گروه بازبهنجارش، بخش دوم

وحید کریمی پور، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۹ آذر ۱۳۹۲

۱ مقدمه

در قسمت اول با این مفهوم آشنا شدیم که بازبهنجارش را می توان مثل یک تقارن یا تقارن تقریبی در نظرگرفت که مثل دیگر تقارن های فیزیک نتایجی کلی را قبل از هر نوع محاسبه دقیق به دست می دهد. برای آنکه از هر تقارنی بتوانیم استفاده کنیم می بایست نخست دریابیم که آن عمل تقارنی چه تغییری بر شی مورد نظر ما اعمال می کند. مثلا باید بدانیم که تقارن دورانی یا انتقالی بر روی یک شی چه اثری دارد. اثر این گروه ها بر روی سیستم های فیزیکی بسیار ساده است . مختصات یک دستگاه فیزیکی که تحت تاثیر دوران یا انتقال قرار می گیرد به سادگی تغییر می کند. مرکز جرم چنین دستگاهی با بردار مکان r مشخص می شود و تغییر این بردار تحت انتقال یا دوران یا تغییر مقیاس به سادگی و به دقت تعیین می شود.

اما عمل گروه بازبهنجارش بر روی یک سیستم فیزیکی چندان ساده نیست. دراین جا ما با یک سیستم بس ذره ای سروکار داریم که تحت یک عمل پیچیده قرار می گیرد و بنابراین برای این که در ابتدا بتوانیم از این مفهوم و این تقارن استفاده کنیم یک فرض خیلی ساده کننده را در مورد تبدیلات بازبهنجارش به کار بردیم و آن این بود که مثل کادانف فرض کردیم که اثر تبدیل بازبهنجارش روی هامیلتونی یک سیستم اسپینی خیلی ساده است. اگر بخواهیم از این حدس فراتر برویم باید عمل بازبهنجارش را واقعا انجام دهیم و هامیلتونی جدید را لااقل با درجه ای از تقریب بدست بیاوریم. این کاری است که در این فصل انجام می دهیم و سعی می کنیم که نخست با مطالعه مثالهای ساده و سپس با بررسی یک فرمالیزم نسبتا کلی نشان دهیم که چگونه واقعا می توان عمل بازبهنجارش را انجام داد . در این مثال های ساده می فهمیم که چگونه ثابت های جفتیدگی یک هامیلتونی تحت تبدیلات بازبهنجارش تغییر می کنند.

۲ بازبهنجارش در فضای حقیقی

بازبهنجارش در سیستم های اسپینی را معمولا بازبهنجارش در فضای حقیقی [1] می نامند. این اصطلاح در مقابل بازبهنجارش در فضای تکانه [2] به‌کار می رود که برای سیستم های پیوسته و میدان ها مناسب است. دراین درس تنها یاد می‌گیریم که چگونه عمل بازبهنجارش را می توان در سیستم های اسپینی انجام داد. این‌که چه‌گونه از معادلات بازبهنجارش می توان استفاده‌کرد موضوع قسمت بعدی درس است.

۱.۲ مثال اول : حذف‌کردن اسپین ها در یک بعد

این روش به روش حذف‌کردن یا $Decimation$ معروف است و البته زیاد هم متداول نیست ولی به هرحال به دلیل سادگی ای‌که در یک بعد دارد آموزنده است. در مدل آیزینگ یک بعدی بدون میدان مغناطیسی این روش بازبهنجارش به طور دقیق قابل انجام است و نیازی به تقریب ندارد، به همین دلیل نخست این روش را بررسی می‌کنیم. مدل آیزینگ یک بعدی را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید:

$$\beta H = -\sum_{i=1} J S_i S_{i+1}. \qquad (۱)$$

تابع پارش عبارت است از:

$$Z = \sum_{S_1,S_2,S_3,\cdots} e^{J\sum_{i=1} S_i S_{i+1}}. \qquad (۲)$$

حال در محاسبه تابع پارش روی اسپین های زوج جمع می بندیم. از آنجا‌که اسپین شماره ۲ تنها با اسپین های شماره ۱ و شماره ۳ برهم‌کنش دارد می توانیم جمع روی اسپین شماره ۲ را به طور دقیق انجام دهیم. بنابراین بدست می آوریم:

$$\sum_{S_2} e^{J(S_1S_2+S_2S_3)} = \sum_{S_2} e^{JS_2(S_1+S_3)} = 2\cosh J(S_1+S_3). \qquad (۳)$$

اما این عبارت را می توان دوباره به همان صورت برهم‌کنش های آیزینگ نوشت.

