 0, \quad (42.6)$$

و واریانس آن

$$\text{Var}(\mathbf{R}) = \overline{\mathbf{R}^2} - \bar{\mathbf{R}}^2, \quad (43.6)$$

$$= \overline{\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j} - \left(\sum_i \overline{\mathbf{r}_i} \cdot \sum_j \overline{\mathbf{r}_j} \right) \quad (44.6)$$

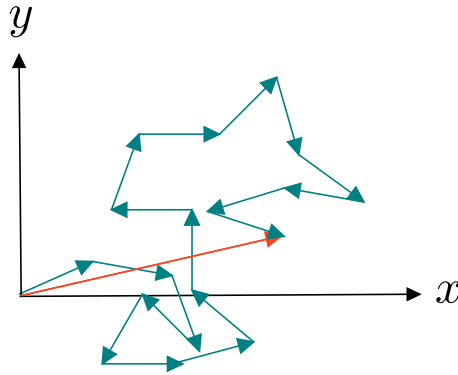
$$= \sum_i \overline{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i} = N\ell^2 \quad (45.6)$$

در این محاسبه فرض کردیم توزیع هر بردار تصادفی و مستقل از بردارهای دیگر است. پس به ازای $j \neq i$ بردارهای \mathbf{r}_j و \mathbf{r}_i مستقل اند و

$$\overline{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j} = \bar{\mathbf{r}}_i \cdot \bar{\mathbf{r}}_j = 0, \quad (46.6)$$

استفاده کرده‌ام. در شکل (۴.۶) تعدادی بردار در دو بُعد پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

مثال ۳.۲.۶ پروتئین زنجیره‌ای از آمینواسیدها است. فرض کنید طول متوسط هر آمینواسید $\ell = 0.36 \text{ nm}$ است. نوعی از پروتئین که در ساختار عضلات بدن ما نقش دارد و شامل $N = 375$ آمینواسید است. اگر همه‌ی آمینواسیدها را پشت سر هم بچینیم، طولش حدود 135 nm است. این آمینواسیدها روی یک خط پشت سر هم قرار نمی‌گیرند، بلکه ممکن است هر کدام نسبت به قبلی در جهتی تصادفی قرار گیرد حتی بپیچد و به قبلی بچسبند. در



شکل ۴.۶ ول‌گشت در دو بُعد

این صورت با استفاده از آنچه در مورد ول‌گشت یاد گرفتیم

$$\bar{R} = 0$$

$$\overline{R^2} = N\ell^2 \approx 375(0.36)^2 \quad (۴۷.۶)$$

که از این‌جا

$$\bar{R} \approx \sqrt{\overline{R^2} - \bar{R}^2} \approx 7.0 \text{ nm} \quad (۴۸.۶)$$

است. در این‌جا \bar{R} چیزی شبیه خط قرمزی است که در شکل (۴.۶) کشیده شده است. تعدادی بردار در دو بُعد پشت سر هم قرار گرفته‌اند. این طول خیلی کوچک‌تر از 135 nm است. بنابراین پروتئینی که طولش 135 nm است، در خودش پیچیده و مثل گلوله‌ای به قطر 7.0 nm است. در این‌جا فرض کردیم توزیع هر بردار کاملاً تصادفی و مستقل از بردارهای دیگر است، در حالی‌که در عمل توزیع فضایی هر بردار به این‌که بردارهای هم‌سایه‌اش چه جهتی داشته باشند، می‌تواند بستگی داشته باشد.

در نظریه‌ی احتمال قضیه‌ی مهمی وجود دارد به نام قضیه‌ی حد مرکزی^۱.

^۱Central limit theorem

قضیه ۴.۲.۶ (قضیه‌ی حد مرکزی) اگر N متغیر تصادفی X_1, \dots, X_N که توزیع‌های یکسانی دارند با متوسط μ و واریانس محدود σ باشند، حاصل جمع‌شان در حد N های بزرگ متغیری تصادفی با توزیع نرمال است.

متغیر تصادفی

$$Z_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} \quad (۴۹.۶)$$

توزیعی نرمال با متوسط صفر و واریانس 1 است. مهم نیست که توزیع‌های اولیه چه باشند، فقط باید متوسط‌شان معین و واریانس‌شان محدود باشد. مثلاً این قضیه برای جمع تعداد زیادی متغیر تصادفی با توزیعی یک‌نواخت می‌تواند بین 0 و 1 برقرار و حاصل جمع‌شان توزیعی نرمال است. بنابراین انتظار داریم در حد N های بزرگ توزیع دو جمله‌ای به توزیع نرمال تبدیل شود.

۳.۶ معادله‌ی پخش

در بخش قبل مکان و زمان را متغیرهایی گسسته گرفتیم. در حد N های بزرگ می‌توانیم متغیرهای مکان و زمان را پیوسته بگیریم. بیا باید حد پیوسته‌ی معادله‌ی (۳۰.۶) را بررسی کنیم. ثابت طول شبکه را ℓ و ثابت زمانی شبکه را τ بگیرد. در این صورت با تعریف $ls := x$ و $p(t, x)dx$ ، $t = N\tau$ چگالی احتمال این است که در زمان t ذره در فاصله‌ی x و $x + dx$ باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} P_{N,s} &\rightarrow p(t, x) dx \\ P_{N,s-1} &\rightarrow p(t, x - \ell) dx \\ P_{N,s+1} &\rightarrow p(t, x + \ell) dx, \end{aligned} \quad (۵۰.۶)$$

و معادله‌ی مادر (۳۰.۶) تبدیل می‌شود به

$$p(t + \tau, x) = \frac{1}{2}p(t, x - \ell) + \frac{1}{2}p(t, x + \ell)$$

<https://www.youtube.com/@amifaghamohammadi>

$$\begin{aligned}
 p(t, x) + \tau \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \dots &= \frac{1}{2} \left[p(t, x) - \ell \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \left[p(t, x) + \ell \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right] \\
 &= p(t, x) + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \dots \quad (۵۱.۶)
 \end{aligned}$$

که در حدی که $\ell \rightarrow 0$ و $\tau \rightarrow 0$ بروند ولی $\frac{\ell^2}{2\tau}$ محدود بماند و بزرگ‌ترین جملات را نگه داریم می‌رسیم به

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (۵۲.۶)$$

که $D := \frac{\ell^2}{2\tau}$ ضریب پخش است. ما یک فرض دیگر هم کرده‌ایم. در جملات با توان‌های بالای ℓ مشتق‌های مرتبه‌ی بالای $p(x, t)$ حضور دارند. در واقع در تقریب ما این فرض وجود دارد که این مشتق‌ها خیلی بزرگ نیستند و می‌توانیم در حد $\ell \rightarrow 0$ از جملاتی مثل $\frac{\ell^n}{n!} \frac{\partial^n p(x, t)}{\partial x^n}$ چشم‌پوشی کنیم. اگر تابع توزیع تغییرات شدیدی نسبت به مکان داشته باشد این فرض دیگر معتبر نیست. در واقع تقریب ما تقریب طول موج بلند است، یعنی فرض می‌کنیم موج‌های کوتاه در بسط تابع توزیع سهم ندارند. در همان نظریه‌ی گسسته می‌دانیم که پس از پله‌های زیاد تابع توزیع پخش و به تعبیری هم‌وارتر می‌شود. پس اگر حتی تقریب ما در ابتدا معتبر نباشد پس از مدتی طول تابع توزیع هم‌وارتر می‌شود و به تدریج سهم موج‌های کوتاه کم می‌شود و از بین می‌روند و بالاخره تقریب طول موج بلند معتبر می‌شود.

حالا بیایید ببینیم معنی فیزیکی طول مشخصه‌ی ℓ و زمان مشخصه‌ی τ چیست. فرض کنید ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی خارجی f شتاب می‌گیرد. در این صورت

$$m \frac{dv}{dt} = f \quad (۵۳.۶)$$

ذره برای مدتی شتاب می‌گیرد تا به ذره‌ی دیگری برخورد کند. τ را متوسط فاصله‌ی زمانی بین هر دو برخورد بگیرد. سرعت و جابه‌جایی ذره پس از زمان Δt

$$v(\Delta t) = v_0 + \frac{f}{m} \Delta t,$$

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{f}{2m} (\Delta t)^2, \quad (54.6)$$

است، که Δt فاصله‌ی زمانی بین دو برخورد است. متوسط Δt همان τ است. با متوسط‌گیری از دو طرف رابطه‌ی (54.6) می‌رسیم به

$$\ell = \frac{f(\overline{\Delta t})^2}{2m}, \quad \Rightarrow \quad f = \frac{m\ell}{\tau^2} \quad (55.6)$$

در این‌جا از روابط زیر استفاده کرده‌ایم

$$\overline{\Delta x} = \ell, \quad (56.6)$$

$$\overline{v_0} = 0, \quad (57.6)$$

$$\overline{\Delta t} = \tau \quad (58.6)$$

$$\overline{(\Delta t)^2} = 2(\overline{\Delta t})^2 = 2\tau^2 \quad (59.6)$$

با توجه به این که برخوردها کاملاً تصادفی هستند، پس از هر برخورد v_0 می‌تواند مقادیر مثبت و منفی را به طور یک‌سان اختیار کند و متوسط آن صفر است. اگر حرکت حافظه نداشته باشد^۱ یعنی این که احتمال این که ذره در مدت t برخوردی نداشته باشد، مستقل از تاریخچه‌ی قبلی‌ی حرکت باشد، چگالی‌ی احتمال توزیع نمایی می‌شود و می‌توان رابطه‌ی (59.6) را اثبات کرد. تمرین در بخش مسائل را ببینید. البته باید توجه داشته باشیم که با استفاده از نظریه‌ی جنبشی

$$\frac{m\overline{v_0^2}}{2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (60.6)$$

است، که T دما و k_B ثابت بولتزمن است. متوسط اندازه‌ی سرعت ملکول‌های یک شماره‌ی ساکن، $\sqrt{v_0^2}$ ، نه تنها صفر نیست بلکه می‌تواند عدد بزرگی هم باشد. در جدول (۱.۶) سرعت متوسط ملکول‌های چند گاز در دمای بیست درجه‌ی سانتی‌گراد آمده است. به این ترتیب ℓ را طول پویش آزاد میان‌گین و τ را زمان پویش آزاد میان‌گین گرفته‌ایم. سرعت سوق^۲ عبارت است از

$$v_d = \frac{\ell}{\tau} = \frac{f\tau}{m}. \quad (61.6)$$

جدول ۱.۶ سرعت متوسط ملکول‌های چند گاز در دمای بیست درجه‌ی سانتی‌گراد.

| گاز | سرعت متوسط |
|-----------------|-----------------------------------|
| H ₂ | $1.9 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$ |
| He | $1.3 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$ |
| Ne | $0.6 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$ |
| N ₂ | $0.6 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$ |
| CO ₂ | $0.4 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$ |

همین‌طور که می‌بینیم ذرات حتی در حضور نیرویی ثابت هم نمی‌توانند به‌طور ممتد شتاب داشته باشند و سرعتشان زیاد شود. بلکه به‌طور متوسط پس از زمان پویش آزاد میان‌گین به یک سرعت حد می‌رسند. سرعت متوسط دره بین هر دو برخورد سرعت سوق است. از این‌جا

$$f = \frac{m}{\tau} v_d = \zeta v_d. \quad (۶۲.۶)$$

که $\zeta := \frac{m}{\tau}$ است. اما

$$\zeta D = \frac{m}{\tau} \cdot \frac{\ell^2}{2\tau} = m \frac{\ell^2}{2\tau^2} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{3k_B T}{2}. \quad (۶۳.۶)$$

در محاسبه‌ی ای که ما این‌جا کردیم گاهی از این‌که مساله سه بُعدی است استفاده کردیم و جاهایی از نتایج یک‌بُعدی استفاده کردیم. به همین دلیل ضریب رابطه‌ی ۶۳.۶ اشتباه است و جواب درست که از محاسبه دقیق‌تر به دست می‌آید

$$\zeta D = k_B T \quad (۶۴.۶)$$

است.

این رابطه را انشتین در سال ۱۹۰۵ میلادی (۱۲۸۴ شمسی) به دست آورد. همان‌طور که می‌بینیم سمت راست این رابطه تنها به دمای محیط بستگی دارد و مشخصات دیگر محیط یا ذره مثل جرم در آن وارد نشده است. در حالی‌که سمت چپ این رابطه حاصل ضرب دو جمله است که هر کدام به تنهایی به ذره و محیطی که در آن حرکت می‌کند، بستگی دارند ولی در ضریبشان این بستگی از بین می‌رود.

قبلاً نشان دادیم که به ذره‌ای با سرعت کم در شاره نیرویی متناسب با سرعت وارد می‌شود که منجر به این می‌شود که ذره به یک سرعت حد برسد و در آن صورت نیروی مقاومت سیال با نیروی خارجی f برابر می‌شود. برای ذره‌ای به شکل کره ضریب تناسب نیرو با سرعت

$$\zeta = 6\pi\mu a \quad (۶۵.۶)$$

است. بنابراین $a \propto \zeta$ است. برای ذرات کوچکتر ζ کوچکتر و ضریب پخش D بزرگتر است. اگرچه ζ و D توابعی پیچیده از دما هستند، حاصل ضربشان تابعی خطی از دما است.

مثال ۱۰۳.۶ برای یک ماهی با طول $a \approx 0.1 \text{ m}$ که با سرعت $v \approx 1 \text{ ms}^{-1}$ در آب با گرانروی $\mu \approx 10^{-3} \text{ Kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ و چگالی $\rho = 10^3 \text{ Kgm}^{-3}$ شنا می‌کند، عدد رینولدز $Re \approx 10^5$ است. در حالی که برای یک باکتری به اندازه $a \approx 1 \mu\text{m}$ که با سرعتی حدود 10^{-5} ms^{-1} در آب حرکت می‌کند، عدد رینولدز $Re \approx 10^{-5}$ است. در نتیجه عدد رینولدز برای شای ماهی خیلی بزرگ و برای حرکت یک باکتری خیلی کوچک است. برای ماهی حرکت تلاطمی، گرانروی بی‌اهمیت و نیروی مقاومت سیال متناسب با مجذور سرعت است. پس این دو موجود مثل این‌که در دو دنیای متفاوت زندگی می‌کنند. برای یک باکتری در محیطی مثل آب زمان پویش آزاد میانگین τ عبارت است از

$$\tau = \frac{m}{\zeta} = \frac{m}{6\pi\mu a} = \frac{\rho \times 4\pi a^3/3}{6\pi\mu a} = \frac{2a^2\rho}{9\mu} \approx 10^{-6} \text{ s} \quad (۶۶.۶)$$

یعنی زمانی از مرتبه‌ی میکروثانیه و طول پویش آزاد میانگین ℓ عبارت است از

$$\ell = v\tau \approx 10^{-11} \text{ m} \quad (۶۷.۶)$$

یعنی حدود ۰.۱ آنگستروم که از قطر اتم هیدروژن هم کوچکتر است. توان اتلافی

$$P = 6\pi\mu av^2 \approx 10^{-17} \text{ Watts.} \quad (۶۸.۶)$$

هر مولکول گلوکز حدود 10^{-17} J انرژی آزاد می‌کند. پس در هر ثانیه حدود یکی دو مولکول گلوکز و یا حدود 10 مولکول اکسیژن جذب این باکتری می‌شود.

انتشار جوهر پدیده‌ای مثل پخش است. دیدیم که در یک بُعد

$$\sigma^2 := \text{Var} = 2Dt. \quad (۶۹.۶)$$

در سه بُعد این رابطه به صورت

$$\sigma^2 := 6Dt \quad (۷۰.۶)$$

می‌شود. اگر مولکولی که پخش می‌شود را کره‌ای به شعاع a و گرانروی محیط را μ بگیریم، ضریب پخش

$$D = \frac{k_B T}{\zeta} = \frac{k_B T}{6\pi\mu a} \quad (۷۱.۶)$$

می‌شود.

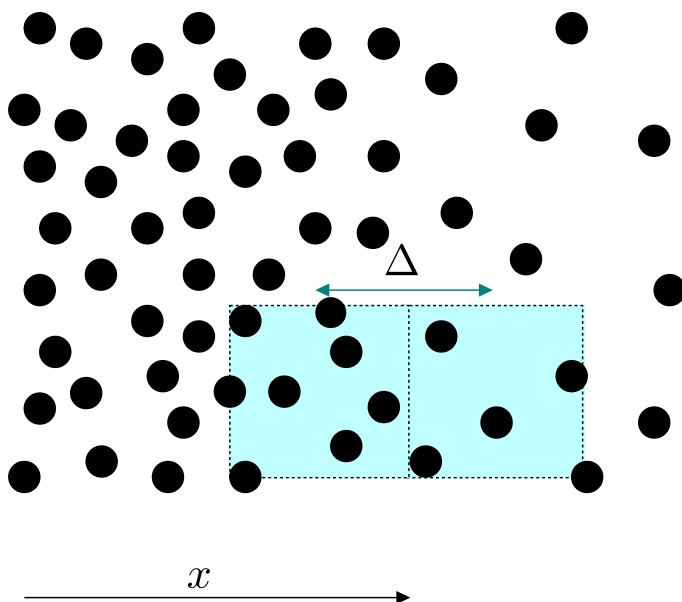
مثال ۲۰۳.۶ محیط را آب با گرانروی $10^{-3} \text{Kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ و دما را هم دمای اتاق بگیرد. ضریب پخش برای مولکول‌های کوچک مثلاً از مرتبه‌ی نانومتر چه قدر است؟

$$D = \frac{4 \times 10^{-21}}{6\pi \times 10^{-9} \times 10^{-3}} \approx 10^{-9} \text{ m}^2\text{s}^{-1} \quad (۷۲.۶)$$

که می‌توان به صورت $D \approx 1 (\mu\text{m})^2 / (\text{ms})$ هم نوشت. اگر سلول بدن خود را کره‌ای به شعاع $10 \mu\text{m}$ بگیریم، مدتی که طول می‌کشد تا مثلاً مولکول‌های قند در داخل سلول پخش شود، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$T = \frac{\sigma^2}{6D} \approx \frac{(10 \mu\text{m})^2}{6 \times 1 (\mu\text{m})^2 / (\text{ms})} \approx 16 \text{ ms} \quad (۷۳.۶)$$

این زمان برای پخش قند درون یک باکتری به ابعاد $1 \mu\text{m}$ حدود 0.16 ms است.



شکل ۵.۶ هر جا در چگالی نایک‌نواختی داشتیم، جریانی برای کم کردن این نایک‌نواختی به وجود می‌آید. گاهی این را به نیرویی با عنوان نیروی انتروپیک نسبت می‌دهیم.

۴.۶ قانون فیک و معادله‌ی پیوستگی

قطره‌ی جوهری را در ظرفِ آبی می‌چکانیم. این قطره به مرور در ظرف پخش می‌شود، تا جایی‌که به طورِ یک‌نواخت آبِ درونِ ظرف را رنگی کند. در ابتدا بخش کوچکی از آب رنگی می‌شود و چگالی‌ی ذراتِ رنگی در ناحیه‌ای کوچک، قابلِ ملاحظه است و در بقیه‌ی نقاط تقریباً صفر است. تا آن‌که به مرور و با گذشتِ زمان چگالی‌ی ذراتِ رنگی یک‌نواخت شود. در واقع پخشِ جوهر باعثِ یک‌نواختیِ چگالی و هم‌وار شدنِ تابعِ چگالی‌ی جوهر در آب می‌شود. بیابید توصیفی کمی برای این پدیده بیابیم. شکل (۵.۶) را ببینید. چگالی در نقطه‌ی x, y, z در زمان t را $\rho(x, y, z, t)$ می‌گیریم. دو سلول به ابعاد Δ در مجاورتِ هم در نظر بگیرید. یکی از آن‌ها مرکزش در $x + \frac{\Delta}{2}, y, z$ و دیگری در $x - \frac{\Delta}{2}, y, z$ است. برای سادگی و فهمِ مطلب ابتدا مساله را یک‌بعدی می‌گیریم. فرض می‌کنیم چگالی‌ی ذرات در راستایِ محورِ x غیریک‌نواخت و در راستایِ y و z یک‌نواخت است. چون چگالی در راستایِ محورهای y و z یک‌نواخت

است، انتظار داریم هر تعداد ذره‌ای که در راستای یکی از این محورها (یعنی y و z) به سلول مجاورش برود، به همان تعداد از آن سلول به سلول اول برگردد. پس آن‌ها اثری در تغییر تعداد ذرات در هر سلول ندارند. اما مساله برای جهت x که در راستای آن چگالی نایک‌نواخت است، فرق می‌کند. در مدت δt به طور متوسط $\frac{1}{2}$ تعداد ذراتی که در هر سلول هستند در جهت $+x$ از دیواره‌ی سلول خارج می‌شوند، و $\frac{1}{2}$ ذرات در جهت $-x$ از دیواره‌ی سلول خارج می‌شوند. برای این‌که شار ذرات از وجه مشترک دو سلول، یعنی تعداد ذراتی که در واحد زمان از واحد سطح وجه مشترک دو سلول در جهت محور x عبور می‌کنند را به دست آوریم، کافی است سهم ذرات خروجی از هر سلول در این راستا در مدت δt را به دست آوریم. پس

$$j_x(x, y, z, t) \Delta^2 \delta t = \frac{1}{2} \left[\rho\left(x - \frac{\Delta}{2}, y, z, t\right) - \rho\left(x + \frac{\Delta}{2}, y, z, t\right) \right] \Delta^3$$

$$j_x(x, y, z, t) = - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\delta t} \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial x}$$

$$j_x = - D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (۷۴.۶)$$

که ثابت $D := \frac{\Delta^2}{2\delta t}$ همان ضریب پخش است. اگر چگالی در همه‌ی راستاها غیریک‌نواخت باشد، مشابه همین نتیجه را برای جهت‌های دیگر هم می‌توان به دست آورد. از این‌جا

$$\mathbf{j} = -D \nabla \rho \quad (۷۵.۶)$$

این معادله قانون فیک^۱ نامیده می‌شود. این رابطه می‌گوید هر جا در چگالی نایک‌نواختی داشتیم، جریانی برای کم کردن این نایک‌نواختی به وجود می‌آید. گاهی این را به نیرویی با عنوان نیروی آنتروپیک نسبت می‌دهیم، هر چند واقعاً نیرویی وجود ندارد ولی گاهی در فیزیک، تمایل آماری کل سیستم برای افزایش آنتروپیی آن را به یک نیروی آنتروپیک نسبت می‌دهیم. اگر سلولی که مرکزش در x, y, z را در نظر بگیریم، تعداد ذرات درون این سلول $\Delta^3 \rho(x, y, z, t)$ به خاطر جریان ذرات از شش وجه آن تغییر می‌کند،

$$\Delta^3 \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} = \Delta^2 \left[j_x\left(x - \frac{\Delta}{2}, y, z, t\right) - j_x\left(x + \frac{\Delta}{2}, y, z, t\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + j_y(x, y - \frac{\Delta}{2}, z, t) - j_y(x, y + \frac{\Delta}{2}, z, t) \\
 & + j_z(x, y, z - \frac{\Delta}{2}, t) - j_z(x, y, z + \frac{\Delta}{2}, t) \Big] \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} & = - \nabla \cdot \mathbf{j}. \tag{۷۶.۶}
 \end{aligned}$$

این معادله قانون پیوستگی است. از ترکیب قانون فیک و معادله پیوستگی به معادله پخش می‌رسیم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho. \tag{۷۷.۶}$$

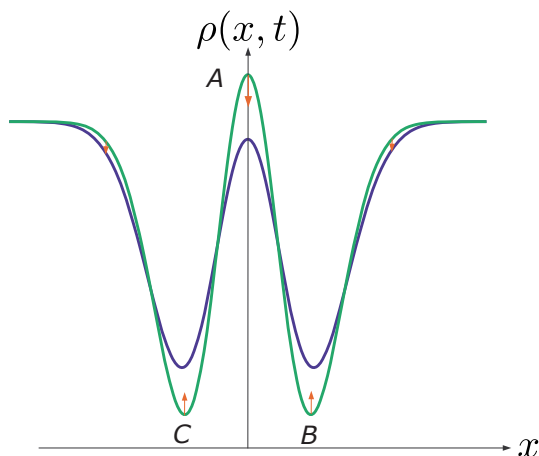
که ضریب D همان ضریب پخش است. برای حل این معادله یک شرط اولیه $\rho(\mathbf{r}, 0)$ به همراه شرط‌های مرزی لازم است. در حالت پایا معادله پخش به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود، که با شرط‌های مرزی دیریکله یا نویمن علی‌الاصول قابل حل است. البته چون معادله‌ای پاره‌ای است، حل آن پیچیده‌تر از معادلات دیفرانسیل عادی است. برای فهم بهتر معادله پخش بیاید ابتدا حالت یک‌بعدی را بررسی کنیم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \tag{۷۸.۶}$$

در شکل (۶.۶) تحول زمانی یک تابع بر اثر معادله پخش را می‌بینیم. در نقطه‌ی A تابع $\rho(x, 0)$ بر حسب x بیشینه و در نتیجه $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} < 0$ است. بنابراین $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ و با گذشت زمان ρ کوچک می‌شود. در نقاط B و C که تابع $\rho(x, 0)$ بر حسب x کمینه است، $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} > 0$ بنابراین $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ و در نتیجه با گذشت زمان ρ بزرگ می‌شود. به همین صورت با گذشت زمان تحول زمانی معادله پخش باعث می‌شود، نقاط بیشینه پایین‌تر بیایند و نقاط کمینه بالاتر بروند، که معنی‌اش این است که خم $\rho(x, t)$ هموار و هموارتر می‌شود. در حالت‌هایی که چگالی یک‌نواخت یا تابعی خطی بر حسب مکان است، یعنی جاهایی که $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$ است، چگالی پایا می‌ماند و تحول زمانی ندارد.

معادله انتقال حرارت هم شبیه معادله پخش است

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{۷۹.۶}$$



شکل ۴.۶ خم سبزرنگ $\rho(x, 0)$ و خم آبی‌رنگ تحول‌یافته‌ی آن بر اثر معادله‌ی پخش است. همان‌طور که می‌بینیم با گذشت زمان خم هموارتر می‌شود.

که T دما و k_i ضریب انتقال حرارت است. جواب‌های این دو معادله هم با هم متناظرند. میله‌ای عایق‌بندی شده را در نظر بگیرید که یک سرش در کوره‌ای با دمای T_1 و سر دیگرش در محیطی با دمای $T_2 < T_1$ قرار دارد. در حالت پایا سر میله که در کوره است دمایش T_1 و سر دیگر میله دمایش T_2 است. شار گرمایی از کوره به سمت بیرون وجود دارد. مشابه این مساله دو مخزن پر از مخلوط آب و جوهر است که چگالی جوهر در یکی ρ_1 و در دیگری ρ_2 است. اگر این دو مخزن را با لوله‌ی باریکی به هم وصل کنیم، پس از گذشت زمانی طولانی چگالی‌ی جوهر در هر دو مخزن یکی می‌شود. اما اگر قطر لوله خیلی باریک باشد این فرآیند می‌تواند بسیار کند باشد. اگر در مدتی کوتاه به لوله‌ی باریک نگاه کنیم، یک گرادیان چگالی‌ی جوهر در آن می‌بینیم که تغییرات زمانی‌ی کمی دارد. این حالت که پایا نیست ولی تغییراتش بسیار کند است، را شبه-پایا^۱ می‌نامند. در این حالت که $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ است

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(x, t) \approx ax + b. \quad (۸۰.۶)$$

^۱quasi-stationary

ثابت‌های a و b از شرایطِ مرزی به دست می‌آیند

$$\rho(x, t) \approx \rho_1 + \frac{(\rho_2 - \rho_1)x}{L}, \quad (۸۱.۶)$$

که L طولِ میله‌ی باریکِ بینِ دو مخزن است. از این‌جا جریانِ جوهر در لوله به دست می‌آید

$$j = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{D \Delta \rho}{L}, \quad (۸۲.۶)$$

که

$$\Delta \rho := \rho_2 - \rho_1 \quad (۸۳.۶)$$

است. گاهی جریان از طریقِ یک کانال طولانی و نازک را به صورت

$$j = -\mathcal{P} \Delta \rho \quad (۸۴.۶)$$

هم می‌نویسند که \mathcal{P} ضریبِ نفوذ است. بُعدِ ضریبِ نفوذ همان بُعدِ D/L یا همان سرعت است.

مثال ۱.۴.۶ سلول را کُرهای به شعاع $R = 10 \mu\text{m}$ بگیرید که توسطِ غشایی محدود شده است که می‌تواند الکل را با ضریبِ نفوذِ ثابتِ $\mathcal{P} = 20 \mu\text{ms}^{-1}$ عبور دهد. اگر در ابتدا چگالی‌ی الکل خارج از سلول ρ_{out} و چگالی‌ی الکل در داخلِ سلول ρ_{in} باشد، چگالی‌ی داخلِ سلول چگونه با زمان عوض می‌شود؟ فرض می‌کنیم فضای خارج از سلول آن‌قدر بزرگ است که تغییراتِ ρ_{out} بسیار کند و تقریباً ثابت است. با استفاده از قانونِ پیوستگی و جاگذاریِ جریانِ نفوذِ الکل می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \int \frac{\partial \rho_{\text{in}}(t)}{\partial t} dV = - \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV \\ - \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} \int dV &= - \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \\ - \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} V &= \mathcal{P} \Delta \rho \int dS, \end{aligned} \quad (۸۵.۶)$$

یا

$$\frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}S}{V} \Delta\rho, \quad (۸۶.۶)$$

که $S = 4\pi R^2$ مساحت سلول، $V = 4\pi R^3/3$ حجم آن، N تعداد مولکول‌های الکل درون سلول و

$$\Delta\rho(t) := \rho_{\text{out}} - \rho_{\text{in}}(t) \quad (۸۷.۶)$$

است. جواب این معادله

$$\Delta\rho(t) := \Delta\rho(0)e^{-t/\tau}, \quad (۸۸.۶)$$

که $\tau := \frac{V}{\mathcal{P}S} = \frac{R}{3\mathcal{P}}$ است. با جاگذاریِ مقادیرِ عددی

$$\tau = \frac{R}{3\mathcal{P}} = \frac{10 \mu\text{m}}{3 \times 20 \mu\text{ms}^{-1}} \approx 0.15 \text{ s} \quad (۸۹.۶)$$

می‌شود. برای سلولِ کوچک‌تر این زمان کوتاه‌تر است.

معادله‌ی پخش در فهم مقدارِ سوخت‌وسازِ باکتری‌ها هم نقش دارد. باکتری را کُرهای به شعاع R می‌گیریم. در فاصله‌ی دور از آن چگالی‌یِ اکسیژن را $\rho(r)|_{r \rightarrow \infty} = \rho_0$ بگیریم. معقول است که فرض کنیم مصرفِ اکسیژن توسطِ باکتری روی چگالی‌یِ اکسیژن در فواصلِ دور تأثیری ندارد. فرض می‌کنیم هرچه اکسیژن به سطحِ باکتری می‌رسد توسطِ آن جذب می‌شود. پس $\rho(r)|_{r=R} = 0$ است. با توجه تقارنِ کروی‌یِ مساله، حلِ معادله‌ی پخش با این شرایطِ مرزی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \rho = 0 &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) \\ r^2 \frac{d\rho}{dr} &= A \\ \rho(r) &= -\frac{A}{r} + B. \end{aligned} \quad (۹۰.۶)$$

با استفاده از شرایط مرزی ثابت‌های A و B به دست می‌آیند

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{R}{r}\right). \quad (۹۱.۶)$$

شار اکسیژن به داخل باکتری

$$\mathbf{j}(r) = -D\nabla\rho(r) = -\frac{D\rho_0 R}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (۹۲.۶)$$

و شدت اکسیژن ورودی روی سطح باکتری به داخل آن

$$I = -\oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi D\rho_0 R \quad (۹۳.۶)$$

است. بیشینه مقدار اکسیژن مصرفی باکتری نمی‌تواند از I بزرگ‌تر باشد. در واقع تعداد اکسیژن ورودی با اندازه‌ی باکتری بزرگ می‌شود ($I \propto R$)، در حالی که مصرف اکسیژن آن با جرم باکتری یعنی R^3 متناسب است، که این می‌تواند روی اندازه‌ی باکتری محدودیت بگذارد. پس

$$Q = \frac{I}{M} = \frac{4\pi D\rho_0 R_{\max}}{(4\pi R^3/3)\rho_b} = \frac{3D\rho_0}{R^2\rho_b}, \quad (۹۴.۶)$$

که ρ_b چگالی باکتری تقریباً همان چگالی آب، و ضریب پخش و چگالی اکسیژن

$$D = 3 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \rho_0 \approx 0.2 \text{ mole}/\text{m}^3 \quad (۹۵.۶)$$

است. با جاگذاری این‌ها و این‌که مصرف اکسیژن آن حدود

$$Q \approx 0.02 \text{ mole}/(\text{Kg s})$$

است، اندازه‌ی بیشینه باکتری $R_{\max} \approx 5.5 \mu\text{m}$ می‌شود.

دیدیم که نایک‌نواختی چگالی متناظر با یک نیروی انتروپیک است. ممکن است نیروهای دیگری ناشی از برهم‌کنش هم وجود داشته باشد. مثلاً در خیلی از سلول‌های حیاتی بین داخل و خارج غشای سلولی اختلاف پتانسیلی وجود دارد. ظرفی از آب نمک به عرض d در نظر بگیرید.

نمک محلول به صورت یون کلرید، Cl^- و سدیم، Na^+ در می‌آید. اگر بیرونِ ظرف دو صفحه رسانا را به اختلاف پتانسیل ΔV وصل کنیم، درونِ ظرف میدان الکتریکی $\mathcal{E} = \Delta V/d$ برقرار می‌شود که باعث شتاب گرفتن یون‌ها با بار q می‌شود. این نیرو باعث ایجاد سرعتِ سوقی به اندازه‌ی $v_d = q\mathcal{E}/\zeta$ می‌شود. بنابراین شارِ ذرات از دو جا سهم می‌گیرد، یکی از نیروی انتروپیک و دیگری از نیروی الکتریکی. پس

$$j = \rho v_d - D \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$j = \frac{q\mathcal{E}\rho}{\zeta} - D \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (۹۶.۶)$$

این معادله را معادله‌ی نرنست-پلانک^۱ می‌نامند. جریانِ ذرات تا آن‌جا ادامه پیدا می‌کند تا سیستم به حالت پایا برسد. در حالت پایا $j = 0$ و

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{q\mathcal{E}}{\zeta D} = \frac{q\mathcal{E}}{k_B T}, \quad (۹۷.۶)$$

است. با انتگرال‌گیری از این رابطه $\rho(x)$ به دست می‌آید. از این‌جا نسبتِ چگالی‌ی یون‌ها در دو سرِ ظرف

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \exp\left(-\frac{q\Delta V}{k_B T}\right), \quad (۹۸.۶)$$

می‌شود، که همان نتیجه‌ای است که از توزیع بولتزمن در حالت تعادل به دست می‌آید. این نتیجه را به شکل زیر هم می‌توان نوشت

$$q\Delta V = k_B T \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (۹۹.۶)$$

مثلاً برای دمای اتاق $k_B T_r = 0.025 \text{ eV}$ و $10 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ ، اختلاف پتانسیل $\Delta V = 58 \text{ mV}$ می‌شود.

^۱Nernst-Planck formula

۱.۴.۶ ته‌نشینی

چرا آبرها روی زمین سقوط نمی‌کنند. در آفتاب به گرد و غبار نگاه کرده‌اید؟ آن‌ها تقریباً در هوا غوطه‌ورند، یا آن‌که با سرعت خیلی کمی سقوط می‌کنند. اما در ابر وقتی قطره‌های ریز به هم می‌چسبند و قطره‌ی باران را می‌سازند، سقوط می‌کنند. قطره‌های بزرگ‌تر با سرعت بیش‌تری سقوط می‌کنند. اگر مشتی سنگ و خاک در هوا بپاشیم، سنگ‌ها به سرعت سقوط می‌کنند، اما ذرات غبار بسیار کُند سقوط می‌کنند. علت این‌ها چیست؟ مساله شیبه چیزی است که در بخش قبل دیدیم. در این‌جا علاوه بر نیروی انتروپیک که می‌تواند باعث ایجاد یک جریان شود، نیروی گرانش هم حضور دارد. برای یک ناحیه‌ی هم‌دما رابطه‌ای مشابه (۹۸.۶) می‌توانیم بنویسیم که به جای اختلاف پتانسیل الکتریکی اختلاف پتانسیل گرانشی مهم است. در این صورت

$$\rho(z) = \rho(0) \exp\left(-\frac{m_{\text{net}}gz}{kBT}\right), \quad (100.6)$$

که m_{net} جرم موثر ذره است. اگر ذره‌ای چگالی‌اش خیلی بزرگ‌تر از چگالی‌ی هوا باشد، جرم موثر ذره همان جرم جسم است. اما برای ذراتی که چگالی‌شان هم مرتبه با چگالی‌ی هوا باشد، نیروی ارشمیدس را هم باید در نظر بگیریم.

مثال ۲.۴.۶ اکسیژن هوا به صورت مولکول O_2 است. جرم هر مولکول را از تقسیم جرم یک مول بر عدد آووگادرو می‌توانیم به دست آوریم

$$m_{O_2} = \frac{32 \text{ g}}{6.02 \times 10^{23}} = 5.3 \times 10^{-23} \text{ g}. \quad (101.6)$$

در اتاقی به ارتفاع 3 m و در دمای اتاق نسبت چگالی‌ی اکسیژن در نزدیکی سقف و زمین

$$\begin{aligned} \frac{\rho(z = 3 \text{ m})}{\rho(z = 0)} &= \exp\left(-\frac{5.3 \times 10^{-26} \times 9.8 \times 3}{4.1 \times 10^{-21}}\right) \\ &= \exp(-38 \times 10^{-5}) \approx 1.0004, \end{aligned} \quad (102.6)$$

است. معنی‌ی این حرف این است که عملاً چگالی‌ی اکسیژن در اتاق یک‌نواخت است.

مثال ۳.۴.۶ یک بسته شیرِ هموژنیزه به ارتفاع $h = 25 \text{ cm}$ را در نظر بگیرید. چگالی‌ی چربی $\rho_{\text{fat}} = 0.91 \text{ g cm}^{-3}$ است. با در نظر گرفتن چگالی‌ی آب $\rho_{\text{net}} \approx -0.1 \text{ g cm}^{-3}$ می‌شود. پس انتظار داریم روغن بالای آب بایستد. اگر مقداری روغن درون آب بریزیم، روغن فوراً به سطح آب می‌آید.

$$\frac{\rho(\text{top})}{\rho(\text{bot})} = \exp\left(-\frac{-0.1 \times 10^{-3} \times 10^{-18} \times 0.25}{4.1 \times 10^{-21}}\right) \approx 10^{2600} \quad (۱۰۳.۶)$$

پس انتظار داریم روغن روی آب جمع شود. حتما دیده‌اید که گاهی خامه روی شیر جمع می‌شود، اما جدا شدن روغن از آب چرا رخ نمی‌دهد؟ نکته‌ی اولی که باید دقت کنیم این است که توزیع بولتزن و این نتیجه‌ای که از آن به دست آمد برای یک سیستم تعادلی صحیح است. یعنی در حالت تعادل حتماً آب و روغن جدا می‌شوند. البته زمان رسیدن به حالت تعادل ممکن است بسیار طولانی باشد.

می‌دانید هموژنیزه کردن شیر یعنی چه؟ شیر هموژنیزه یا هم‌گن شده عبارت از شیری است که چربی آن به تکه‌های کوچک، چند میکرون و یا کوچکتر، شکسته شده است، به طوری که تا زمانی معین بعد از نگهداری شیر هموژنیزه، هیچ گونه خامه‌ای در بالای ظرف شیر جمع نمی‌شود. برای همگن سازی شیر معمولی، آن را از نازلی عبور می‌دهند که گلوبول های چربی را خرد می‌کند. این ذرات چربی کوچکتر پس از آن در شیر معلق باقی می‌مانند، بنابراین خامه‌ی آن جدا نمی‌شود. خُب حالا سوال این است که چرا این ذرات چربی در شیر معلق می‌مانند، در حالی که انتظار داریم به بالای آن بروند و از آب جدا شوند. پدیده‌ی دیگری که ممکن است شنیده باشید، آب و روغن قاطی کردن موتور ماشین است. آب وظیفه‌ی خنک کردن موتور و روغن وظیفه‌ی روان‌سازی آن را دارد. گاهی ممکن است مجاری آب و روغن ترک برداشته و اصطلاحاً موتور ماشین آب و روغن قاطی کند. در این حالت روغن موتور شیری رنگ می‌شود. در هر دوی این حالت‌ها مخلوطی از آب و روغن داریم که سفید یا شیری رنگ است. هرچه ذرات روغن کوچکتر باشند، رنگ ترکیب سفیدتر است. برای فهم این مطلب لازم است در مورد ته‌نشینی کمی بیش‌تر تامل کنیم. در واقع مخلوط آب و روغن از هم جدا می‌شوند ولی بسته به اندازه‌ی قطره‌های روغن ممکن است این فرآیند بسیار کند باشد. بیا باید سرعت حرکت

قطره‌های روغن را تخمین بزنیم.

$$v_d = \frac{m_{\text{net}}g}{\zeta} = \frac{\rho_{\text{net}}g \cdot 4\pi R^3/3}{6\pi\mu R}$$

$$= \frac{2\rho_{\text{net}}g}{9\mu} R^2 \quad (۱۰۴.۶)$$

بنابراین با بزرگ شدن گران رویی محیط و کوچک شدن اندازه‌ی قطره سرعت حرکت آن کوچک‌تر می‌شود. مثلاً برای قطره‌ی روغن یک میکرونی در آب سرعت سوق

$$v_d = \frac{2 \times (-0.1) \times 10^3 \times 9.8}{9 \times 10^{-3}} \times 10^{-12} = -2 \times 10^{-7} \text{ m/s}, \quad (۱۰۵.۶)$$

است. چون روغن از آب سبک‌تر است، علامت سرعت منفی شده و روغن به جای ته‌نشین شدن صدرنشین می‌شود. با این سرعت زمانی که طول می‌کشد قطره‌ی روغنی از کف بسته‌ی شیر به بالای آن برسد حدود 10^6 s که حدود دو هفته است. برای قطره‌های کوچک‌تر این زمان متناسب با کوچک شدن R^2 ، بزرگ می‌شود.

این آزمایش را خودتان می‌توانید انجام دهید. درون ظرفی آب بریزید. سپس مقداری روغن به آن اضافه کنید. روغن به سرعت از آن جدا شده و روی آب می‌ایستد. در ظرف حاوی مخلوط آب و روغن را ببندید و ظرف را خوب تکان دهید. شکل (۷.۶) را ببینید. مخلوط آب و روغن شیری‌رنگ می‌شود. هر چه تکان‌ها شدیدتر باشد و مخلوط هم‌گن‌تر ذرات روغن کوچک‌تر و رنگ مخلوط سفیدتر می‌شود. دلیل این‌که ابرها به رنگ‌های مختلف هستند هم به همین موضوع مربوط است. با تغییر اندازه‌ی قطره‌های آب در آب رنگ آن تغییر می‌کند. البته اگر مواد شیمیایی دیگری هم در آب باشند، می‌توانند منجر به تغییر رنگ آن شوند.

۵.۶ حرکت در شاره‌های با عدد رینولدز کوچک

همه‌ی ما قایق‌های پارویی را دیده‌ایم. پاروزن دو پارو را به سمت عقب قایق هل می‌دهد و با این‌کار نیرویی ایجاد می‌کند که قایق را به جلو می‌راند. سپس پاروزن آن‌ها را از آب خارج می‌کند و به سمت موقعیت‌های اولیه‌شان برمی‌گرداند. در بعضی از انواع شنا، مثلاً شنای پروانه، هم به همین شکل است: هر بازو یک ضربه را در حالی که زیر آب است، به آب می‌زند، و سپس از <https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>



شکل ۷.۶ درون ظرف درداری آب بریزید. سپس مقداری روغن به آن اضافه کنید. روغن به سرعت از آن جدا شده و روی آب می‌ایستد. در ظرف حاوی مخلوط آب و روغن را ببندید و ظرف را به شدت تکان دهید. مخلوط آب و روغن شادمانگ می‌شود.
<https://www.youtube.com/watch?v=amra9u3m0m4>

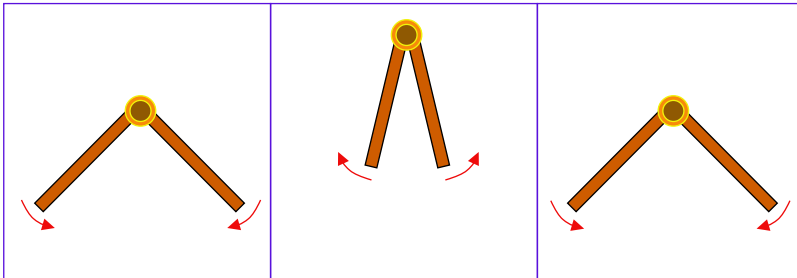
آب خارج می‌شود و به جای اولیه‌ی خود برمی‌گردد. حالا بیایید فرض کنیم که قایق به جای آب در شاره‌ای بسیار گران‌رو باشد. گران‌رویِ آن شاره آن‌قدر بزرگ باشد که به مجرد پارو نزدن آب از حرکت بازایستد. علاوه بر این فرض کنید که پاروها از آب خارج نشود و فقط بتوانیم آن‌ها را در آب جلو و عقب ببریم. علاوه بر این فرض کنید که حرکت پاروها کاملاً هم‌زمان باشد، یعنی هر دو با هم به عقب حرکت می‌کنند یا هر دو هم‌زمان به جلو حرکت می‌کنند. تحت این شرایط، ممکن است زمانی قایق به سمت جلو و زمانی به عقب حرکت کند، اما جابه‌جایی‌ی کلی‌ی آن صفر است. در پایان هر چرخه‌ی کامل از پارو، قایق به جایی که شروع کرده‌بود باز می‌گردد. همان‌طور که می‌دانیم حرکت در اعداد رینولدز کوچک، لایه‌ای و هم‌وار، و در اعداد رینولدز بزرگ تلاطمی است. در حد اعداد رینولدز کوچک، نیرویی که از طرف شاره به جسم وارد می‌شود متناسب با سرعت است. حرکت سلول‌ها در محیط‌شان بیشتر به حرکت یک قایق در شاره‌ی بسیار گران‌رو شبیه است، یعنی در حد اعداد رینولدز کوچک است. قضیه‌ی صدف^۱ در این مورد است.

قضیه ۱۰۵.۶ (قضیه‌ی صدف) شناگری که حرکتی دوره‌ای در زمان با یک درجه آزادی دارد، در طول یک دوره نمی‌تواند یک جابه‌جایی‌ی خالص در محیطی که سیالی نیوتنی با گران‌روی بزرگ است، داشته باشد.

شکل (۸.۶) را ببینید. این شناگر بدن خود را از طریق دنباله‌ای از حرکات، تغییر شکل می‌دهد و سپس با معکوس کردن همان حرکات به شکل و جای اولیه‌ی خود باز می‌گردد. ای.ام. پرسل^۲ این قضیه را در مقاله‌ای در سال ۱۹۷۷ با عنوان *زندگی در اعداد رینولدز کوچک*^۳ بیان کرد و اصول فیزیکی‌ی حرکت در آب را توضیح داد. نام‌گذاری‌ی قضیه به خاطر این است که به حرکت یک صدف می‌پردازد که در طول یک دوره مثل یک لولای ساده باز و بسته می‌شود. چنین حرکتی برای ایجاد جابه‌جایی در اعداد رینولدز کوچک کافی نیست. این گونه حرکت برای صدف، نمونه‌ای از انواع حرکت است که تنها دارای یک درجه آزادی است، که همان زاویه‌ی باز و بسته شدن صدف است. اجسام با یک درجه آزادی در یک محیط بسیار گران‌رو نمی‌توانند حرکت کنند. نتیجه‌ی

۵.۶ حرکت در شاره‌های با عدد رینولدز کوچک

۱۲۳



شکل ۸.۶ این شناگر در محیطی با عدد رینولدز کوچک با بستن دهانه‌اش جابه‌جا می‌شود. با عکس کردن حرکت و بازکردن دهانه‌اش سر جایش برمی‌گردد.

اول این است که به طور متوسط در یک دوره‌ی زمانی به شناگر عملاً هیچ نیروی خالص و یا گشتاور خالصی وارد نمی‌شود. نتیجه‌ی دوم به ما می‌گوید که سرعت متناسب با نیرو است (در مورد سرعت زاویه‌ای و گشتاور نیز مشابه همین را می‌توان گفت). در معادله‌ی ۱۴.۶ معادله‌ی نوی-استوکس را بی‌بُعد کردیم. این معادله در حد اعداد رینولدز کوچک به شکل زیر در می‌آید

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0, \quad (10.6.6)$$

و همان‌طور که می‌بینیم، زمان به صورت صریح وارد نمی‌شود. الگوی حرکت به زمان و این‌که شناگر ابتدا به جلو برود یا به عقب بستگی ندارد، یعنی اگر $v(t)$ جواب باشد، $v(-t)$ هم جواب است. پیامدهای دیگر منجر به ویژگی‌های خاص معادلات استوکس می‌شوند. توجه داشته باشید که معادلات استوکس خطی و مستقل از زمان هستند. این ویژگی‌ها منجر به برگشت‌پذیری سینماتیکی، یک ویژگی مهم حرکت جسم در محدوده‌ی اعداد رینولدز کوچک می‌شود. برگشت‌پذیری سینماتیکی به این معنی است که هر معکوس کردن نیروهای وارد بر جسم صرفاً جهت جریان را عوض می‌کند. وقتی یک جسم فقط یک درجه آزادی داشته باشد، معکوس کردن نیروها باعث ایجاد تغییر شکل جسم به شکل قبلی می‌شود. برای مثال، یک صدف که دهانه‌اش را باز کرده آن را می‌بندد تا به نیروی رانش دست پیدا کند. اما از آن‌جا که معکوس کردن نیروها جهت جریان را تغییر می‌دهد، بدن به در جهت عکس همان حرکت قبلی حرکت می‌کند و منجر به هیچ جابجایی خالصی نمی‌شود.

مثال ۲۰۵.۶ برای فردی که در آب شنا می‌کند، عدد رینولدز می‌تواند خیلی بزرگ باشد. همان‌طور که در مثال ۱۰۳.۶ دیدیم برای یک ماهی به طول $a \approx 0.1 \text{ m}$ که با سرعت $v \approx 1 \text{ ms}^{-1}$ در آب شنا می‌کند، عدد رینولدز $Re \approx 10^5$ است، در حالی که برای یک باکتری به اندازه‌ی $a \approx 1 \mu\text{m}$ که با سرعت $v \approx 20 \mu\text{m s}^{-1}$ در آب حرکت می‌کند، عدد رینولدز $Re \approx 10^{-5}$ است. فرض کنید جسمی به اندازه‌ی باکتری را هل می‌دهیم تا با سرعت $v \approx 20 \mu\text{m s}^{-1}$ حرکت کند. اگر ناگهان آن را رها کنیم تا بایستد، مدتی که طول می‌کشد ساکن شود و مسافتی که تا ایستادن طی می‌کند، از مرتبه‌ی

$$\tau = \frac{2m}{\zeta} = \frac{2m}{6\pi\mu a} = \frac{2\rho \times 4\pi a^3/3}{6\pi\mu a} = \frac{4a^2\rho}{9\mu} \approx 0.4 \mu\text{s} \quad (107.6)$$

$$\ell = v\tau \approx 8 \times 10^{-12} \text{ m}. \quad (108.6)$$

است. پس مسافتی که باکتری تا ایستادن طی می‌کند، حدود 0.1 \AA است، که از قطر اتم هیدروژن هم کوچک‌تر است.

مسائل

۱۰۶ چرا ما نفس می‌کشیم؟ در این‌جا می‌خواهیم زمان پخش اکسیژن از بینی به ریه‌ها را تخمین بزنید. اگر این زمان معقول باشد لازم نیست که نفس بکشیم. اگر کمی صبر کنیم اکسیژن خودش به دلیل پخش از محیط بیرون به ریه‌ها می‌رسد. فاصله‌ی بینی تا ریه‌ها را حدود 20 cm و ضریب پخش اکسیژن در هوا را $D = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ بگیرید.

۲۰۶ الف- زنبور عسل با طول تقریبی 10^{-2} m وقتی به سمت غذا می‌رود با سرعت تقریبی 10 ms^{-1} در هوا پرواز می‌کند. عدد رینولدز برای این زنبور چه قدر است؟ چگالی هوا $\rho = 1.3 \text{ kgm}^{-3}$ و گرانروی آن $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ است.

ب- شاره‌ای با سرعت متوسط v_1 درون استوانه‌ای به شعاع R_1 در حرکت است. جریان

عبوری از شماره Q یعنی حجم ماده‌ای که در واحد زمان از لوله می‌گذرد چه قدر است؟ اگر این لوله باریک شود و شعاع آن R_2 شود، سرعت متوسط شماره در لوله در حالت پایا چه قدر می‌شود؟

ج - ضخیم‌ترین رگ بدن آئورت است که خون را از بطن چپ قلب دریافت و به اعضای بدن می‌رساند. جریان عبوری از آئورت $500 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \approx Q$ و قطر آئورت حدود 2 cm است. سرعت متوسط جریان خون در آئورت تقریباً چه قدر است؟

د- جریان خونی که از آئورت می‌گذرد شاخه‌شاخه شده و در شریان‌ها و سپس در رگ‌ها و بالاخره در موی‌رگ‌ها جاری می‌شود. قطر موی‌رگ‌ها از مرتبه $10 \mu\text{m}$ و سطح مقطع همه‌ی آن‌ها روی هم رفته 4800 cm^2 است. عدد رینولدز برای جریان خون در آئورت و همچنین در موی‌رگ‌ها تقریباً چه قدر است؟ جریان خون در کدام یک لایه‌ای و در کدام یک تلاطمی است؟ چگالی خون تقریباً 1.0 kgm^{-3} و گرانروی آن $5.0 \times 10^{-3} \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ است.

۲.۶ الف- قطر یک سلول زیستی را تقریباً $10 \mu\text{m}$ است. ذراتی درون سلول هستند. دمای محیط را دمای اتاق و ذرات را تقریباً کروی به شعاع حدود $R \approx 0.3 \mu\text{m}$ بگیریید. ضریب پخش آن‌ها را تخمین بزنید.

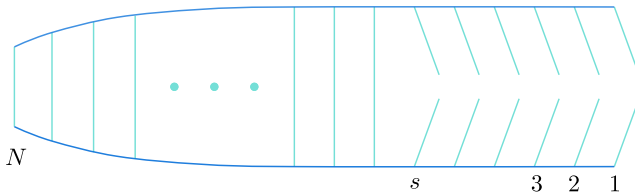
ب- اگر این ذره به طور کاتوره‌ای درون سلول پخش شود، و گرانروی داخلی سلول را با آب برابر بگیریم، تقریباً چه قدر طول می‌کشد تا این ذره قطر سلول را طی کند؟
۲.۶ الف- حشره‌ای با سرعت ثابت 1 ms^{-1} پرواز می‌کند و هر 2 ثانیه یک‌بار جهتش را به طور تصادفی عوض می‌کند. چه مدت طول می‌کشد تا جابه‌جایی تصادفی حشره به طور متوسط 10 m شود؟

ب- این حشره رایحه‌ای ترشح می‌کند که برای حشره‌های مشابه قابل تشخیص است. مولکول عطر با سرعت 300 ms^{-1} حرکت می‌کند، اما حدوداً هر 10^{-11} ثانیه از طریق برخورد مسیرش تغییر می‌کند. وقتی مولکول توسط حشره رها شد، چه مدت طول می‌کشد تا به طور متوسط حدود 10 m جابه‌جا شود؟

ج- با استفاده از نتایج بندهای (الف) و (ب)، استراتژی بهتر برای پیدا کردن جفت از طریق رایحه‌ی ساطع شده کدام است؟ بی‌حرکت بماند و منتظر رایحه شود یا این‌که

فعالانه با پرواز به جست‌وجوی جفت برود؟

۵.۶ یک ملکول DNA شامل دو رشته است که مطابق شکل زیر با N اتصال به هم مربوط‌اند. ملکول نشان داده شده در شکل در حالت s اتصال بریده است. دمای سیستم T است. هر اتصال تنها وقتی بریده می‌شود که تمام اتصالات‌های سمت راست آن بریده



شکل ۹.۶ شکل مساله‌ی ۵.۶.

شده باشند. برای بریدن هر اتصال انرژی ϵ لازم است. بنابراین انرژی متناظر با این شکل $E_s = s\epsilon$ است. وقتی هیچ اتصالی بریده نشده $E_0 = 0$ و وقتی یک اتصال بریده شده $E_1 = \epsilon$ ، و نهایتاً انرژی‌های ممکن

$$E_0 = 0, \quad E_1 = \epsilon, \quad E_2 = 2\epsilon, \quad E_s = s\epsilon, \quad \dots \quad E_N = N\epsilon$$

است.

الف- تابع پارش که با رابطه‌ی $Z = \sum_{s=0}^N e^{-\beta E_s}$ داده می‌شود را به دست آورید.

$\beta := 1/KT$ است.

ب- انرژی متوسط در دمای T برابر است با $\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$. آن را به دست آورید.

راه‌نمایی:

$$\sum_{s=0}^N x^s = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

ج- رابطه‌ای برای تعداد متوسط اتصالات‌هایی که بریده نشده‌اند به دست آورید.

مدل‌هایی برای تحول جمعیت در زیست‌شناسی

در این فصل می‌خواهیم به موضوع مطالعه و استفاده از مدل‌های ریاضی واقع‌گرایانه و عملی برای بررسی تحول جمعیت در زیست‌شناسی بپردازیم. ممکن است موضوع مورد مطالعه، یک جمعیت انسانی با یا بدون توزیع سنی باشد، اپیدمی یک بیماری، یا آنکه مطالعه جمعیت گونه‌های در معرض انقراض، یا رشد یک نوع باکتری یا ویروس و یا غیر این‌ها باشد. هر چند این‌ها ظاهراً مسائل متفاوتی به نظر می‌رسند، شباهت‌هایی هم به هم دارند. با تغییرات کوچکی در مدل‌ها می‌توانیم مسائل متفاوتی را بررسی کنیم. مطالعه این نوع مدل‌ها می‌تواند به درک فرآیندهای دینامیکی این نوع مسائل کمک کند و در پیش‌بینی‌های عملی کاربرد داشته باشد. اکولوژی، اساساً بررسی رابطه‌ی بین گونه‌ها و محیط آن‌ها، مانند مساله‌ی شکار و شکارچی و حضور کمیت‌های موثر، نقش و سهم آن‌ها، مدیریت منابع تجدیدپذیر، جوامع چند گونه‌ای، سیستم‌های گیاه- گیاه‌خوار و ... حوزه‌ی وسیعی از کاربرد این مطالعات است.

۱.۷ مدل‌های تک‌ذره‌ای

هر چند مدل‌های تک‌گونه‌ای بیش‌تر خاص و در حوزه‌ی آزمایشگاهی است، اما در دنیای واقعی و

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

ماکروسکوپی هم می‌توانند مدل‌هایی برای بررسی و نشان‌دهنده‌ی اثرات جملات مختلفی باشند که بر تحول و پویایی جمعیت تاثیر می‌گذارند. فرض کنید $N(t)$ تعداد متوسط یک گونه‌ی خاص در زمان t باشد. جملاتی که در تحول زمانی آن نقش دارند، میزان تولد، مرگ و مهاجرت آن‌گونه هستند. بیایید در ساده‌ترین حالت گونه‌ی مورد مطالعه را مثلاً یک نوع باکتری در نظر بگیریم و تکثیر آن را مطالعه کنیم. فرض کنید این نوع باکتری در محیطی باشد که برای تکثیرش مساعد است و در هر ساعت یک باکتری به دو تا تبدیل می‌شود. در ساعت اول ما با نسل اول آن باکتری روبه‌رویم و در ساعت‌های بعد نسل‌های بعدی به وجود می‌آیند. پس از یک روز تعداد آن‌ها چه قدر می‌شود؟ پس از یک ساعت یک باکتری به دو تا و پس از دو ساعت به چهارتا و پس از 10 ساعت به $1024 = 2^{10}$ و بالاخره پس از 24 ساعت به $2 \times 10^7 \approx 2^{24}$ تا تبدیل می‌شود. یعنی اگر در ابتدا تعداد باکتری‌ها N_0 باشد، پس از یک روز تعداد آن‌ها $N \approx 2 \times 10^7 N_0$ می‌شود. این رشد نمایی است و تغییر تعداد بر واحد زمان متناسب با N است. بنابراین

$$N_{t+\Delta t} = \beta N_t \Delta t + N_t = (\beta \Delta t + 1) N_t. \quad (1.7)$$

که در این جا $\beta \Delta t = 1$ است. ما در این جا یک مدل ساده برای رشد جمعیت را در نظر گرفتیم و فرض‌های ساده‌کننده‌ی مختلفی کردیم. مثلاً از وابستگی فضایی، برهم‌کنش‌های دیگر و رقابت‌ها برای کسب منابع با گونه‌های دیگر و تأثیرات خارجی چشم‌پوشی کردیم. ضمن این که ما نابودی را هم در نظر نگرفتیم. در حالی که در مدل واقعی انتظار داریم نسل‌های مختلفی از یک موجود وجود داشته باشد. برای مدل‌سازی بستگی N به t این نکته را هم باید در نظر بگیریم که آیا نسل‌های متوالی با هم هم‌پوشانی دارند یا نه. در بعضی از گونه‌ها بین نسل‌های متوالی هم‌پوشانی کمی وجود دارد و در بعضی گونه‌ها ممکن است که هم‌پوشانی زیاد باشد. اگر از تعداد یک گونه در زمان t صحبت می‌کنیم، این‌ها عمدتاً متعلق به یک نسل هستند؟ یا آن‌که نسل‌های مختلفی در آن سهم دارند؟ مثلاً بعضی از حشرات در هر روز نسل جدیدی می‌توانند داشته باشند، در حالی که برای سلول‌ها ممکن است این زمان از مرتبه‌ی ساعت و برای موجودات کوچک‌تر مقیاس زمانی کوچک‌تری برای تغییر نسل وجود داشته باشد. در مثال تکثیر یک باکتری هم‌پوشانی بین نسل‌های مختلف باکتری کم است و ما جمعیت باکتری‌ها N را تابعی گسسته از پله‌ی زمانی t گرفتیم و از کمیتی گسسته مثل N_t برای $t = 0, 1, \dots$ صحبت

کردیم. اگر بین نسل‌ها هم‌پوشانی زیادی وجود داشته باشد، ممکن است بتوانیم N را تابعی پیوسته و هم‌وار از t بگیریم. در این صورت (۱.۷) تبدیل می‌شود به

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \beta N. \quad (۲.۷)$$

جواب این معادله

$$N(t) = N_0 e^{\beta t}, \quad (۳.۷)$$

است. اما این جواب قطعاً غیرواقعی است. با گذشت زمان محدودیت‌هایی روی تکثیر باکتری‌ها ایجاد می‌شود، مثلاً ما باید نرخ مرگ و میر را هم در نظر بگیریم، یا محدودیت منابع غذایی می‌تواند عامل مهمی در جلوگیری از رشد نمایی باکتری‌ها باشد. بیایید ابتدا اثر عامل مرگ را در نظر بگیریم. اگر نرخ نابودی هر باکتری در زمان Δt را با δ نشان دهیم، احتمال نابودی هر باکتری در همین زمان $\delta \Delta t$ است. این جمله باعث کاهش N می‌شود. پس با استدلالی مشابه آن‌چه قبلاً انجام دادیم

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \delta)N \quad (۴.۷)$$

می‌شود، که جواب آن

$$N(t) = N_0 e^{(\beta - \delta)t} \quad (۵.۷)$$

است. این جواب شبیه حالت قبل است با این تفاوت که نما می‌تواند منفی هم بشود. پس دو حالت ممکن است رخ دهد: اگر نرخ تولد از نرخ مرگ بزرگ‌تر باشد، یعنی $\beta > \delta$ باشد، جمعیت به طور نمایی زیاد می‌شود و اگر برعکس باشد، یعنی $\beta < \delta$ ، جمعیت به طور نمایی کم می‌شود. برای این‌که اثر مهاجرت را در نظر بگیریم باید جمله‌ی I که معرف نرخ مهاجرت است را به سمت راست اضافه کنیم. بسته به این‌که مهاجرت به سیستم یا از آن به خارج باشد، این جمله می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در این صورت

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \delta)N + I, \quad (۶.۷)$$

و جواب آن

$$N(t) = (N_0 + \frac{I}{\beta - \delta})e^{(\beta - \delta)t} - \frac{I}{\beta - \delta}, \quad (7.7)$$

است.

ملاحظه ۱.۱.۷

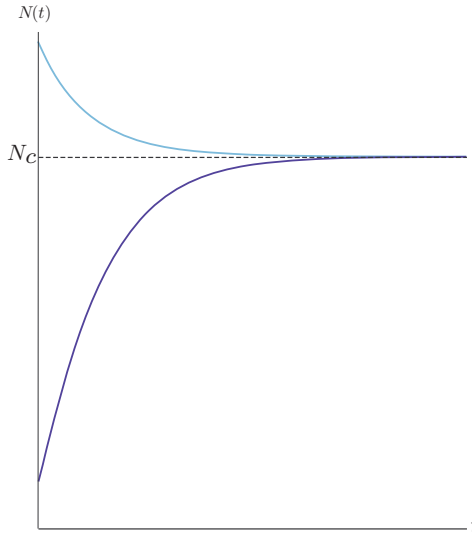
- در کار تجربی و به دست آوردن داده‌های تجربی و آزمایش‌گاهی اندازه‌گیری معمولاً در بازه‌های زمانی گسسته انجام می‌شوند. هر چند اگر داده‌ها زیاد باشند پارامتر زمان تقریباً پیوسته است.
- در محاسبه‌ی تحلیلی بیش‌تر از ابزارهای ریاضی‌ی‌زمان پیوسته و در محاسبات کامپیوتری از مدل‌های زمان گسسته استفاده می‌کنیم.
- گاهی مدل‌های زمان پیوسته را با گسسته‌کردن به عنوان تقریب بررسی می‌کنیم. مدل‌های زمان گسسته را هم به تقریب می‌توان با روش‌های تحلیلی در مدل‌های زمان پیوسته بررسی کرد.
- گاهی در مساله مورد نظر ما مقیاس‌های زمانی متفاوتی وجود دارد که در تحلیل آن‌ها بهتر است از مدل‌های زمان گسسته و یا از زمان پیوسته استفاده کنیم. بعضی پدیده‌ها اساساً زمان گسسته هستند، مثلاً بسیاری از حیوانات فصل و زمان معینی برای تخم‌گذاری و تولید مثل دارند. در بعضی پدیده‌ها هم بهتر است از مدل‌های زمان پیوسته استفاده کرد.

۲.۷ معادله‌ی لجستیک

اثر محدودیت منابع غذایی یا مهاجرت (که دومی می‌تواند مثبت یا منفی باشد) را چگونه وارد کنیم؟ در حالت کلی می‌توانیم معادله‌ی تحول جمعیت را به شکل

$$\frac{dN}{dt} = NF(N), \quad (8.7)$$

بگیریم. فرض کنیم که تابع $F(N)$ تابعی تحلیلی باشد و به تقریب در N کوچک آن را همان



شکل ۱.۷ جواب معادله‌ی لجستیک برای دو مقدار اولیه‌ی متفاوت N_0 .

چند جمله‌ی اول بسط تیلورش بگیریم. پس

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N [F(0) + NF'(0) + \dots] \\ &\approx N(a - bN), \end{aligned} \quad (9.7)$$

که $a := F(0) > 0$ یعنی نرخ تولد را از نرخ مرگ بزرگ‌تر گرفته‌ایم و $b := -F'(0) > 0$ است. می‌خواهیم محدودیت منابع که جلوی تکثیر شدید و نمایی جمعیت می‌گیرد را با منفی گرفتن $F'(0)$ برآورده کنیم. معادله‌ی (۹.۷) به معادله‌ی لجستیک^۱ معروف است. به ازای دو مقدار a/b , $N = 0$ سمت راست رابطه‌ی (۹.۷) صفر می‌شود. به این‌ها نقاط ثابت^۲ می‌گویند. همان‌طور که از معادله هم پیداست اگر جمعیت از یک مقدار حدی کوچک‌تر باشد $N < N_c := a/b$ جمعیت زیاد می‌شود. اما اگر $N > N_c := a/b$ باشد، جمعیت کم می‌شود

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{N_c} \right). \quad (10.7)$$

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت

$$\frac{N_c dN}{N(N_c - N)} = a dt$$

$$\frac{dN}{N} + \frac{dN}{N_c - N} = a dt, \quad (11.7)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\ln \left[\frac{N(N_c - N_0)}{N_0(N_c - N)} \right] = a t$$

$$N(t) = \frac{N_0 N_c e^{at}}{N_c + N_0(e^{at} - 1)}, \quad (12.7)$$

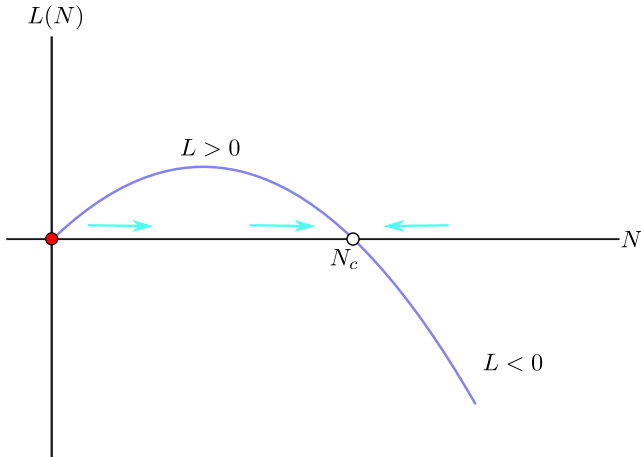
که $N_0 := N(0)$ است. پس از زمان طولانی $t \rightarrow \infty$ ، به ازای هر مقدار اولیه‌ی $N_0 \neq 0$ ، N به سمت N_c میل می‌کند. به اصطلاح می‌گویند این نقطه جاذب^۱ است. معادله‌ی لجستیک را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{dN}{dt} = L(N) \quad (13.7)$$

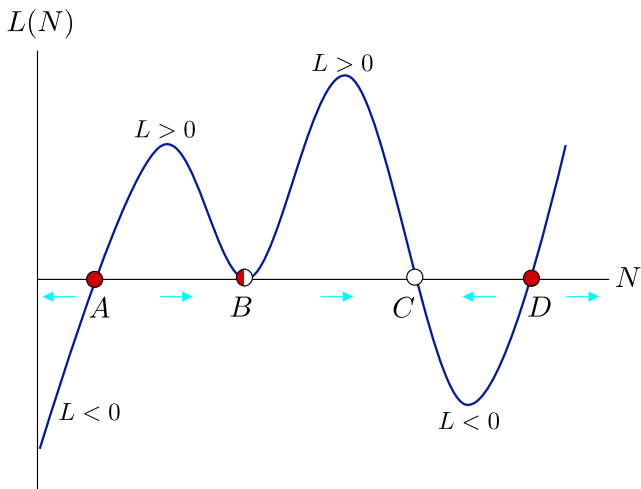
که در حالتی که بررسی کردیم، $L(N) = aN \left(1 - \frac{N}{N_c}\right)$ ، در شکل (۲.۷)، $L(N)$ بر حسب N رسم شده است. این تابع در دو نقطه‌ی $N = 0$ و $N = N_c$ صفر می‌شود. اگر $N < N_c$ باشد، منابع غذایی به اندازه‌ی کافی است و جمعیت زیاد می‌شود. در حالتی که $N > N_c$ باشد، منابع غذایی به اندازه‌ی کافی نیست و نمی‌تواند نیازهای این اندازه جمعیت را تامین کند. در این حالت جمعیت به تدریج کم می‌شود تا در زمان بلند به حدود N_c می‌رسد.

حالا بیایید حل کلی‌ی این نوع معادلات را بررسی کنیم. فرض کنید تابع $L(N)$ مطابق شکل (۳.۷) باشد. نقاط A, B, C و D نقاط ثابت هستند. در این نقاط $L = 0$ و در نتیجه $\frac{dN}{dt} = 0$ است. جاهایی که $L > 0$ است، $\frac{dN}{dt} > 0$ و جاهایی که $L < 0$ است، $\frac{dN}{dt} < 0$ است. نقاط A و D ثابت هستند ولی دافع^۲ هستند، به این معنی که اگر سیستم کمی مختل شود از این نقاط دور می‌شود. شکل (۳.۷) را ببینید. نقطه‌ی C ثابت و جاذب است، به این معنی که

Repulsive^۲ Attractive^۱



شکل ۲.۷ $L(N)$ بر حسب N .



شکل ۳.۷ $L(N)$ بر حسب N . نقاط A و D ثابت و دافع که با دایره‌ی قرمز نشان داده شده‌اند و نقطه‌ی C ثابت و جاذب است که با دایره‌ی سفید نشان داده شده‌است. نقطه‌ی B هم ثابت است ولی در یک جهت جاذب و در جهت دیگر دافع است. نیمی از دایره در این نقطه که ناپایدار است قرمز و نیم دیگر که پایدار است سفید است.

اگر سیستم کمی مختل شود به این نقطه برمی‌گردد. و بالاخره نقطه‌ی B هم ثابت است. در یک جهت جاذب و در جهت دیگر دافع است. این‌گونه نقاط عملاً دافع هستند، چون بالاخره اختلالی که در جهت دفع هم باشد ممکن است رخ دهد و در نهایت سیستم از این نقطه دور می‌شود. در معادله‌ی لجستیک N_c نقطه‌ی جاذب است.

۱.۲.۷ معادله‌ی لجستیکِ زمان‌گسسته

معادله‌ی لجستیکِ زمان‌پیوسته

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{N_c} \right). \quad (14.7)$$

است. نقاط ثابت این معادله $N = N_c$ و $N = 0$ هستند. در این معادله فرض شده که نرخ زاد و ولد و مرگ مستقل از زمان است و برای بررسی‌ی تحول جمعیت بعضی گونه‌ها مناسب است. اما این فرض برای پرندگان و بسیاری از حیوانات که فصل و زمان معینی برای تخم‌گذاری و تولید مثل دارند، مناسب نیست. یکی از مدل‌ها استفاده از همان معادله‌ی لجستیک ولی در حالتِ زمان‌گسسته است.

$$\frac{N_{t+\Delta} - N_t}{\Delta} = aN_t \left(1 - \frac{N_t}{N_c} \right),$$

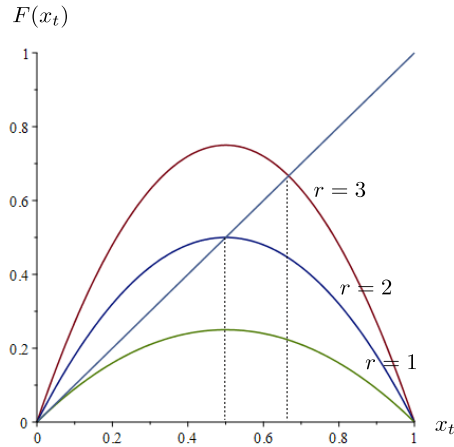
$$N_{t+\Delta} = (1 + a\Delta)N_t \left(1 - \frac{N_t a \Delta}{N_c(1 + a\Delta)} \right). \quad (15.7)$$

ممکن است به نظر آید، جواب‌های این معادله هم همان رفتارِ معادله‌ی لجستیکِ زمان پیوسته را دارد. ولی این‌طور نیست. با بهنجار کردنِ تعدادِ موجودات و انتخابِ واحدِ زمان مناسب، معادله‌ی لجستیکِ زمان‌گسسته تبدیل می‌شود به

$$x_{t+1} = F(x_t) = rx_t(1 - x_t) \quad 0 \leq x_t \leq 1 \quad (16.7)$$

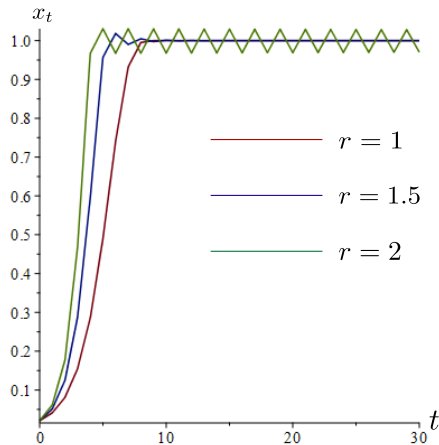
از معادله‌ی لجستیکِ زمان‌گسسته برای بررسی‌ی رشدِ تومور هم استفاده شده است.^۱ r پارامتری است که رفتارِ سیستم را تعیین می‌کند. نقاط ثابتِ معادله‌ی (۱۶.۷)، 0 و $1 - \frac{1}{r}$ هستند. $x = 0$ که جوابِ بدیهی است. در معادله‌ی لجستیکِ زمان‌پیوسته نقطه‌ی ثابتِ دوم نقطه‌ی جاذب بود و مستقل از شرایطِ اولیه به ازای هر $N(0) \neq 0$ سیستم به این حالت می‌رود.

S.S. Cross and D.W.K. Cotton, Chaos and antichaos in pathology. Human Pathol., 25:630-637,¹



شکل ۴.۷ $F(x_t)$ بر حسب x_t .

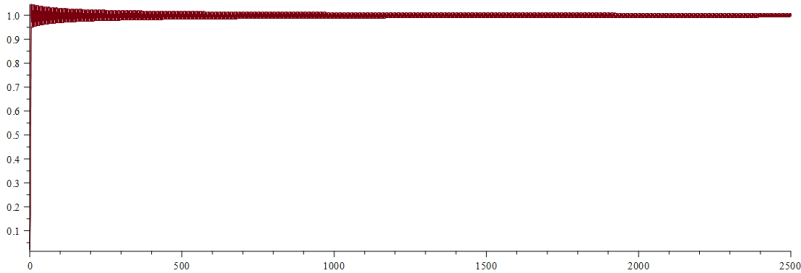
بیاید همین مسئله را برای معادله‌ی لاجستیکِ زمان‌گسسته بررسی کنیم. در شکل (۵.۷)، x_t برای $t = 0, 1, \dots, 30$ و شرطِ اولیه‌ی $x_0 = 0.02$ به ازای سه مقدار $r = 1, 1.5, 2$ رسم شده است. همان‌طور که می‌بینیم به ازای $r = 1.5$ و $r = 2$ مقدار x به نقطه‌ی ثابت میل می‌کند.



شکل ۵.۷ x_t برای $t = 0, 1, \dots, 30$ و شرطِ اولیه‌ی $x_0 = 0.02$ به ازای سه مقدار $r = 1, 1.5, 2$ رسم شده است.

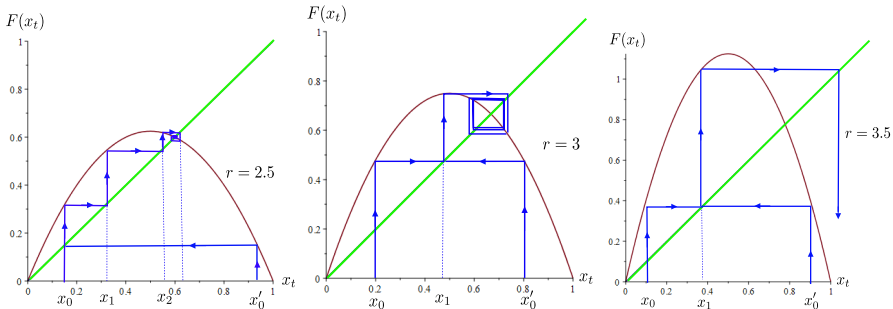
ولی برای $r = 2$ ظاهراً حول مقدار ثابت نوسان می‌کند.

در شکل (۶.۷)، x_t برای $t = 0, 1, \dots, 2500$ و شرط اولیه‌ی $x_0 = 0.02$ به ازای $r = 2$ رسم شده است. همان‌طور که می‌بینیم در زمان‌های بلند جواب‌مان به مقدار ثابت میل می‌کند. همین‌جا یک فرق را با معادله‌ی لجستیک زمان‌پیوسته می‌بینیم. در آن‌جا $N(t)$ به طور یک‌نوا به نقطه‌ی ثابت میل می‌کرد، اما این‌جا مثلاً به ازای $r = 2$ حول نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و پس از زمان طولانی به مقدار ثابت x_c میل می‌کند.



شکل ۶.۷ x_t برای $t = 0, 1, \dots, 2500$ و شرط اولیه‌ی $x_0 = 0.02$ به ازای $r = 2$ رسم شده است. x_t حول نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و پس از زمان طولانی به مقدار ثابت x_c میل می‌کند.

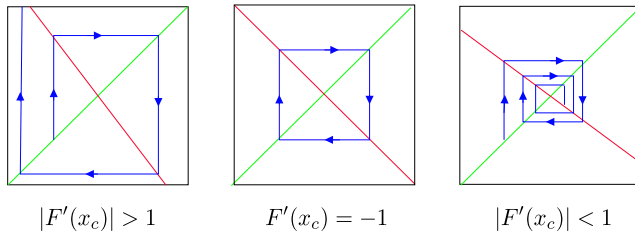
یک راه دیگر برای بررسی نحوه‌ی نزدیک شدن به نقطه‌ی ایستا به جای حل مستقیم معادله‌ی (۱۶.۷) استفاده از روش گرافیکی است. در شکل (۷.۷)، $F(x_t)$ با دو شرط اولیه‌ی متفاوت x_0 و x'_0 به ازای $r = 2.5, 3, 3.5$ رسم شده است. همان‌طور که در این شکل هم می‌بینیم، در



شکل ۷.۷ x_t با دو شرط اولیه‌ی متفاوت x_0 و x'_0 به ازای سه مقدار $r = 2.5, 3, 3.5$ رسم شده است.

زمان‌های بلند جواب‌مان به ازای $r = 2.5$ حول نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و پس از زمان طولانی به مقدار ثابت x_c میل می‌کند. جواب‌مان به ازای $r = 3$ حول نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و به ازای $r = 3.5$ حتی ممکن است از نقطه‌ی ثابت دور می‌شود (شاید هم مجدداً برگردد).

پارامتری که رفتار در نزدیکی نقطه‌ی ثابت را تعیین می‌کند، $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_c}$ است. اگر $|F'(x_c)| < 1$ باشد، نقطه‌ی ثابت جاذب و پایدار است و اگر $|F'(x_c)| > 1$ باشد، نقطه‌ی ثابت ناپایدار است. در حالی که $F'(x_c) = -1$ باشد، حرکت چرخه‌ای به دور نقطه‌ی ثابت است. شکل (۷.۷) را ببینید.



شکل ۸.۷ $|F'(x_c)|$ رفتار در نزدیکی نقطه‌ی ثابت را تعیین می‌کند.

برای فهم بهتر این موضوع بیایید فرض کنید به جوابی در نزدیکی نقطه‌ی ثابت رسیده‌ایم

$$x_t = x_c + u_t, \quad |u_t| \ll 1. \quad (۱۷.۷)$$

با جای‌گذاری‌ی این جواب در معادله‌ی (۱۶.۷)، بسط $F(x_c + u_t)$ حول نقطه‌ی ثابت x_c می‌رسیم به

$$\begin{aligned} x_c + u_{t+1} &= F(x_c + u_t) \\ &= F(x_c) + F'(x_c)u_t + \dots \end{aligned} \quad (۱۸.۷)$$

اما چون $x_c = F(x_c)$ است، با چشم‌پوشی از جمله‌ی مرتبه‌دوم و بالاتر u_t نتیجه می‌شود

$$u_{t+1} = F'(x_c)u_t, \quad (۱۹.۷)$$

که جوابش

$$u_t = [F'(x_c)]^t u_0, \quad (۲۰.۷)$$

- است. اگر $|F'(x_c)| < 1$ باشد، نقطه‌ی ثابت جاذب و پایدار است. به زبان دقیق‌تر
- اگر $0 < F'(x_c) < 1$ باشد، اختلال به طور یک‌نوا به سمت صفر می‌رود، اما اگر $-1 < F'(x_c) < 0$ باشد، حول نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و دامنه‌اش به سمت صفر می‌رود.
 - اگر $|F'(x_c)| > 1$ باشد، نقطه‌ی ثابت ناپایدار است. در این حالت نیز اگر $1 < F'(x_c)$ باشد، اختلال به طور یک‌نوا بزرگ می‌شود، اما اگر $F'(x_c) < -1$ باشد، حول نقطه‌ی ثابت نوسان می‌کند و دامنه‌اش بزرگ شود.
 - در حالی که $F'(x_c) = -1$ باشد، حرکت چرخه‌ای به دور نقطه‌ی ثابت است. برگردیم به حل معادله‌ی (۱۶.۷). دیدیم که این معادله دو نقطه‌ی ثابت دارد

$$x_{1,c} = 0, \quad F'(0) = r, \quad (21.7)$$

$$x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}, \quad F'(1 - \frac{1}{r}) = 2 - r. \quad (22.7)$$

- اگر $0 < r < 1$ باشد، تنها جواب اول قابل قبول است و این جواب هم جاذب است. لازم هم نیست در نزدیکی‌ی این نقطه باشیم. به ازای هر مقدار قابل قبولی از شرایط اولیه

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots \quad (23.7)$$

- و پس از زمان طولانی، جواب به $x_{1,c} = 0$ میل می‌کند.
- وقتی r بزرگ می‌شود و از 1 عبور می‌کند، دو نقطه‌ی ثابت قابل قبول داریم که $x_{1,c} = 0$ ناپایدار و $x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}$ پایدار و جاذب است. به این معنی می‌گوییم اولین انشعاب در $r = 1$ رخ می‌دهد.

- با گذشتن از این مقدار برای پارامتر r و در ناحیه‌ی $1 < r < 3$ جواب $x_{1,c} = 0$ که پایدار بود، ناپایدار می‌شود و $x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}$ پایدار می‌شود. دومین انشعاب در $r = 3$ رخ می‌دهد. به ازای $r = 3$ ، $F' = -1$ و جواب دوره‌ای می‌شود.

- با گذشتن از این مقدار برای پارامتر r و در ناحیه‌ی $3 < r$ جواب $x_{2,c} = 1 - \frac{1}{r}$ که پایدار بود، ناپایدار می‌شود. در این صورت هر دو جواب ناپایدارند. چه باید کرد؟ در معادله‌ی (۱۶.۷)، x_{t+1} بر حسب x_t داده می‌شود. می‌توانیم x_{t+2} ، x_{t+3} و ... را بر

حسب x_t بنویسیم.

$$x_{t+1} = F^{(1)}(x_t) = F(x_t) = rx_t(1 - x_t), \quad (24.7)$$

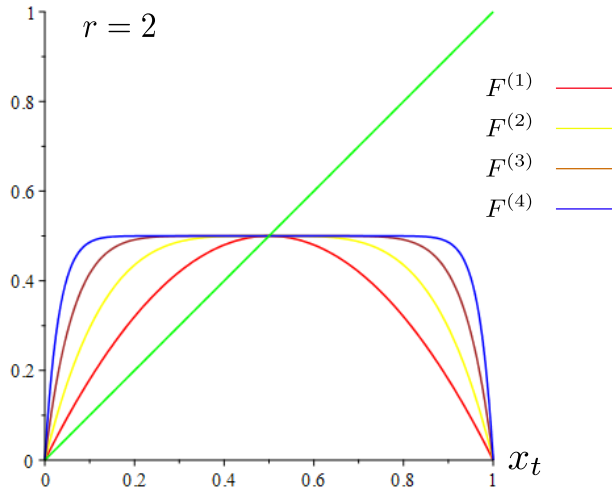
$$\begin{aligned} x_{t+2} &= F(x_{t+1}) = F(F(x_t)) = F^{(2)}(x_t), \\ &= r^2 x_t(1 - x_t)(1 - rx_t(1 - x_t)) \end{aligned} \quad (25.7)$$

$$\begin{aligned} x_{t+3} &= F(F(F(x_t))) = F^{(3)}(x_t) \\ &= r^3 x_t(1 - x_t)(1 - rx_t(1 - x_t)) \\ &\quad \times [(1 - r^2 x_t(1 - x_t)(1 - rx_t(1 - x_t)))] , \end{aligned} \quad (26.7)$$

⋮

$$x_{t+n} = F^{(n)}(x_t) \quad (27.7)$$

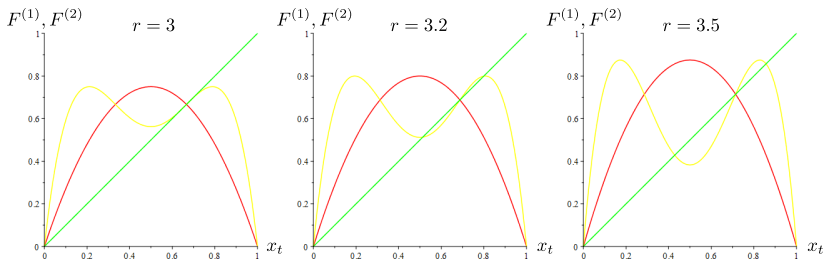
در شکل (۹.۷) به ازای $r = 2$ ، $F^{(1)}$ تا $F^{(4)}$ بر حسب x_t رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم، به ازای $r = 2$ ، در مرتبه‌های بالاتر هم جواب جدیدی نداریم.



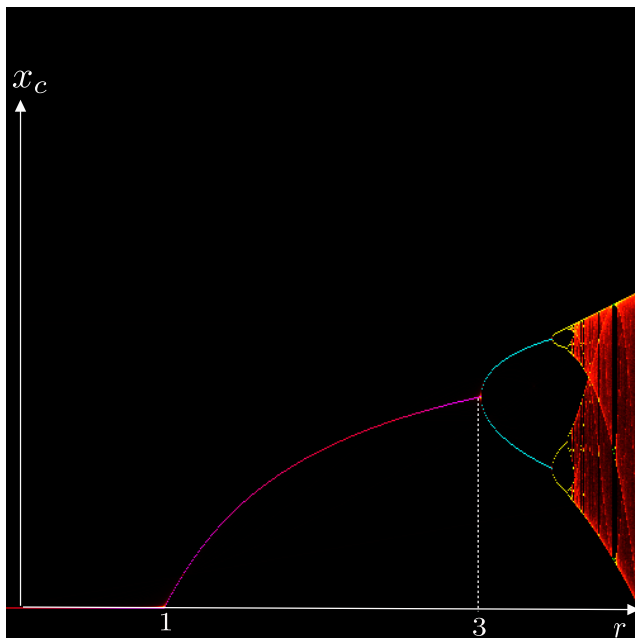
شکل ۹.۷ $F^{(1)}$ تا $F^{(4)}$ بر حسب x_t به ازای $r = 2$.

در شکل (۹.۷) به ازای $r = 3, 3.2, 3.5$ ، $F^{(1)}$ و $F^{(2)}$ بر حسب x_t رسم شده‌اند.
<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

همان‌طور که می‌بینیم، به ازای $r > 3$ ، در مرتبه‌ی بالاتر چهار جواب جدید داریم، که دو تا از آن‌ها همان جواب قبلی است که ناپایدارند. اما دو جواب جدید پایدارند. در $r = 3$ انشعاب دوم رخ می‌دهد. با بزرگ‌شدن r این شاخه‌شاخه‌شدن ادامه پیدا می‌کند. شکل (۱۱.۷) را ببینید.



شکل ۱۰.۷ $F^{(1)}$ خم قرمز رنگ و $F^{(2)}$ خم زرد رنگ بر حسب x_t به ازای $r = 3, 3.2, 3.5$.



شکل ۱۱.۷ انشعاب برای معادله‌ی لجستک زمان‌گسسته.

۲.۲.۷ مدلی برای شیوع حشرات

کرم جوانه‌ی صنوبر یکی از مخرب‌ترین حشرات بومی در آمریکای شمالی است. بیشتر اوقات جمعیت آن‌ها کم است، اما در یک دوره‌ی تقریباً ۴۰ ساله یا کمی بیشتر، جمعیت کرم‌ها به شدت زیاد می‌شود، جنگل‌ها را ویران و بسیاری از درختان را نابود می‌کند. از شواهد برمی‌آید که این پدیده صدها سال است که ادامه دارد. چون این پدیده منجر به نابودی درخت صنوبر شده است، دست‌اندرکاران صنعت چوب مایل به درک این چرخه‌ها به عنوان اولین قدم برای یافتن راهی برای مدیریت این مساله هستند. وقتی جمعیت کرم‌ها کم است، پرندگان به سراغ‌شان نمی‌آیند. ولی وقتی جمعیت‌شان زیاد شد، پرندگان برای تغذیه از آن‌ها استفاده می‌کنند. اما یک حد اشباع هم برای این مساله وجود دارد. به این معنا که پرندگان نمی‌توانند جلوی شیوع آن‌ها را بگیرند. این منجر به اضافه‌شدن جمله‌ای به معادله‌ی تحول جمعیت که در بخش قبل بررسی کردیم می‌شود. این جمله به صورت کیفی چیزی مثل شکل (۱۲.۷) است.

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - P(N). \quad (28.7)$$

فرض می‌کنیم

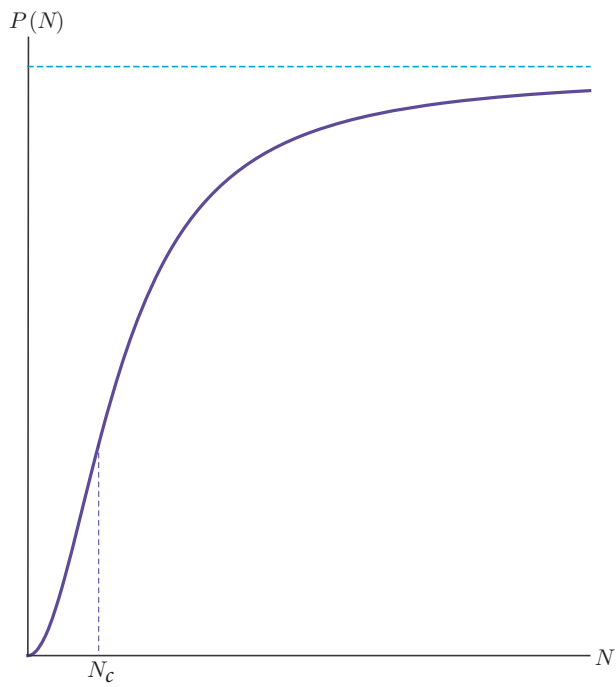
$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} P(N) &= 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} P(N) &= \text{ثابت} \end{aligned} \quad (29.7)$$

مثلاً

$$P(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2} \quad (30.7)$$

تابعی است که این خواص را برآورده می‌کند. با بی‌بعد کردن

$$\begin{aligned} u &:= \frac{N}{A}, & r &:= \frac{Aa}{B} \\ \tau &:= \frac{Bt}{A}, & q &:= \frac{K}{A} \end{aligned} \quad (31.7)$$



شکل ۱۲.۷ $P(N)$ بر حسب N .

معادله‌ی تحول را به شکل ساده‌تری می‌نویسیم

$$\frac{du}{d\tau} = ru \left(1 - \frac{u}{q} \right) - \frac{u^2}{1 + u^2}. \quad (۳۲.۷)$$

رفتار این سیستم را دو پارامتر q و r تعیین می‌کنند. برای این‌که نقاط ثابت را به دست آوریم باید ببینیم در چه نقاطی سمت راست معادله‌ی تحول صفر می‌شود.

به غیر از $\tilde{u} = 0$ ، باید جواب‌های معادله‌ی $f_1 = f_2$ یا محل تقاطع منحنی‌های مربوط به این دو تابع را به دست آوریم، که $f_1(\tilde{u}) := r \left(1 - \frac{\tilde{u}}{q} \right)$ و $f_2(\tilde{u}) := \frac{\tilde{u}}{1 + \tilde{u}^2}$ هستند. $f_1(\tilde{u})$ تابعی خطی است که عرض از مبدا آن r و در $\tilde{u} = q$ صفر می‌شود. همان‌طور که در شکل (۱۳.۷) می‌بینیم با ثابت نگه داشتن q و تغییر r خط‌هایی با شیب‌های مختلف خواهیم داشت که با خطوط نقطه‌چین نشان داده شده است. $f_2(\tilde{u})$ تابعی است که در مبدا صفر است، در $\tilde{u} \rightarrow \infty$ از سمت بالای محور به صفر میل می‌کند و یک بیشینه هم دارد. با تغییر r شیب خط f_1 عوض می‌شود و برای r های بزرگ و r های کوچک یک نقطه‌ی تقاطع برای دو تابع داریم و برای q ثابت به ازای مقادیری از r که خط‌ها در ناحیه‌ی آبی‌رنگ هستند، سه نقطه‌ی تقاطع داریم. پس با در نظر گرفتن $\tilde{u} = 0$ یا چهار نقطه‌ی ثابت و یا دو نقطه‌ی ثابت داریم. مرز ناحیه‌ی آبی رنگ جایی است که تعداد نقاط ثابت از دو به چهار تبدیل می‌شود. در این مرز علاوه بر این‌که دو تابع با هم برابرند، شیب‌شان هم یکی است. یعنی در نقطه‌ای مثل $\tilde{u} = \alpha$

$$r \left(1 - \frac{\alpha}{q} \right) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \quad (۳۳.۷)$$

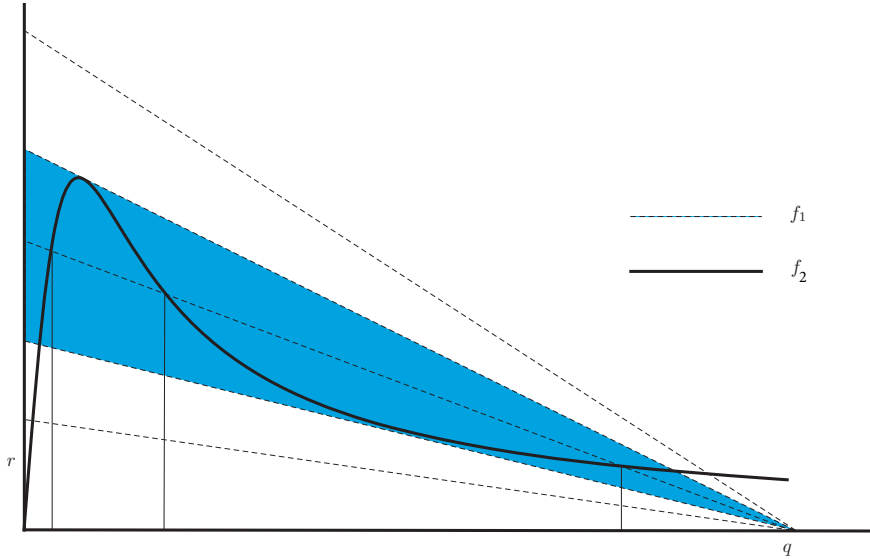
$$-\frac{r}{q} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \quad (۳۴.۷)$$

که نتیجه می‌دهد

$$r = \frac{2\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^2} \quad (۳۵.۷)$$

$$q = \frac{2\alpha^3}{\alpha^2 - 1} \quad (۳۶.۷)$$

دو پارامتر r و q مقادیری نامنفی هستند، پس حتماً $\alpha \geq 1$ است. در حد $\alpha \rightarrow 1^+$ ، $q \rightarrow \infty$



شکل ۱۳.۷ f_1 و f_2 بر حسب \bar{u}

و در حد $r \rightarrow 1/2$ و $\alpha \rightarrow \infty$ ، $q \rightarrow \infty$ و $r \rightarrow 0$ می‌روند. با افزایش α نسبت به یک ابتدا r صعودی است تا به یک بیشینه می‌رسد و سپس نزولی می‌شود تا به صفر برسد. q هم در ناحیه $\alpha < 1$ تابعی نزولی از آن است. بیشینه r به ازای $\alpha = \sqrt{3}$ است. در این نقطه خم بر حسب q یک تیزی^۱ دارد. شکل (۱۴.۷) را ببینید.

ناحیه آبی‌رنگ در شکل (۱۴.۷) جایی است که چهار نقطه ثابت داریم و ناحیه سفیدرنگ جایی است که دو نقطه ثابت داریم. مرز این ناحیه جایی است که تعداد نقاط ثابت به طور ناپیوسته عوض می‌شود. جهت فلش روی مرز در جهت افزایش α است.

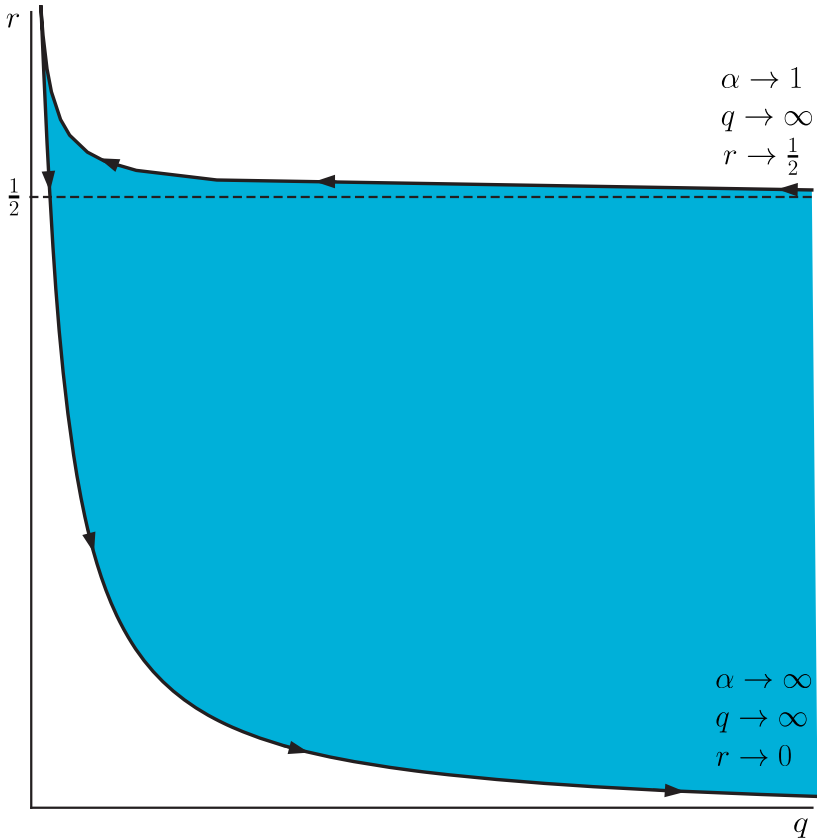
در مورد تعداد نقاط ثابت و جاذب یا دافع بودن آن‌ها می‌توان مساله را از نگاه دیگری هم بررسی کرد. در مقایسه با (۱۳.۷) $L(u)$ عبارت است از

$$L(u) = ru \left(1 - \frac{u}{q} \right) - \frac{u^2}{1 + u^2}. \quad (۳۷.۷)$$

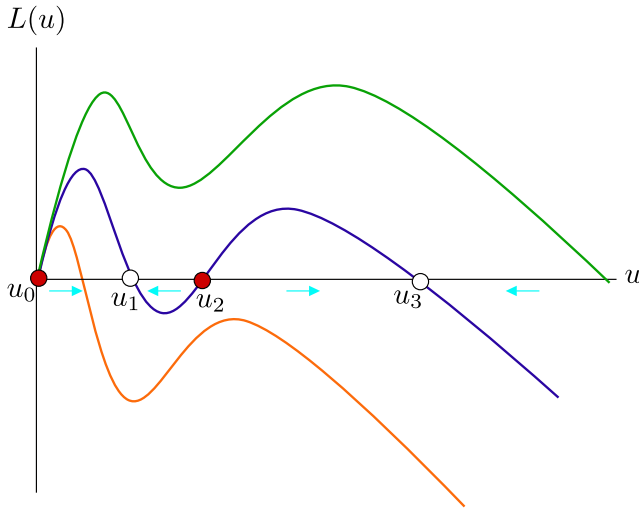
بسته به مقادیر پارامترهای r و q تعداد نقاط ثابت می‌تواند بین دو تا چهار تا باشد. یکی از این نقاط ثابت $u = 0$ است. در نزدیکی این نقطه یعنی $u \approx 0$ ، با توجه به این که $r > 0$ است،

۲.۷ معادله‌ی لیجستیک

۱۴۵



شکل ۱۴.۷ خم r بر حسب q . جهت فلش جهت افزایش α از 1 تا ∞ است. q ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا می‌کند ولی r ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۱۵.۷ $L(u)$ بر حسب u . بسته به مقادیر پارامترهای r و q تعداد نقاط ثابت می‌تواند بین دو تا چهار تا باشد. برای خم آبی‌رنگ نقاط $u_0 = 0$ و u_2 نقاط دافع و u_1 و u_3 نقاط جاذب هستند.

$L(u) \approx ru > 0$ است. پس نقطه‌ی ثابت $u = 0$ دافع است. با توجه به این که در $u \rightarrow \infty$ ، $L(u) \approx -\frac{r}{q}u^2 < 0$ حتماً به ازای مقدار مثبتی از u حداقل یک بار $L(u)$ باید صفر شده باشد. پس حداقل یک نقطه‌ی ثابت دیگر وجود دارد که قبل و بعد از آن $L(u)$ باید نزولی باشد. پس این نقطه حتماً جاذب است. اما دیدیم که این مسئله می‌تواند چهار نقطه‌ی ثابت هم داشته باشد. در این صورت یکی از آن‌ها جاذب و دیگری دافع است. منحنی $L(u)$ بر حسب u در شکل (۱۵.۷) رسم شده است. برای خم آبی‌رنگ نقاط $u_0 = 0$ و u_2 نقاط دافع و u_1 و u_3 نقاط جاذب هستند.

۳.۷ مدل‌های دو گونه ذره: مدل شکار و شکارچی

مدل شکار و شکارچی^۱ یا مدل لُتکا-وُلتررا^۲ یک مدل ساده‌ی دو گونه ذره است. این معادلات یک جفت معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی مرتبه یک هستند که معمولاً برای توصیف تحول دینامیکی سیستم‌های بیولوژیکی استفاده می‌شوند. در این مدل دو گونه‌ی شکار و شکارچی در

^۱ Predator-Prey Model

^۲ Lotka-Volterra

تعامل هستند و جمعیت آن‌ها بر حسب زمان با این معادلات داده می‌شود. این معادلات حالت خاصی از مدل‌های پیچیده‌تری است که علاوه بر برهم‌کنش‌هایی که خواهیم دید، شامل رقابت برای استفاده از منابع محیطی، بیماری، مرگ طبیعی و جهش است. در این مدل جمعیت شکار را با $A(t)$ ، و شکارچی را با $B(t)$ نمایش می‌دهیم. فرض‌های مدل ساده‌ی شکار و شکارچی این‌ها هستند:

- در غیاب شکارچی، جمعیت شکار بی حد و مرز زیاد می‌شود. نرخ خالص تکثیر شکار را a می‌گیریم. در واقع این نرخ خالص را می‌توانیم اختلاف نرخ تکثیر و نرخ مرگ طبیعی‌ی شکار بگیریم. نرخ تکثیر شکار را بزرگ‌تر از نرخ مرگ طبیعی‌اش می‌گیریم.
- اثر حضور شکارچی این است که باعث کم‌شدن جمعیت شکار می‌شود. هرچه تعداد شکار، A ، و تعداد شکارچی، B ، بیش‌تر باشد، تعداد شکاری که در واحد زمان رخ می‌دهد بیش‌تر است. این باعث کاهش جمعیت شکار با نرخ b و افزایش جمعیت شکارچی با نرخ c می‌شود.
- در صورتی که شکاری نباشد، جمعیت شکارچی به‌خاطر نبود ماده‌ی غذایی کم می‌شود. نرخ خالص کاهش جمعیت شکارچی را d بگیریم. این نرخ خالص را می‌توانیم اختلاف نرخ تکثیر و نرخ مرگ طبیعی‌ی شکار بگیریم. نرخ تکثیر شکار را کوچک‌تر از نرخ مرگ طبیعی‌اش می‌گیریم.

با در نظر گرفتن این‌ها معادلات تحول جمعیت متوسط شکار و شکارچی عبارت است از

$$\frac{dA}{dt} = aA - bAB \quad (۳۸.۷)$$

$$\frac{dB}{dt} = cAB - dB \quad (۳۹.۷)$$

ظاهراً در این مساله چهار نرخ وجود دارد که رفتار سیستم را کنترل می‌کند، ولی با بی‌بعد کردن

$$u := \frac{cA}{d}, \quad v := \frac{bB}{a} \quad (۴۰.۷)$$

$$\tau := at, \quad \alpha := \frac{d}{a}, \quad (۴۱.۷)$$

می‌توان معادلات را به شکل ساده‌تری هم نوشت

$$\frac{du}{d\tau} = u(1 - v) \quad (۴۲.۷)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha v(u - 1). \quad (۴۳.۷)$$

همان‌طور که در مورد مدل تک‌گونه دیدیم بیابید ابتدا نقاط ثابت این معادلات، یعنی جایی که سمت راست معادلات بالا صفر می‌شود و جمعیت‌ها ثابت می‌شوند، را به دست آوریم. این معادلات دو نقطه‌ی ثابت دارند، یکی $(u = 0, v = 0)$ و دیگری $(u = 1, v = 1)$. نقطه‌ی $(u = 0, v = 0)$ یعنی حالتی که نه شکار است و نه شکارچی. حالت جالب‌تر نقطه‌ی $(u = 1, v = 1)$ است. اگر سیستم را در حول و حوش این نقطه یعنی

$$u = 1 + \epsilon \quad (۴۴.۷)$$

$$v = 1 + \delta, \quad (۴۵.۷)$$

را رها کنیم، به طوری که $1 \gg \epsilon, \delta$ باشد، تا مرتبه‌ی اول این پارامترها می‌رسیم به

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\delta(1 + \epsilon) \approx -\delta \quad (۴۶.۷)$$

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \alpha\epsilon(1 + \delta) \approx \alpha\epsilon. \quad (۴۷.۷)$$

از ترکیب این دو معادله نتیجه می‌شود

$$\frac{d^2\epsilon}{d\tau^2} \approx -\alpha\epsilon \quad (۴۸.۷)$$

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} \approx -\alpha\delta. \quad (۴۹.۷)$$

جواب این معادلات دوره‌ای است، یعنی

$$u \approx 1 + c \cos(\tau\sqrt{\alpha} + \theta), \quad (۵۰.۷)$$

$$v \approx 1 + c \sin(\tau\sqrt{\alpha} + \theta). \quad (۵۱.۷)$$

در این صورت رفتار جمعیت‌های شکار و شکارچی بر حسب زمان دوره‌ای است و این توابع با هم اختلاف فاز دارند. علاوه بر این در فضای (uv) خم‌های نزدیک به نقطه‌ی ثابت، $(u = 1, v = 1)$ ، دایره‌هایی به دور این نقطه هستند. بنابراین نقطه‌ی ثابتی با مختصات $A = \frac{d}{c}$ و $B = \frac{a}{b}$ وجود دارد که اگر سیستم از آن رها شود، جمعیت شکار و شکارچی ثابت می‌ماند. اگر سیستم کمی مختل شود، مثلاً شکارها بیش‌تر از این مقدار حدی باشند، با گذشت زمان به جایی می‌رسیم که شکارچی‌ها زیاد می‌شوند و برعکس. به طوری که سیستم حول نقطه‌ی ثابت حرکتی دوره‌ای دارد. به این ترتیب جمعیت شکار و شکارچی ضمن داشتن یک اختلاف فاز حول نقطه‌ی ثابت حرکتی دوره‌ای دارند. این را می‌توان به طور کمی‌تر هم دید. با تقسیم دو معادله‌ی (۴۲.۷) بر هم نتیجه می‌شود

$$\frac{dv}{du} = \alpha \frac{v(u-1)}{u(1-v)}$$

$$\frac{dv}{v} - dv = \alpha du - \alpha \frac{du}{u} \quad (۵۲.۷)$$

که با انتگرال‌گیری از آن می‌رسیم به

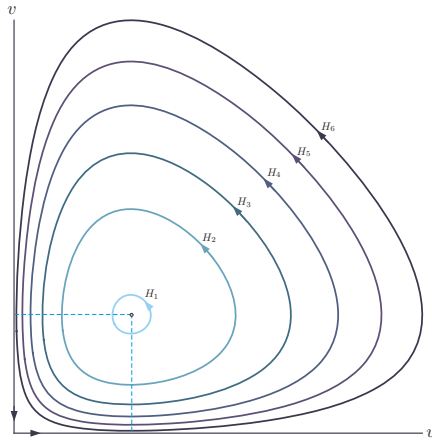
$$\alpha u + v - \ln(u^\alpha v) = H \quad (۵۳.۷)$$

که H مقداری ثابت است که از شرایط اولیه به دست می‌آید

$$H = \alpha u_0 + v_0 - \ln(u_0^\alpha v_0). \quad (۵۴.۷)$$

هر چند با تغییر شرایط اولیه می‌توان مقدار H را تغییر داد ولی به سادگی می‌توانیم نشان دهیم که هر خم‌های v بر حسب u به ازای شرایط اولیه‌ی متفاوت رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم، این خم‌ها بسته و مسیرهایی دوره‌ای هستند. هر چند این مدل بسیار ساده است و خیلی از پیچیدگی‌های دنیای واقعی در آن لحاظ نشده است، می‌تواند نقطه‌ی شروعی برای فهم مدل‌های واقعی‌تر باشد. در شکل (۱۷.۷) خم‌های v و u را بر حسب زمان و به ازای $\alpha = 0.3$ کشیده‌ایم.

در شکل (۱۸.۷) جمعیت خرگوش‌های پاشنه‌برفی^۱ و سیاه‌گوش‌های کانادا^۲ بین سال‌های ۱۸۴۵



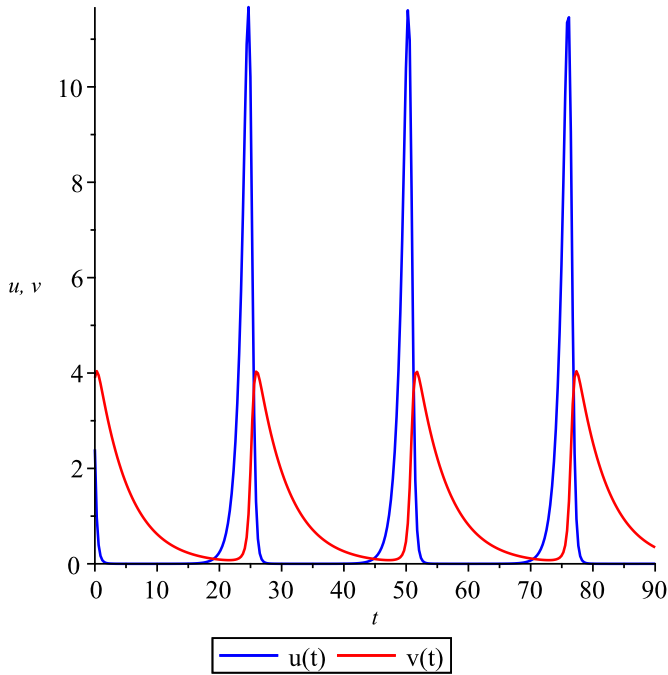
شکل ۱۶.۷ $1 + \alpha = H_{\min} < H_1 < H_2 < H_3 < H_4 < H_5 < H_6$ خم‌های v بر حسب u به ازای شرایط اولیه‌ی متفاوت.

تا ۱۹۳۵ در پارکی در کانادا می‌بینید. در این شکل رفتار دوره‌ای و اختلاف فاز جمعیت این دو گونه قابل مشاهده است.

۴.۷ مدل‌های چندگونه ذره: اپیدمی‌ی یک بیماری

مدلی ساده برای بررسی شیوع یک بیماری مدل SIR^۱ است. این مدل در اپیدمیولوژی برای محاسبه جمعیت افراد مستعد بیماری، افراد آلوده و بیمارهای بهبودیافته (یا در مورد بیماری‌های خیلی خطرناک و کشنده آن‌هایی که مرده‌اند) در یک جامعه استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که این مدل برای بررسی همه‌ی بیماری‌ها مناسب نیست. در این مدل کسی که یک بار بیماری‌اش بهبود می‌یابد، مصونیت مادام‌العمر پیدا می‌کند. البته در مورد بیماری‌های خیلی خطرناک و کشنده این فرض نیست و بدیهی است که آن‌هایی که می‌میرند، از بیماری‌ی مجدد مصون هستند. در این مدل فرض می‌شود گروه کوچکی از افراد آلوده وارد جمعیت زیادی شوند، و ما می‌خواهیم توصیفی برای شیوع بیماری در آن جمعیت به عنوان تابعی از زمان به دست آوریم. در این مدل افراد به سه دسته تقسیم می‌شوند: افراد سالم که مستعد آلوده شدن به بیماری هستند که جمعیت

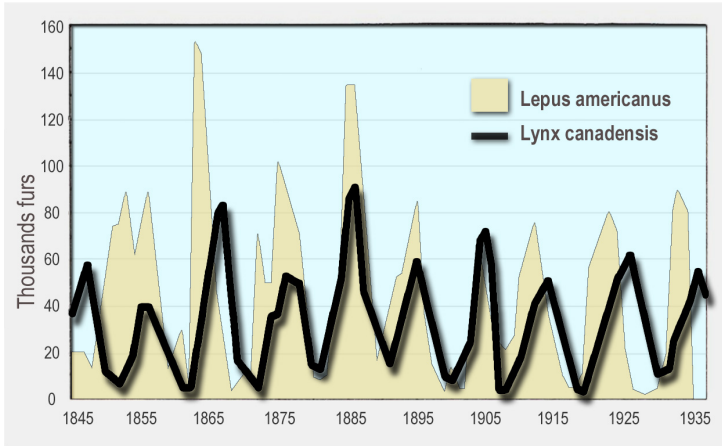
Susceptible-Infected-Recovered^۱ Canada lynx^۲ Snowshoe hare^۱
<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>



شکل ۱۷.۷ خم‌های u و v بر حسب زمان. در این جا $\alpha = 0.3$ گرفته‌ایم.

آن‌ها را با S نمایش می‌دهیم. افراد آلوده که جمعیت‌شان را با I نمایش می‌دهیم و بالاخره بیمارهای بهبودیافته که جمعیت‌شان را با R نشان می‌دهیم. مدل به گونه‌ای است که

- جمعیت کل ثابت است.
- همه‌ی افراد سالم تا بیمار نشده‌اند، مستعد بیمار شدن هستند و تنها راهی که یک فرد می‌تواند از گروه مستعد بیماری خارج شود، بیمار شدن است. چه بیمار بهبودی پیدا کند، که در آن صورت مصونیت مادام‌العمر پیدا می‌کند و چه آن‌که بمیرد، که در هر دو صورت به مجموعه‌ی R می‌پیوندد.
- سن، جنسیت، وضعیت اجتماعی و نژادی را به صورت گونه‌های مختلف نشان نداده‌ایم و هیچ‌کدام بر احتمال ابتلا به بیماری تأثیر نمی‌گذارد.
- مصونیت ارثی وجود ندارد.



شکل ۱۸.۷ جمعیت خرگوش‌های پاشنه‌برفی و سیاه‌گوش‌های کانادا بین سال‌های ۱۸۴۵ تا ۱۹۳۵ در پارکی در کانادا. en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-equations

- اعضای جمعیت به صورت کاملاً هم‌گن با هم اختلاط دارند.
نرخ آلوده‌شدن یک فرد مستعد بیماری را β و نرخ بهبودی یا مرگ یک فرد بیمار را γ می‌گیریم.

$$S \xrightarrow{\beta} I \xrightarrow{\gamma} R. \quad (۵۵.۷)$$

با در نظر گرفتن این موارد معادلات حاکم بر تحول زمانی جمعیت S ، I و R به صورت زیر می‌شود

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (۵۶.۷)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (۵۷.۷)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (۵۸.۷)$$

با استفاده از این روابط، جمعیت کل $N = S + I + R$ ثابت است

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0. \quad (۵۹.۷)$$

پس $N(t) = N_0 = S(0) + I(0)$ ثابت است. زمان $t = 0$ را وقتی گرفته‌ایم که هیچ بیماری <https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

هنوز مصونیت پیدا نکرده یا فوت نکرده است، یعنی $R(0) = 0$ در ابتدا

$$I'(0) = \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \gamma I(0) \left(\frac{S(0)}{S_c} - 1 \right) \quad (۶۰.۷)$$

که $S_c := \frac{\gamma}{\beta}$ است. در صورتی که $S(0) > S_c$ باشد $I'(0) > 0$ است و در صورتی که $S(0) < S_c$ باشد، $I'(0) < 0$ است. بنابراین $S_c = \frac{\gamma}{\beta}$ معیاری از این است که جمعیت افراد مستعد بیماری چه قدر باشد تا شیوع بیماری رخ دهد ($I'(0) > 0$)، یا بیماری فروکش کند ($I'(0) < 0$). همان‌طور که از این روابط هم پیداست جمعیت افراد بیمار در ابتدا یعنی $I(0)$ اثری در شیوع یا عدم شیوع بیماری (یعنی علامت $I'(0)$) ندارد.

فرض کنید در ابتدا شیوع رخ دهد. آیا حتماً بیماری همه‌گیر است و بالاخره همه بیمار می‌شوند؟ با توجه به این که $\frac{dS}{dt} < 0$ است، در هر حالت جمعیت افراد مستعد با گذشت زمان کم می‌شود، یعنی حتی اگر در ابتدا شرط شیوع بیماری برقرار باشد با گذشت زمان، بالاخره زمانی می‌رسد که شرط شیوع به هم می‌خورد. در t_1 یعنی زمانی که این شرط به هم می‌خورد، $I'(t_1) = 0$ می‌شود. در این زمان شیوع بیماری بیشینه است و پس از آن بیماری فروکش می‌کند. برای یافتن پاسخ کمی معادله‌ی ۵۶.۷ را بر ۵۷.۷ تقسیم می‌کنیم. در این صورت می‌رسیم به

$$\frac{dI}{dS} = \frac{S_c}{S} - 1. \quad (۶۱.۷)$$

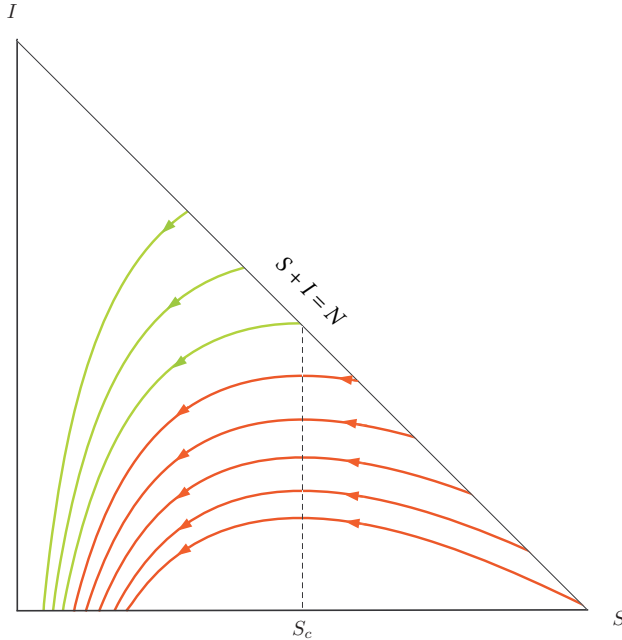
از انتگرال‌گیری‌ی این رابطه نتیجه می‌شود

$$I + S - S_c \ln S = I(0) + S(0) - S_c \ln S(0), \quad (۶۲.۷)$$

و جمعیت بیشینه‌ی جایی است که $\frac{dI}{dS} = 0$ شود. در آن جا $S(t_1) = S_c$ است.

$$\begin{aligned} I_{\max} &= I(0) + S(0) - S_c - S_c \ln\left(\frac{S(0)}{S_c}\right) \\ &= N - S_c - S_c \ln\left(\frac{S(0)}{S_c}\right). \end{aligned} \quad (۶۳.۷)$$

با داشتن I_{\max} می‌شود برنامه‌ریزی کرد که تعداد بیشینه‌ی افراد آلوده در شیوع یک بیماری خاص چه قدر است و آیا امکانات درمانی قادر به مواجهه با این حجم از بیمار در شیوع یک



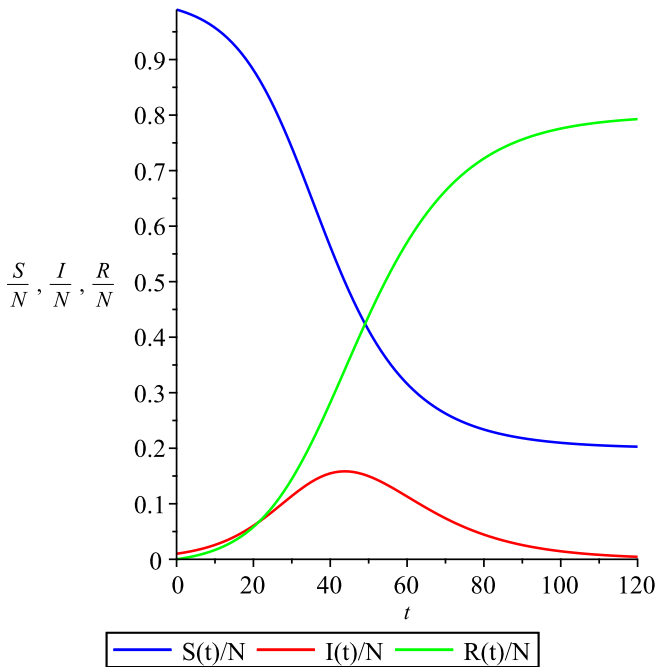
شکل ۱۹.۷ خم‌های I برحسب S برای S_c و جمعیت کل معین و شرایط اولیه متفاوت رسم شده‌اند. خم‌های قرمز رنگ مربوط به مواردی است که شیوع اتفاق می‌افتد و خم‌های سبز رنگ مربوط به آن‌هایی هستند که شیوع رخ نمی‌دهد. فلش‌ها جهت زمان را نشان می‌دهند.

بیماری هست یا نه. وقتی بیماری ریشه‌کن شد، $I(S_\infty) = 0$ می‌شود. S_∞ تعداد افرادی است که پس از ریشه‌کن شدن بیماری هنوز آلوده نشده‌اند.

در شکل (۱۹.۷) خم‌های I برحسب S برای S_c و جمعیت کل معین و شرایط اولیه متفاوت رسم شده‌اند. فلش‌ها جهت زمان را نشان می‌دهند. چون جمعیت کل $S_0 + I_0 = N$ معین است، همه‌ی خم‌ها از خط $S + I = N$ شروع می‌شوند. خم‌های قرمز رنگ مربوط به مواردی است که شیوع اتفاق می‌افتد و خم‌های سبز رنگ مربوط به آن‌هایی هستند که شیوع رخ نمی‌دهد.

اگر معادله‌ی ۵۸.۷ را بر ۵۶.۷ تقسیم کنیم می‌رسیم به

$$\frac{dR}{dS} = -\frac{S_c}{S}, \quad (۶۴.۷)$$



شکل ۲۰.۷

که جوابش

$$S = S_0 e^{-\frac{R}{S_c}} \quad (۶۵.۷)$$

است.

معادلات ۵۶.۷-۵۸.۷ را به روش عددی هم می‌توان حل کرد. حل عددی این معادلات را در شکل ۲۰.۷ می‌بینید. در این جا فرض شده

$$\frac{S(0)}{N} = 0.99, \quad \frac{I(0)}{N} = 0.01, \quad \frac{R(0)}{N} = 0 \quad (۶۶.۷)$$

$$\beta = 0.2, \quad \gamma = 0.1, \quad (۶۷.۷)$$

در شکل ۲۱.۷ مقایسه داده‌های تجربی و محاسبات نظری را آورده‌ایم. مدل SIR و <https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

تعمیم‌هایی از آن برای انواع بیماری‌ها از جمله کووید ۱۹ استفاده شده است. یکی از آن‌ها **SIR-X model** است.

۱.۴.۷ فاکتور R_0

تعداد بیمارانی آلوده در زمان δt به ازای یک بیمار آلوده یعنی $I = 1$ عبارت است از

$$\delta I = \beta S \delta t - \gamma \delta t, \quad (۶۸.۷)$$

است. بخش اول یعنی $\beta S \delta t$ تعدادی هستند که در زمان δt آلوده می‌شوند و بخش دوم

$$\delta R = \gamma \delta t, \quad (۶۹.۷)$$

تعدادی هستند که در زمان δt مصونیت پیدا می‌کنند. با تغییر متغیر

$$I(t) =: \tilde{I}(t)e^{-\gamma t} \quad (۷۰.۷)$$

معادله‌ی ۵۷.۷ به صورت زیر در می‌آید

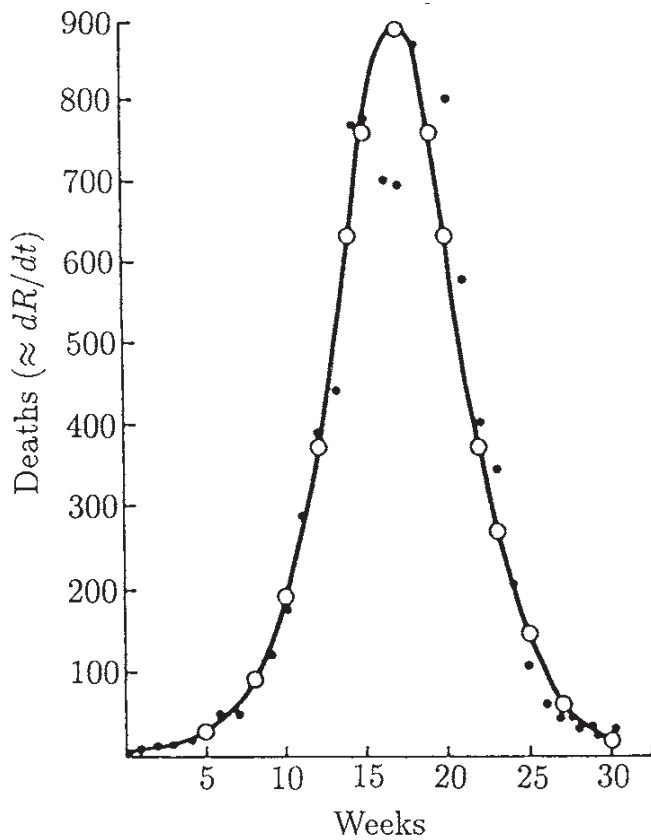
$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = \beta S \tilde{I}. \quad (۷۱.۷)$$

از معادلات بالا نتیجه می‌شود که از طرفی جمعیت آلوده به طور نمایی با زمان مشخصه‌ی γ^{-1} کم می‌شود و از طرف دیگر یک زمان مشخصه‌ی β^{-1} هم در ۷۱.۷ هست که باعث افزایش جمعیت آلوده می‌شود. مثلاً برای بیماری‌ی کووید ۱۹ زمان متوسط بیمار شدن در تماس با فرد آلوده ممکن است از مرتبه‌ی دقیقه و زمان متوسط بیماری تا بهبودی یا مرگ از مرتبه‌ی هفته باشد. پس معقول است که زمان متوسط آلوده‌بودن را γ^{-1} بگیریم. در این صورت متوسط افرادی که در این مدت توسط یک نفر آلوده بیمار می‌شوند وقتی که همه‌ی جمعیت مستعد بیماری هستند

$$\beta S \delta t \approx R_0, \quad (۷۲.۷)$$

است که $R_0 := \frac{\beta N}{\gamma}$ است. این پارامتر میزان تکثیر آلودگی پایه^۱ یا آن‌چنان‌که گاهی نامیده

^۱Basic reproduction number



شکل ۲۱.۷ همه‌گیری طاعون در بمبئی ۱۹۰۵-۱۹۰۶. ● مربوط به داده‌های تجربی و ○ مربوط به محاسبات نظری است. *Mathematical Biology: I. An Introduction*

می‌شود، فاکتور یا عامل R_0 است. این پارامتر معرف متوسط تعداد افراد آلوده به ازای یک نفر آلوده است وقتی که همه‌ی جمعیت مستعد بیماری هستند. این عدد در واقع تعداد آلوده‌های ثانویه است. این پارامتر معرف سرعت پخش بیماری در جامعه است. اگر $R_0 > 1$ باشد، انتظار داریم همه‌گیری رخ دهد و اگر $R_0 < 1$ باشد، انتظار داریم بیماری به تدریج محو شود. هرچه R_0 بزرگ‌تر باشد، یک نفر تعداد بیش‌تری را آلوده می‌کند. در واقع هر چه تعداد تماس فرد آلود با افراد مستعد بیماری و زمان آلوده‌بودن بیش‌تر باشد R_0 بزرگ‌تر است. اگر بخشی از جمعیت مستعد بیماری و بخشی از آن ایمن شده باشند، شرط فروکش‌کردن بیماری

$$R_0 \cdot \frac{S}{N} < 1, \quad (۷۳.۷)$$

است. با توجه به این‌که ما مدت بیماری را محدود می‌گیریم، پس از مدتی بخش از مجموعه‌ی مستعد بیماری کم و به افراد ایمن شده اضافه می‌شود. در هر صورت در هر زمان اکثر جامعه جمعیت مستعد بیماری یا بخشی هستند که ایمن شده و افرادی که بیمارند بخش کوچکی از جامعه هستند، یعنی $S + I \approx N$ و $R \ll S, I$ است. بنابراین حد فروکش‌کردن بیماری

$$R_0 \cdot \frac{N - I}{N} \approx 1, \quad \frac{I_c}{N} \approx 1 - \frac{1}{R_0}, \quad (۷۴.۷)$$

است. اگر برای یک بیماری مثلاً $R_0 \approx 4$ باشد، باید جمعیت افراد ایمن شده به حدود 75% برسد تا بگوییم بیماری فروکش می‌کند. به این نوع ایمنی، ایمنی‌ی جمعی یا ایمنی‌ی گله‌ای^۱ می‌گویند. هرچه قدر نسبت افراد ایمن در جامعه‌ای بیش‌تر باشد، احتمال تماس افراد مستعد بیماری با فرد آلوده کم‌تر می‌شود و به فروکش‌کردن بیماری کمک می‌کند. راه مطمئن برای این‌که رسیدن به ایمنی‌ی جمعی استفاده از واکسیناسیون است. به این معنی که در مورد مثالی که زدیم اگر با واکسیناسیون هم بتوانیم جمعیت بخش ایمن جامعه را به 75% برسانیم، بیماری فروکش می‌کند. بعضی از افراد به دلایل پزشکی مانند نقص سیستم ایمنی یا سرکوب سیستم ایمنی بدن نمی‌توانند ایمن شوند. مثلاً در مورد بیماری‌ی کووید ۱۹ ظاهراً اطفال و زنان باردار و بعضی بیماری‌های خاص نمی‌توانند واکسینه شوند. برای این گروه ایمنی‌ی جمعی یک روش مهم محافظت است. پس از رسیدن به آستانه‌ی ایمنی‌ی جمعی بیماری به تدریج از بین می‌رود.

^۱Herd immunity

جدول ۱۰۷ فاکتور R_0 و ایمنیِ جمعی برای دسته‌ای از بیماری‌های شناخته‌شده

https://en.wikipedia.org/wiki/Herd_immunity

| درصد افراد ایمن برای رسیدن به ایمنیِ جمعی | R_0 | بیماری |
|---|-----------|----------|
| 92% – 95% | 12 – 18 | سرخک |
| 80% – 86% | 5 – 7 | آبله |
| 60% – 75% | 2.5 – 4 | کووید ۱۹ |
| 33% – 44% | 1.5 – 1.8 | آنفلانزا |

این نتایج بر این فرض بنا شده بود که جمعیت‌ها یک دست هستند، به این معنی که هر فرد از آن جامعه با هر فرد دیگری در تماس است، درحالی که در دنیای واقعی جوامع به صورت شبکه‌ای با هم ارتباط دارند که در آن افراد در دسته‌هایی دور هم جمع شده‌اند، به گونه‌ای که هر فرد با تعداد معدودی فرد دیگر ارتباط دارد. در این شبکه‌ها، سرایت بیماری فقط بین افرادی که به یکدیگر نزدیک هستند، رخ می‌دهد. علاوه بر این بعضی اوقات و در بعضی بخش‌های جامعه موارد ایمنی مثل قرنطینه بیش‌تر رعایت می‌شود که باعث می‌شود این فاکتور R_0 می‌تواند متفاوت باشد و به زمان و مکان بستگی داشته باشد.

مسائل

۱۰۷ اثر آلی^۱ – این اثر به نام واردر کلاید آلی^۲ است و به این معناست که برای خیلی از

موجودات، رشد موثر یا آهنگ رشد بر جمعیت یعنی $\frac{\dot{N}}{N}$ نه در N ‌های خیلی بزرگ و نه در N ‌های خیلی کوچک اتفاق می‌افتد. در واقع برای N ‌های خیلی بزرگ رقابت برای غذا و منابع دیگر رشد موثر را سخت می‌کند. علاوه بر این برای N ‌های خیلی کوچک هم ادامه حیات سخت است. بنابراین رشد موثر به ازای مقداری متوسط برای N رخ می‌دهد. مثال زیر را در نظر بگیرید.

^۱Warder Clyde Allee The Allee effect^۱

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>

الف- معادله‌ی

$$\frac{\dot{N}}{N} = F(N) = r - a(N - b)^2$$

را در نظر بگیرید. r ، a و b ثابت‌های مدل و مثبت هستند. $F(N)$ به ازای چه مقداری از N بیشینه می‌شود؟ مقدار بیشینه چه قدر است؟ رشد موثر به ازای چه مقادیری مثبت و به ازای چه مقادیری منفی است؟

ب- با مطالعه‌ی تابع $NF(N)$ نقاط ثابت را به دست آورید. به ازای چه مقادیری از ثابت‌های مدل، پای دار و تحت چه شرایطی ناپای دار هستند؟

ج- آیا این مدل به ازای شرط اولیه‌ی یکسان با مدل لجستیک فرق کیفی دارد؟ یا نتایج هر دو به ازای شرط اولیه‌ی یکسان به‌طور کیفی یکسان است؟
۲.۷ در مساله‌ی شکار و شکارچی به ثابت

$$H = \alpha u_0 + v_0 - \ln(u_0^\alpha v_0).$$

رسیدیم که به شرایط اولیه بستگی دارد. مقدار کمینه آن را به دست آورید و نشان دهید

$$H_{\min} = 1 + \alpha$$

است.

۳.۷ مدل بسیار ساده‌ای برای ماهی‌گیری مدل زیر است. اگر ماهی‌گیران نباشند یا ماهی نگیرند جمعیت ماهی‌ها با معادله‌ای از نوع معادله‌ی لجستیک رشد می‌کند. ($A, N_c > 0$). فرض کنید ماهی‌گیرها با نرخ ثابت $B > 0$ و مستقل از تعداد ماهی‌ها هر روز همان تعدادی ماهی صید می‌کنند. در این صورت

$$\frac{dN}{dt} = AN\left(1 - \frac{N}{N_c}\right) - B.$$

الف) این معادلات را با انتخاب پارامترهای مناسب به شکل زیر بی‌بُعد کنید.

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - b.$$

ب- بر حسب مقادیر مختلف b چه اتفاق‌هایی روی خواهد داد؟ نتایج خود را توضیح دهید.

۴.۷ مدلی ساده برای رشدِ تومورهایِ سرطانیِ مدلِ زیر است

$$\dot{N} = F(N) = -aN \ln(N/N_c)$$

که N تعدادِ سلول‌هایِ تومور است و $a, N_c > 0$ پارامترهایِ مدل هستند. تا زمانی که N خیلی کوچک نباشد، پیش‌بینی‌هایِ این مدل ساده با داده‌هایِ تجربیِ مربوط به تومورها به طرز شگفت‌آوری مطابقت دارد.

الف- نقاطِ ثابت در این مدل را به دست آورید.

ب- به طورِ کیفی نمودارِ $F(N)$ بر حسبِ N را رسم کنید. در موردِ پایداری یا ناپایداریِ این نقاط چه می‌توانید بگویید؟ چرا؟

ج- چه تعبیرِ فیزیکی‌ای برای پارامترهایِ a و N_c دارید؟

د- به طورِ کیفی نمودارِ $N(t)$ بر حسبِ زمان را برای مقادیرِ اولیه‌ی مختلف رسم کنید.

۵.۷ یک مدلِ دیگر برای رشدِ تومورهایِ سرطانیِ مدلِ زیر است

$$\dot{N} = F(N) = aN - bN \ln(N/N_1)$$

که N تعدادِ سلول‌هایِ تومور است و $a, b, N_1 > 0$ پارامترهایِ مدل هستند. این معادله معادله‌ی گمپرتز^۱ است.

الف- نقاطِ ثابت در این مدل را به دست آورید.

ب- به طورِ کیفی نمودارِ $F(N)$ بر حسبِ N را رسم کنید. در موردِ پایداری یا ناپایداریِ این نقاط چه می‌توانید بگویید؟ چرا؟

ج- $N(t)$ بر حسبِ زمان را به دست آورید.

۶.۷ مدلی ساده برای لیزر به صورتِ زیر است. $N(t)$ را تعدادِ اتم‌هایِ برانگیخته و $n(t)$

را تعدادِ فوتون‌هایِ تحریکِ القایی در زمانِ t بگیرید. در معادله‌ی تحولِ زمانیِ $n(t)$

دو جمله‌ی چشمه و چاه دارد. در جمله‌ی چشمه G نرخِ رشدِ تعدادِ فوتون‌هایِ ناشی

از تحریکِ القایی و در جمله‌ی چاه k نرخِ فرارِ فوتون‌هایِ ناشی از تحریکِ القایی از

^۱Gompertz equation

دیواره‌های لیزر است. در این صورت

$$\dot{n} = GnN - kn$$

است.

الف- اگر تعداد اتم‌های برانگیخته در زمان $t = 0$ را N_0 بگیریم

$$N = N_0 - \alpha n$$

که α احتمال برگشت اتم‌های برانگیخته به حالت پایه است. با استفاده از این معادله، معادله‌ی تحول تعداد فوتون‌های القایی را به صورت

$$\dot{n} = F(n)$$

بنویسید. با رسم نمودار $F(n)$ بر حسب n نقاط ثابت این معادله که آن را با n^* نمایش می‌دهید را به ازای مقادیر مختلفی از N_0G/k که کمیتی بی‌بعد است، به دست آورید.

به ازای چه مقادیری از N_0G/k این نقاط جاذب یا دافع‌اند؟

ب- پارامترهای G و k را معین بگیرید. نمودار n^* بر حسب N_0 را به طور کیفی رسم کنید.

۷.۷ مدلی پیش‌رفته‌تر برای لیزر

$$\dot{n} = GnN - kn, \quad (75.7)$$

$$\dot{N} = -GnN - fN + p, \quad (76.7)$$

است، که $N(t)$ تعداد اتم‌های برانگیخته و $n(t)$ تعداد فوتون‌های تحریک‌القایی در زمان t هستند. G نرخ گسیل تعداد فوتون‌های ناشی از تحریک‌القایی و k نرخ فرار فوتون‌های ناشی از تحریک‌القایی از دیواره‌های لیزر و p قدرت پمپ لیزر است. همه‌ی پارامترها جز p مثبت هستند. p هم می‌تواند مثبت و هم منفی باشد.

الف- معادلات ۷۵.۷ و ۷۶.۷ را بی‌بعد کنید.

ب- نقاط ثابت و نوع آن‌ها را به دست آورید.

ج- نمای فاز را به دست آورید.

۸.۷ تعدادی اتمی را در نظر بگیرید که برای سادگی فرض می‌کنیم هر کدام از آن‌ها فقط دو حالت انرژی پایه E_1 و برانگیخته $E_2 > E_1$ دارند. اتمی که در حالت پایه است می‌تواند با جذب فوتونی با بسامد $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ از حالت پایه به حالت برانگیخته برود. فرض کنید این اتم در حضور یک گاز فوتونی است. تعداد فوتون‌های با انرژی $\hbar\omega$ را n_p بگیرید. تعداد اتم‌ها در حالت پایه را N_1 و تعداد اتم‌ها در حالت برانگیخته را N_2 بگیرید. چند حالت می‌تواند رخ دهد.

- اتمی که در حالت برانگیخته است با نرخ A_{21} فوتون تابش می‌کند و به حالت پایه می‌رود. این فرآیند گسیل خودبه‌خود است.
- اتمی که در حالت برانگیخته است، در حضور فوتونی با بسامد ω که در محیط است با نرخ B_{21} فوتون تابش می‌کند و به حالت پایه می‌رود. این فرآیند گسیل القایی است.
- اتمی که در حالت پایه است، در حضور فوتونی با بسامد ω که در محیط است با نرخ B_{12} فوتون جذب می‌کند و به حالت برانگیخته می‌رود. این فرآیند جذب است.

الف- معادله‌ی تحول N_1 و N_2 را بنویسید.

ب- در حالت پایه $\frac{N_1}{N_2}$ را بر حسب B_{12}, B_{21}, n_p و A_{12} به دست آورید.

۹.۷ از تغییر متغیر

$$\frac{d\tau}{dt} := I(t), \quad (77.7)$$

در معادلات حاکم بر تحول زمانی جمعیت S, I, R در مدل SIR یعنی در معادلات ۵۶.۷ تا ۵۸.۷ استفاده و معادلات را ساده و معادلات ۶۵.۷ و ۶۲.۷ را به دست آورید.

۱۰.۷ سیستمی از دو گونه ذره A و B را در نظر بگیرید که در مجاورت هم با نرخ‌های داده‌شده یک‌دیگر را نابود می‌کنند

$$AA \rightarrow \emptyset, \quad \lambda, \quad (78.7)$$

$$AB \rightarrow \emptyset, \quad \eta, \quad (79.7)$$

$$BB \rightarrow \emptyset, \quad \lambda. \quad (۸۰.۷)$$

الف- معادله‌ی تحول هر کدام از گونه‌ها را بنویسید. تعداد ذرات گونه‌ها را با N_A و N_B نمایش دهید. پس از زمان طولانی تعداد هر کدام از ذرات چه قدر است؟
ب- با تغییر متغیرهای

$$\tau := \eta t, \quad (۸۱.۷)$$

$$\alpha := \frac{\lambda}{\eta}, \quad (۸۲.۷)$$

معادله‌های تحول زمانی را بی‌بعد کنید. به جای دو متغیر N_A و N_B هم از متغیرهای $u := N_B$ و $v := \frac{N_A}{N_B}$ استفاده کنید. معادله‌ی $\frac{du}{dv}$ را به دست آورده و آن را حل کنید.

۱۱.۷ نرخ تولید مثل خرگوش‌ها مثل جوندگان بسیار بالاست. فصل جفت‌گیری بیش‌تر خرگوش‌ها نه ماه از سال است. دوران بارداری برای آن‌ها معمولاً سی روز است و ممکن است در هر بارداری، یک تا دوازده بچه خرگوش به دنیا بیاید و چند روز بعد می‌توانند مجدداً باردار شوند. برای یک خرگوش ماده این عادی است که چندین بار در سال و به طور متوسط سه تا چهار بار باردار شود. محدودیت منابع غذایی و رقابت بر سر بقا مانعی برای تکثیر بدون حد و مرز حیوانات است. فرض کنید در ناحیه‌ای تعدادی گیاه‌خوار بومی آن منطقه وجود دارند. تحول زمانی‌ی تعداد متوسط این گیاه‌خواران که تعدادشان در هر لحظه را با S نشان می‌دهیم در معادله‌ی لجستیک، ۱۰.۷ صدق می‌کند. تعدادی خرگوش را وارد این محیط می‌کنیم. رقابت برای منابع غذایی بین خرگوش‌ها که تعدادشان در هر لحظه را با R نشان می‌دهیم و گیاه‌خواران بومی آن منطقه معادله‌ی لجستیک را به هم می‌زند. نشان دهید رقابت این دو نوع موجود باعث می‌شود معادله‌ی تحول جمعیت آن‌ها به شکل زیر دربیاید

$$\frac{dS}{dt} = \alpha S \left(1 - \frac{S}{S_c}\right) - \beta SR, \quad (۸۳.۷)$$

$$\frac{dR}{dt} = \lambda R - \eta SR. \quad (۸۴.۷)$$

در این جا ما از اثر خرگوش ها در محدود کردن جمعیت هم نوع های شان چشم پوشی کرده ایم. در واقع مثل این است که R_c در معادله ی لجستیک خرگوش ها را بی نهایت گرفته باشیم. با تغییر متغیر

$$\tau := At, \quad (۸۵.۷)$$

$$u := BS, \quad (۸۶.۷)$$

$$v := CR, \quad (۸۷.۷)$$

معادله های تحول این موجودات را به شکل بی بعد شده ی زیر در آورید

$$\frac{du}{d\tau} = u(1 - u - v), \quad (۸۸.۷)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = av(1 - bu). \quad (۸۹.۷)$$

پارامترهای تغییر متغیر چه هستند؟ این مدل چند نقطه ی ثابت دارد؟ پای دار یا ناپای دارند؟ **۱۲.۷** با احتمال 99.99% شما هم مثل بقیه ی انسان ها قلب تان سمت چپ بدن تان است. تقریباً از هر ده هزار نفر یک نفر اندام های داخلی اش برعکس بقیه است، یعنی مثلاً قلبش به جای سمت چپ، سمت راست است. این در حالی است که کبد هم به جای سمت راست، سمت چپ بدنش است. اکثر قریب به اتفاق گونه های شناخته شده ی حلزون ها صدف هایی دارند که راست گرد هستند. عکس **۲۲.۷** را ببینید. همان طور که در عکس هم می بینید با چرخش دست راست روی صدف حلزون به بالا می رویم. من به حلزون چپ گرد دسترسی نداشتم. برای همین با استفاده از نرم افزار و تبدیل آینه ای عکسی مربوط به یک حلزون چپ گرد خیالی را ساختم. عکس **۲۳.۷** را ببینید. بیش تر حلزون ها نر- ماده ^۱ یعنی هم نر و هم ماده هستند. تعداد نوع راست گرد را با R و تعداد نوع چپ گرد را با L نمایش دهید. فرض کنید $1 \ll R, L$. چند فرض در مورد جفت گیری ی حلزون ها می کنیم:

• فرض کنید هر حلزونی با هر حلزون دیگری می تواند جفت گیری کند. از وابستگی ی



شکل ۲۲.۷ صدف تعدادی حلزون. همان‌طور که می‌بینید این‌ها راست‌گرد هستند یعنی با چرخش راست‌گرد روی صدف حلزون بالا می‌رویم. این‌ها بخش کوچکی است از آنچه هم‌سرم سال‌های پیش جمع‌آوری کرده بود. همه‌ی صدف‌ها راست‌گرد بودند. عکس‌ها را خودم گرفته‌ام. شکل مسئله‌ی ۱۰.۷.



شکل ۲۳.۷ به حلزون چپ‌گرد دست‌رسی نداشتم. برای همین با استفاده از نرم‌افزار و تبدیل آینه‌ای عکسی مربوط به یک حلزون چپ‌گرد خیالی را ساختم. شکل مسئله‌ی ۱۰.۷.

فضایی، برهم‌کنش‌های دیگر و رقابت‌ها برای کسب منابع با گونه‌های دیگر و تأثیرات خارجی چشم‌پوشی می‌کنیم.

- راست‌گرد یا چپ‌گرد بودن در انتخاب جفت اثر ندارد.
- آهنگ (یعنی احتمال بر واحد زمان) جفت‌گیری را λ بگیرد. در این صورت در زمان dt ، احتمال جفت‌گیری λdt است.
- حلزون در هر تخم‌گذاری s تخم می‌گذارد.
- از جفت‌گیری‌های حلزون‌های راست‌گرد، حلزون‌های راست‌گرد و از جفت‌گیری‌های چپ‌گردها حلزون‌های چپ‌گرد حاصل می‌شوند. از جفت‌گیری‌های حلزون‌های راست‌گرد با حلزون‌های چپ‌گرد با احتمال برابر حلزون‌های راست‌گرد و چپ‌گرد حاصل می‌شوند. یعنی به طور متوسط نیمی از آن‌ها راست‌گرد و نیم دیگر چپ‌گرد هستند.

الف- در این بخش می‌خواهیم معادله‌ی تحول R و L را به دست آوریم. یک حلزون راست‌گرد ممکن است با یکی از حلزون‌های راست‌گرد و یا یکی از حلزون‌های چپ‌گرد جفت‌گیری کند، یعنی $R - 1$ انتخاب بین راست‌گردها و L انتخاب بین چپ‌گردها دارد. تغییر تعداد راست‌گردها در مدت زمان dt ناشی از جفت‌گیری‌های راست‌گرد-راست‌گرد چه قدر است؟ تغییر تعداد راست‌گردها در مدت زمان dt ناشی از جفت‌گیری‌های راست‌گرد-راست‌گرد چه قدر است؟ نشان دهید معادله‌ی تحول زمانی‌های R و L چیزی به صورت زیر است

$$\frac{dR}{dt} = RF_1(R, L) \quad (90.7)$$

$$\frac{dL}{dt} = LF_2(R, L). \quad (91.7)$$

تابع‌های $F_1(R, L)$ و $F_2(R, L)$ را به دست آورید.
ب- نسبت تعداد دو نوع حلزون را $X := \frac{L}{R}$ بگیرد. توجه کنید که $R, L \gg 1$. تحول زمانی‌های X را به دست آورید.

$$\frac{dX}{dt} = G(X). \quad (92.7)$$

تابع $G(X)$ را به دست آورید.

ج- نقاط ثابت این مدل را به دست آورید. کدام جاذب و کدام دافع است. پس از زمان طولانی انتظار دارید X چه مقداری داشته باشد؟

۱۳.۷ دو گونه‌ی خرگوش با تعداد N_a و روباه با تعداد N_b را به عنوان یک دستگاه شکار و شکارچی در نظر بگیرید. ازدیاد جمعیت خرگوش‌ها متناسب با جمعیت خودشان و کم شدن جمعیت‌شان متناسب با جمعیت خودشان و جمعیت روباه‌هاست. کاهش جمعیت روباه‌ها متناسب با جمعیت خودشان و ازدیاد جمعیت‌شان متناسب با جمعیت خودشان و جمعیت خرگوش‌هاست. همه‌ی پارامترهای $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ مثبت هستند.

$$\frac{dN_a}{dt} = N_a(\alpha - \beta N_b) \quad (93.7)$$

$$\frac{dN_b}{dt} = N_b(\gamma N_a - \delta). \quad (94.7)$$

الف- این معادلات را با انتخاب پارامترهای مناسب بی‌بعد کنید.

ب- نقاط ثابت این دستگاه دینامیکی را پیدا کنید.

ج- رفتار سیستم در نزدیکی این نقاط ثابت چگونه است؟

پیوست ۱ - احتمال و انتروپی

وقتی می‌گوییم احتمال یک رویداد p است، یعنی چه؟ وقتی یک سکه را می‌اندازیم ممکن است نتیجه شیر یا خط باشد. معمولاً گفته می‌شود احتمال هر کدام از این رویدادها $1/2$ است. این گزاره یعنی چه؟ آیا اگر ۱۰۰ بار سکه را پرتاب کنیم، حتماً پنجاه بار شیر می‌آید؟ آیا امکان ندارد در همه‌ی ۱۰۰ پرتاب، نتیجه خط باشد؟ اگر چنین چیزی امکان دارد، معنی دقیق احتمال چیست؟ چه‌طور احتمال یک روی داد را اندازه بگیریم؟ برای شروع لازم است ابتدا تعریفی کمی و دقیق از احتمال داشته باشیم و سپس به سنجش آن بپردازیم. در مورد سنجش احتمال بعداً دوباره بحث خواهیم کرد. فعلاً به سوال اول بپردازیم.

برای این که احتمال را تعریف کنیم، لازم است ابتدا مجموعه‌ی تمام روی داده‌های محتمل را در نظر بگیریم. به مجموعه‌ی تمام روی داده‌های محتمل، مجموعه‌ی مرجع می‌گوییم و آن را با Ω نمایش می‌دهیم. البته از بین تمام روی داده‌های محتمل در هر اندازه‌گیری، قاعدتاً یک نتیجه رخ می‌دهد. بنابراین هر نتیجه‌ی اندازه‌گیری زیرمجموعه‌ای از این مجموعه‌ی مرجع است. مثلاً در انداختن یک سکه دو روی داد محتمل است، شیر $\{H\}$ ، یا خط $\{D\}$. و مجموعه‌ی مرجع Ω برای دو روی داد محتمل یعنی شیر آمدن یا خط آمدن است. یا مثلاً در دو بار انداختن سکه، چهار روی داد محتمل است، دو شیر $A_1 := \{H, H\}$ ، دو خط $A_2 := \{D, D\}$ ، دفعه‌ی اول شیر و دفعه دوم خط $A_3 := \{H, D\}$ ، و بالاخره دفعه‌ی اول خط و دفعه‌ی دوم

شیر است $A_4 := \{D, H\}$. مجموعه‌ی مرجع $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ است. روی‌دادِ $\{A_3, A_4\}$ ، یعنی این که حتماً یک شیر و یک خط آمده و ترتیب آن‌ها برای مان مهم نیست یا روی‌دادِ $\{A_1, A_3, A_4\}$ ، یعنی آن‌که حداقل یک بار شیر آمده است.

برای آن که بتوانیم احتمال یک روی‌داد را به دست آوریم باید بتوانیم به مجموعه‌ی متناظر با آن روی‌داد، یک عدد یا اندازه نسبت دهیم. قبل از آن لازم است بدانیم که با مجموعه‌ها چه کارهایی می‌توانیم بکنیم. اجتماع دو مجموعه

$$A \cup B = \{\xi | \xi \in A \text{ or } \xi \in B\}, \quad (1.8)$$

اشتراک دو مجموعه

$$A \cap B = \{\xi | \xi \in A \text{ and } \xi \in B\}, \quad (2.8)$$

و نقیض A

$$\bar{A} = \{\xi | \xi \notin A\}. \quad (3.8)$$

مجموعه روی‌دادهایی که در B هستند و در A نیستند و با $B - A$ نمایش داده می‌شود.

$$B - A = \{\xi | \xi \notin A \text{ and } \xi \in B\}, \quad (4.8)$$

بنابراین $(A - B) \cup (B - A)$ یعنی مجموعه روی‌دادهایی که فقط در A یا فقط در B هستند. مجموعه‌ی تهی یعنی مجموعه‌ی روی‌دادهای غیر ممکن و با \emptyset نمایش داده می‌شود. دو روی‌داد A و B متمایزند، اگر $A \cap B = \emptyset$. در این صورت این دو روی‌داد ناسازگارند یا به عبارت دیگر هم‌زمان رخ نمی‌دهند.

از دو مجموعه‌ی A و B سه مجموعه‌ی $(A - B)$ ، $A \cap B$ ، $(B - A)$ را می‌توان ساخت که اتحادهای زیر بین آن‌ها برقرار است

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A, \quad (5.8)$$

$$(A \cap B) \cup (B - A) = B, \quad (۶.۸)$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B, \quad (۷.۸)$$

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset, \quad (۸.۸)$$

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset, \quad (۹.۸)$$

$$(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset. \quad (۱۰.۸)$$

قوانین دومورگان^۱ - این قوانین به صورت زیرند

$$\overline{(A \cup B)} = (\bar{A} \cap \bar{B}), \quad (۱۱.۸)$$

$$\overline{(A \cap B)} = (\bar{A} \cup \bar{B}). \quad (۱۲.۸)$$

۱.۸ اندازه، احتمال

برای تعریف احتمال لازم است به هر مجموعه یک اندازه نسبت دهیم. اندازه هر مجموعه تابعی است که به آن مجموعه یک عدد نسبت می‌دهد.

$$\mu : A \rightarrow \mu(A). \quad (۱۳.۸)$$

تابع اندازه باید این خواص را داشته باشد

$$\mu(A) \geq 0, \quad (۱۴.۸)$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \quad (۱۵.۸)$$

تابع اندازه یک تابع مثبت فزون‌ور است. اگر اندازه‌ی مجموعه‌ی مرجع، $\mu(\Omega)$ ، محدود باشد، از روی آن می‌توان اندازه‌ی بهنجار شده‌ای مثل P را تعریف کنیم که

$$P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \quad (۱۶.۸)$$

^۱De Morgan's laws

در این صورت

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad (۱۷.۸)$$

$$P(\Omega) = 1, \quad (۱۸.۸)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset. \quad (۱۹.۸)$$

مثال ۱.۱.۸. مجموعه‌ی شکل‌های دو بعدی روی صفحه‌ی تخت بهنجارش‌پذیر نیست، ولی مجموعه‌ی شکل‌های روی یک کره بهنجارش‌پذیر است. توجه داشته باشید که مساحت مرجع یعنی کل فضای روی صفحه‌ی تخت، نامتناهی است، در حالی که مساحت یک کره متناهی است. به این معنا اگر اندازه‌ای که به مجموعه‌ی مرجع نسبت می‌دهیم نامتناهی باشد، اندازه‌های زیرمجموعه‌های آن بهنجارش‌پذیر نیستند.

احتمال یک روی‌داد را به این صورت تعریف می‌کنیم که

تعریف ۲.۱.۸

- به هر روی‌داد ممکن یک مجموعه نسبت می‌دهیم.
- برای این مجموعه‌ها یک تابع اندازه تعریف می‌کنیم.
- احتمال برابر است با اندازه‌ی بهنجارش‌دهی مجموعه‌ی متناظر با آن روی‌داد، یعنی نسبت اندازه‌ی مجموعه‌ی متناظر با آن روی‌داد به اندازه‌ی مجموعه‌ی مرجع که مجموعه‌ی همه‌ی روی‌دادها است.
- احتمال اجتماع روی‌دادهای متمایز جمع احتمال وقوع آن روی‌دادهاست.

چون $A \cup \bar{A} = \Omega$ است،

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1. \quad (۲۰.۸)$$

اما $A \cap \bar{A} = \emptyset$ پس

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (۲۱.۸)$$

چون اجتماع مجموعه‌ی تهی و مجموعه‌ی مرجع همان مجموعه‌ی مرجع است،

$$P(\emptyset) = 0.$$

با استفاده از مجموعه روابط (۱.۸-۵.۸) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$P(A) = [P(A - B) + P(A \cap B)], \quad (22.8)$$

$$P(B) = [P(A \cap B) + P(B - A)], \quad (23.8)$$

و

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A), \\ &= P(A - B) + P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &\quad + P(B - A) - P(A \cap B), \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned} \quad (24.8)$$

همان طور که در این مورد هم دیدیم، اگر احتمال اجتماع رویدادهایی که مجزا نیستند را بخواهیم به دست آوریم، باید آن‌ها را به صورت اجتماع روی دادهای مجزا نوشت.

تعریف ۳.۱.۸ دو روی داد که اشتراک مجموعه‌ای‌شان تهی باشد، متمایز هستند.

فرض کنید کل روی داده‌ها را به تعدادی روی داد متمایز تقسیم می‌کنیم. در این صورت

$$\Omega = \bigcup_i E_i, \quad (25.8)$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset. \quad (26.8)$$

در این صورت

$$P\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i P(E_i) = P(\Omega) = 1. \quad (27.8)$$

مثال ۴.۱۰.۸. فرض کنید کسی یک بار سکه ی کاملاً متقارنی را می اندازد. احتمال آن که دفعه ی اول شیر بیاید $P(A) = 1/2$ و احتمال آن که دفعه ی اول خط بیاید $P(B) = 1/2$ است. اگر او سه بار سکه بیندازد، روی دادهای ممکن

$$\begin{aligned} & \{AAA\}, \\ & \{BAA\}, \{ABA\}, \{AAB\}, \\ & \{BBA\}, \{BAB\}, \{ABB\}, \\ & \{BBB\}, \end{aligned}$$

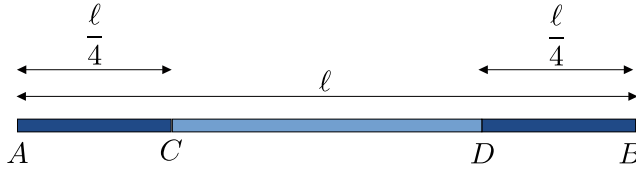
است که همگی هم احتمالند. روی داد مرجع عبارت است از

$$\{BBB, BBA, BAB, ABB, BAA, ABA, AAB, AAA\}.$$

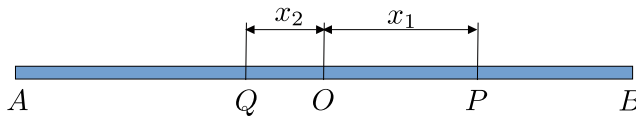
ب- احتمال آن که همان دفعه ی اول شیر بیاید $P(A_1) = 1/2$ است. احتمال آن که دفعه ی اول شیر نیاید و دفعه ی دوم شیر بیاید $P(A_2) = 1/4$ است. و بالاخره احتمال آن که $n - 1$ دفعه شیر نیاید و دفعه ی n ام شیر بیاید $P(A_n) = 1/2^n$ است. اگر این کار را به کرات انجام دهد نهایتاً شیر خواهد آمد، یعنی

$$\sum_n P(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (1/2)^n = 1. \quad (28.8)$$

مثال ۵.۱۰.۸. الف- روی پاره خط AB به طول l نقطه ی Q به طور کاملاً تصادفی انتخاب می شود. این نقطه پاره خط را به دو تکه تقسیم می کند. احتمال این که نسبت اندازه ی قطعه ی کوچکتر به بزرگتر، کوچکتر یا مساوی $1/3$ باشد چه قدر است؟ شکل ۱.۸ را ببینید. در نقاط C و D نسبت قطعه ی کوچکتر به بزرگتر یعنی AC/BC و BD/AD دقیقاً مساوی $1/3$ است. مجموعه نقاطی روی پاره خط AB که نسبت قطعه ی کوچکتر به بزرگتر کوچکتر یا مساوی $1/3$ باشد، نقاطی است که روی تکه های تیره تر روی خط، یعنی نقاطی روی AC و BD هستند. مجموع اندازه ی این تکه ها به کل پاره خط $1/2$ است. پس احتمال 50 درصد است.



شکل ۱.۸



شکل ۲.۸

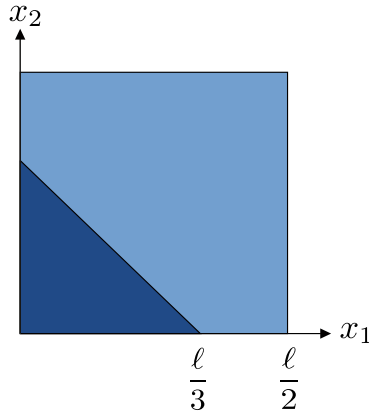
ب. نقطه‌ی O وسطِ پاره‌خطِ AB است. نقطه‌ی P به طورِ کاملاً تصادفی سمتِ راستِ نقطه‌ی O و نقطه‌ی Q به طورِ کاملاً تصادفی سمتِ چپِ نقطه‌ی O انتخاب می‌کنیم. شکل ۲.۸ را ببینید. احتمالِ این‌که فاصله‌ی این دو نقطه از $\ell/3$ کوچک‌تر باشد چه قدر است؟ مطابقِ شکل ۲.۸، اگر نقاطِ P و Q را کاملاً تصادفی انتخاب کنیم، $OP = x_1$ و $OQ = x_2$ می‌گیریم. در این صورت تمام نقاطِ داخلِ مربعی به ضلع $\ell/2$ ، یعنی مربعی به مساحت $\ell^2/4$ ، ناحیه مرجع ما است. شکل ۳.۸ را ببینید. اما می‌خواهیم $x_1 + x_2 < \ell/3$ باشد. پس ناحیه‌ی تیره‌تر ناحیه قابلِ قبول است. اما اندازه‌ی ناحیه‌ی تیره‌تر $\ell^2/18$ است و احتمالِ موردِ نظر

$$P(x_1 + x_2 < \ell/3) = \frac{\ell^2/18}{\ell^2/4} = \frac{2}{9}. \quad (۲۹.۸)$$

۲.۸ احتمال شرطی

احتمالِ شرطی $P(A|B)$ ، احتمالِ این است که A رخ دهد به شرطِ آن‌که B رخ داده باشد. به شرطِ آن‌که $P(B) \neq 0$ باشد،

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}. \quad (۳۰.۸)$$



شکل ۳.۸

می‌توان نشان داد که

$$P(A|B) = \frac{P(A, B) \geq 0}{P(B) > 0} \geq 0,$$

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega, B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

و در صورتی که $A \cap C = \emptyset$ در این صورت

$$P(A \cup C|B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (C \cap B))}{P(B)}. \quad (31.8)$$

اما از آنجایی که $(A \cap B) \cap (C \cap B) = \emptyset$ ، نتیجه می‌شود

$$P((A \cap B) \cup (C \cap B)) = P(A \cap B) + P(C \cap B). \quad (32.8)$$

پس

$$P(A \cup C|B) = \frac{P((A \cap B))}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = P(A|B) + P(C|B). \quad (33.8)$$

اگر $B \subset A$ ، در این صورت $A \cap B = B$ و

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1. \quad (34.8)$$

و بالاخره اگر $A \subset B$ ، در این صورت $A \cap B = A$ و

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} > P(A). \quad (۳۵.۸)$$

تعریف ۱.۲.۸ دو روی داد A و B مستقل اند اگر

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (۳۶.۸)$$

در این صورت برای دو روی داد مستقل A و B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A). \quad (۳۷.۸)$$

قضیه یا قاعده‌ی بیز^۱ رابطه‌ای بین احتمال‌های شرطی است.

قضیه ۲.۲.۸ - قاعده‌ی بیز - بین احتمال‌های شرطی $P(A|B)$ و $P(B|A)$ می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (۳۸.۸)$$

اگر کل روی دادها را به تعدادی روی داد متمایز تقسیم کنیم

$$\Omega = \bigcup_i E_i, \quad (۳۹.۸)$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset. \quad (۴۰.۸)$$

یک شکل کلی‌تر از قضیه‌ی بیز به شکل زیر به دست می‌آید

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_j P(A|E_j)P(E_j)}. \quad (۴۱.۸)$$

در این جا در مخرج کسر از

$$P(A) = \sum_j P(A \cap E_j) = \sum_j P(A|E_j)P(E_j). \quad (۴۲.۸)$$

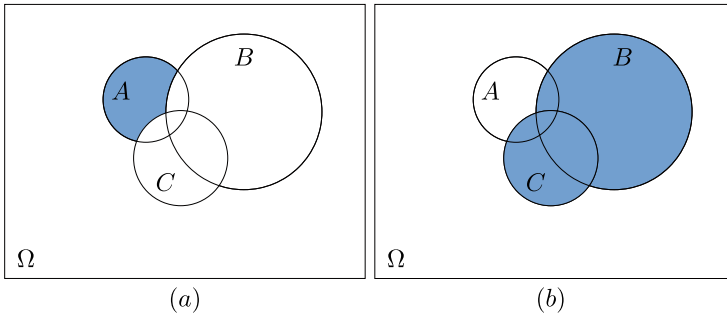
استفاده کرده‌ایم.

مثال ۳۰.۲۰.۸. سه روی داد A ، B و C را در نظر بگیرید.

الف - احتمال آن که تنها روی داد A رخ دهد عبارت است از آن که A رخ دهد و B و C رخ ندهند. این احتمال

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

است. بخش (a) در شکل ۴.۸ را ببینید.



شکل ۴.۸

ب - احتمال آن که روی دادهای B و C رخ دهند ولی A رخ ندهد، عبارت است از

$$P(\bar{A} \cap B \cap C)$$

است. شکل (b) را ببینید.

ج - احتمال آن که حداقل یکی از روی دادهها رخ دهند عبارت است از

$$P(A \cup B \cup C).$$

در واقع برای این مسائل به‌تر است احتمالِ نقیضِ آن را به دست آوریم که هیچ‌کدام از روی دادها رخ ندهند. این احتمال عبارت است از

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}),$$

و روی دادِ موردِ نظرِ مکملِ این روی داد است، یعنی

$$\overline{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}.$$

که مطابقِ قاعده‌ی دومورگان همان $P(A \cup B \cup C)$ است. د- حداقل دو تا از روی دادها رخ دهند. در این صورت یا دو روی داد رخ می‌دهد یا هر سه روی داد رخ می‌دهند. حالت‌های دو روی داد (A, B) ، (A, C) و (B, C) هستند. در این صورت

$$P((A, B) \cup (A, C) \cup (B, C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ - 2P(A \cap B \cap C)$$

هم شامل حالاتی است که فقط دو روی داد رخ دهد و هم احتمالِ آن‌که هر سه روی داد رخ دهند. بخش (c) در شکل ۵.۸ را ببینید.

ه- هر سه روی داد رخ دهند. در این صورت می‌رسیم به

$$P(A \cap B \cap C).$$

بخش (d) در شکل ۵.۸ را ببینید.

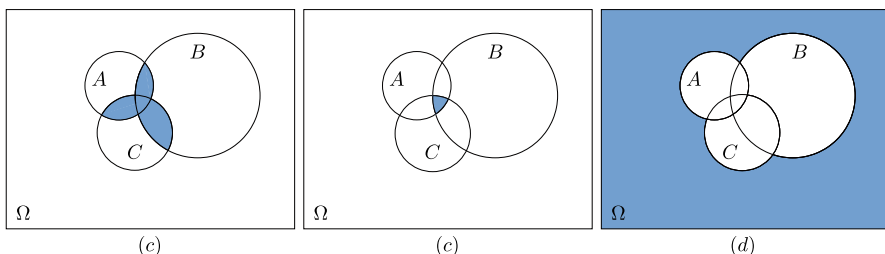
و- هیچ‌کدام از سه روی داد رخ نمی‌دهند. در این صورت می‌رسیم به

$$P(\overline{A \cup B \cup C})$$

که با استفاده از قاعده‌ی دومورگان همان

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$

است. بخش (e) در شکل ۵.۸ را ببینید.



شکل ۵.۸

ز- حداکثر یکی از روی داده‌ها رخ دهد. این یعنی این که یا فقط یکی از روی داده‌ها رخ دهد و دو روی دادِ دیگر رخ ندهند یا این که هیچ‌کدام از روی داده‌ها رخ ندهند. در این صورت

$$P((A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})).$$

این حالت نقیضِ بندِ د- است.

ح- حداکثر دو تا از روی داده‌ها رخ دهد. این یعنی این که یا هیچ‌کدام از روی داده‌ها رخ ندهند یا آن که فقط یکی از روی داده‌ها رخ دهد و دو روی دادِ دیگر رخ ندهند یا این که دو تا از روی داده‌ها رخ دهند و سومی رخ ندهد. در این صورت

$$P((A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \\ \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)).$$

برای این مسئله هم به‌تر است احتمالِ نقیضِ آن را به دست آوریم. این ترکیب یعنی این‌که تنها حالتِ غیرمجاز رخ دادنِ هر سه روی داد است که یعنی

$$P(\overline{A \cap B \cap C}).$$

ط- دقیقاً دو روی داد رخ دهد

$$P((A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B) \\ + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C) \quad (۴۳.۸)$$

ی- حداکثر هر سه روی داد رخ دهند. این یعنی آنکه یا هیچ کدام از روی دادها رخ ندهند یا آن که فقط یکی از روی دادها رخ دهد و دو روی داد دیگر رخ ندهند یا این که دو تا از روی دادها رخ دهند و سومی رخ ندهد یا این که بالاخره هر سه روی داد رخ دهند. این یعنی مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن، یعنی

$$P(\Omega) = 1$$

است.

مثال ۲.۸.۴. در یک آموزشگاه درس‌های مختلفی ارائه می‌شود. از بین آن‌ها سه زبان انگلیسی، آلمانی و فرانسوی تدریس می‌شود. ۲۸ درصد دانش‌آموزان در کلاس انگلیسی، ۲۶ درصد در کلاس فرانسوی، و ۱۶ درصد در کلاس آلمانی شرکت می‌کنند. ۱۲ درصد دانش‌آموزان در کلاس انگلیسی و فرانسوی، ۴ درصد در کلاس فرانسوی و آلمانی و ۶ درصد در کلاس انگلیسی و آلمانی شرکت می‌کنند. ۲ درصد دانش‌آموزان در هر سه کلاس زبان شرکت می‌کنند. در این صورت اگر فردی را به طور اتفاقی انتخاب کنیم

$$P(A) = 0.28, \quad P(B) = 0.26, \quad P(C) = 0.16,$$

$$P(A \cap B) = 0.12, \quad P(A \cap C) = 0.06, \quad P(B \cap C) = 0.04$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.02.$$

الف- احتمال آن که فردی که به طور اتفاقی انتخاب می‌کنیم حداقل در یکی از کلاس‌های زبان شرکت کند، چه قدر است؟ این احتمال $P(A \cup B \cup C)$ است. این احتمال را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.28 + 0.26 + 0.16 - 0.12 - 0.06 - 0.04 + 0.02 \\ &= 0.50. \end{aligned}$$

ب- احتمال آنکه فردی که به طور اتفاقی انتخاب می‌کنیم در هیچ‌یک از کلاس‌های زبان شرکت نکند، چه قدر است؟ این احتمال $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ است که طبق قاعده‌ی دومورگان همان

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0.5 \quad (۴۴.۸)$$

است.

ج- احتمال آنکه فردی که به طور اتفاقی انتخاب می‌کنیم فقط در یک کلاس زبان شرکت کند، چه قدر است؟ این احتمال برابر است با

$$\begin{aligned} P &= P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + 2P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.5 - 0.12 - 0.06 - 0.04 + 2 \times 0.02 \\ &= 0.32. \end{aligned}$$

د- فردی را انتخاب می‌کنیم که در کلاس انگلیسی است. احتمال آنکه این فرد در کلاس فرانسه هم باشد، چه قدر است؟ و اگر فردی را که انتخاب می‌کنیم در کلاس فرانسه باشد، احتمال آنکه این فرد در کلاس انگلیسی هم باشد، چه قدر است؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{P(0.26)} = \frac{6}{13} \quad (۴۵.۸)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{P(0.28)} = \frac{3}{7} \quad (۴۶.۸)$$

۳.۸ انتروپی

سکه‌ای متقارن را در نظر بگیرید که احتمال شیر یا خط برای آن برابر است. اگر به طور مکرر و به دفعات زیاد (مثلاً ۱۰۰۰ بار) سکه را پرتاب و نتیجه را یادداشت کنیم یک سری به صورت

$ABBAAABBABABBABBAABAA \dots$ می‌رسیم که A علامت شیر آمدن و B علامت خط آمدن است. هر دفعه شیر آمدن مستقل از این است که دفعه‌ی قبل شیر آمده است یا خط. این مجموعه کاملاً بی‌نظم است. اگر در هر مرحله‌ای شیر بیاید، معلوم نیست که دفعه‌ی بعد چه خواهد شد؟ برای آن‌که این سری را جایی ضبط کنیم باید همه‌ی علامت‌ها را نگه داریم. اگر همین کار را بخواهیم برای روزهای بارانی و آفتابی انجام دهیم مساله فرق می‌کند چون روزهای آفتابی معمولاً پشت سر هم (مثلاً تابستان‌ها) و روزهای بارانی (مثلاً زمستان‌ها) هم پشت سر هم هستند، مثلاً

$RSSRRSSRRSSSSRRSSRRSRR \dots$

که R علامت روز بارانی و S علامت روز آفتابی است. این سری بی‌نظمی‌اش کم‌تر است. به این معنی که برای آن‌که این سری را جایی ضبط کنیم لازم نیست همه‌ی علامت‌ها حفظ شوند. اگر هر روز مثل روز قبلیش بود علامت 0 و وقتی فرق داشت علامت 1 را به کار می‌بریم. در این صورت با فرض این‌که روز اول را داشته باشیم، پس از آن سری‌ی زیر را می‌توانیم بنویسیم

$10010101100011010110 \dots$

در این سری تعداد 0 ها بیش‌تر از تعداد 1 ها است. به این معنی که روزهای پشت سر هم مشابه محتمل‌تر هستند. در مثال دوم بی‌نظمی کم‌تر یا منظم‌تر است. هرچه سیستم بی‌نظم‌تر باشد قابلیت پیش‌بینی‌پذیری کم‌تری دارد. سیستم‌های منظم قابلیت پیش‌بینی دارند. این نظم یا بی‌نظمی را باید کمی کنیم.

برای فهم انتروپی بیابید مثال دیگری را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم در حالت تعادل چگونه گازی ظرفی را پُر می‌کند. در واقع اتفاقی که می‌افتد این است که در حالت تعادل گاز تقریباً ظرف را یک‌نواخت پُر می‌کند. البته حالت‌های متفاوتی ممکن است رخ دهد ولی آنچه محتمل‌ترین حالت است، همان حالت تعادل است. یعنی اگر به طور کاتوره‌ای در زمان‌های مختلف به ظرف نگاه کنیم در بیش‌تر اوقات چگالی‌ی تعداد ذرات تقریباً یک‌نواخت است. ظرفی را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنیم. N ذره‌ی مشابه را درون این ظرف می‌اندازیم. تعداد حالاتی که n_1 ذره در سمت راست و n_2 ذره در سمت چپ است را با $\Omega(n_1, n_2)$ نمایش

می‌دهیم. ابتدا برای سادگی فرض کنید می‌خواهیم دو ذره‌ی مشابه را در بخش‌های چپ و راستِ ظرف قرار دهیم. کلِ آرایش‌های ممکن سه تا است. دو ذره سمتِ راست، دو ذره سمتِ چپ، و یکی راست و یکی چپ. این که تعدادِ این آرایش‌ها سه تا است ناشی از مشابه بودنِ ذرات دارد. برای دو ذره‌ی متفاوت چهار آرایش وجود دارد. اما این سه آرایش هم‌احتمال نیستند. درست است که ذرات مشابه و تمیز ناپذیرند ولی چپ و راست ظرف متمایزند. مثلاً وقتی که می‌خواهیم ذرات را درونِ ظرف بگذاریم حالتی که در ابتدا ذره را سمتِ راست و بعد ذره‌ی دوم را سمتِ چپ قرار دهیم با حالتی که ابتدا ذره را سمتِ چپ و بعد ذره‌ای را سمتِ راست قرار دهیم، متفاوتند. همین مساله را جورِ دیگری هم می‌شود دید. اگر مثلاً دو ذره یکسان مثل اتم‌های یک گاز درونِ ظرف حرکت کنند در یک چهارمِ اوقات دو ذره سمتِ راست، در یک چهارمِ اوقات ذرات سمتِ چپ و در نیمی از اوقات یک ذره سمتِ راست و یک ذره سمتِ چپ است. برای ده ذره ۱۱ آرایش متفاوت وجود دارد

$$(0, 10), (1, 9), (2, 8), \dots, (9, 1), (10, 0). \quad (47.8)$$

این ۱۱ آرایش هم‌احتمال‌ها نیستند. تعداد حالت‌های هر آرایش عبارتند از

$$(0, 10), \binom{10}{0}$$

$$(1, 9), \binom{10}{1}$$

⋮

در این صورت

$$\Omega(0, 10) = \Omega(10, 0) = \frac{10!}{0! 10!} = 1, \quad \Omega(1, 9) = \Omega(9, 1) = \frac{10!}{1! 9!} = 10,$$

$$\Omega(2, 8) = \Omega(8, 2) = \frac{10!}{2! 8!} = 45, \quad \Omega(3, 7) = \Omega(7, 3) = \frac{10!}{3! 7!} = 120,$$

$$\Omega(6, 4) = \Omega(4, 6) = \frac{10!}{6! 4!} = 210 \quad \Omega(5, 5) = \frac{10!}{5! 5!} = 252.$$

(48.8)

یکی از فرض‌های مکانیک آماری این است که همه‌ی میکروحالت‌ها هم‌احتمال هستند. اگر همه‌ی

میکروحالت‌ها هم‌احتمال باشند، محتمل‌ترین حالت آن است که نیمی از ذرات سمت راست و نیمی دیگر سمت چپ ظرف باشند. به طور مثال داریم

$$P(5, 5) = \frac{\Omega(5, 5)}{\Omega(0, 10) + \Omega(1, 9) + \dots + \Omega(10, 0)} = 24.6\%,$$

$$P(6, 4) = \frac{\Omega(6, 4)}{\Omega(0, 10) + \Omega(1, 9) + \dots + \Omega(10, 0)} = 20.5\%. \quad (۴۹.۸)$$

و

$$\bar{n}_1 = \frac{0 \times \Omega(0, 10) + 1 \times \Omega(1, 9) + \dots + 10 \times \Omega(10, 0)}{\Omega(0, 10) + \Omega(1, 9) + \dots + \Omega(10, 0)}$$

$$= 5 \quad (۵۰.۸)$$

است.

برای N ذره $N!$ حالت وجود دارد. برای N ذره تعداد حالاتی که n_1 ذره در سمت راست و n_2 ذره در سمت چپ است

$$\Omega(n_1, n_2) = \frac{N!}{n_1! n_2!} \quad (۵۱.۸)$$

می‌شود. در این حالت هم محتمل‌ترین حالت وقتی است که

$$\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \frac{N}{2}. \quad (۵۲.۸)$$

۴۰۸ توزیع دوجمله‌ای

یک دستگاه دو حالتی که احتمال یک حالت

$$P(A) = p \quad (۵۳.۸)$$

و احتمال حالت دیگر

$$P(B) = 1 - p =: q \quad (۵۴.۸)$$

است، را در نظر بگیرید. احتمال این که یک خروجی خاص مثل $AABA$ داشته باشیم $P(A, A, B, A) = p^3q$ است ولی احتمال اینکه از چهار مورد، مستقل از ترتیب رخ دادن آن‌ها سه مورد حالت A و یک مورد B باشد $P(3) = 4p^3q$ است. در حالت کلی احتمال اینکه از N مورد، مستقل از ترتیب رخ دادن آن‌ها n بار حالت A و $N - n$ بار B باشد

$$P(n) := C_n p^n q^{N-n} \quad (55.8)$$

است که

$$C_n := \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}. \quad (56.8)$$

واضح است که مجموع احتمال تمام حالت‌های ممکن باید یک شود

$$\sum_{n=0}^N P(n) = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1. \quad (57.8)$$

Biophysics

By:

AMIR AGHAMOHAMMADI

UNIVERSITY OF ALZAHRA

UNIVERSITY OF ALZAHRA

2020

<https://www.youtube.com/@amiraghamohammadi>