تمرین: نشان دهید‌که

$$2\cosh J(S_1+S_3) = e^{A+J'S_1S_3} \qquad (۴)$$

[1] Real Space Renormalization

[2] Momentum Space Renormalization

که در آن

$$\tanh J' = \tanh^2 J, \qquad e^A = 2\sqrt{\cosh 2J}. \tag{۵}$$

این اولین نمونه از بازبهنجارش است که ما در این درس انجام داده ایم و بدست آورده ایم.

تمرین: نشان دهید که اگر به جای یک اسپین روی دو اسپین مجاور جمع بزنیم آنگاه رابطه J' و J به صورت زیر خواهد بود:

$$\tanh J' = \tanh^3 J. \tag{۶}$$

تمرین: نشان دهید که اگر به جای یک اسپین روی n اسپین مجاور جمع بزنیم آنگاه رابطه J' و J به صورت زیر خواهد بود:

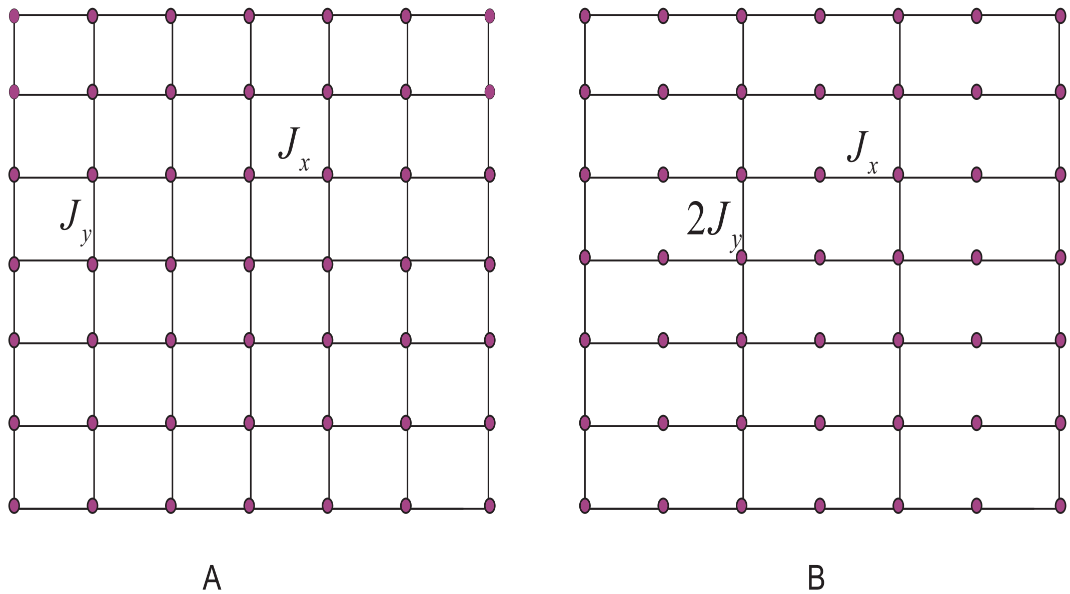
$$\tanh J' = \tanh^{n+1} J. \tag{۷}$$

۲.۲ مثال دوم :حذف کردن اسپین ها در دو بعد: روش میگدال - کادانف

روش حذف کردن یا $Decimation$ را در دو بعد نیز می توان انجام داد ولی خیلی زود معلوم می شود که این روش در دوبعد به طور دقیق قابل انجام نیست. دلیل اش هم خیلی روشن است. فرض کنید که بخواهیم دریک شبکه مربعی که از دو زیر شبکه تشکیل شده است روی اسپین های یک زیرشبکه جمع ببندیم. هرکدام از اسپین ها مثلا s_0 چهار همسایه دارد که آن ها را s_1 تا s_4 می نامیم. و وقتی روی اسپین وسطی جمع بزنیم به رابطه زیر می رسیم:

$$\sum_{s_0} e^{Js_0(s_1+s_2+s_3+s_4)} = 2\cos J(s_1+s_2+s_3+s_4). \tag{۸}$$

تمرین: نشان دهید که نمی توان طرف راست را به صورت عبارتی نوشت که تنها نشان دهنده برهم کنش نزدیک ترین همسایه ها باشد. طرف راست را به صورت $e^{H(s_1,s_2,s_3,s_4)}$ بنویسید و نوع برهم کنش ها را تعیین کنید.

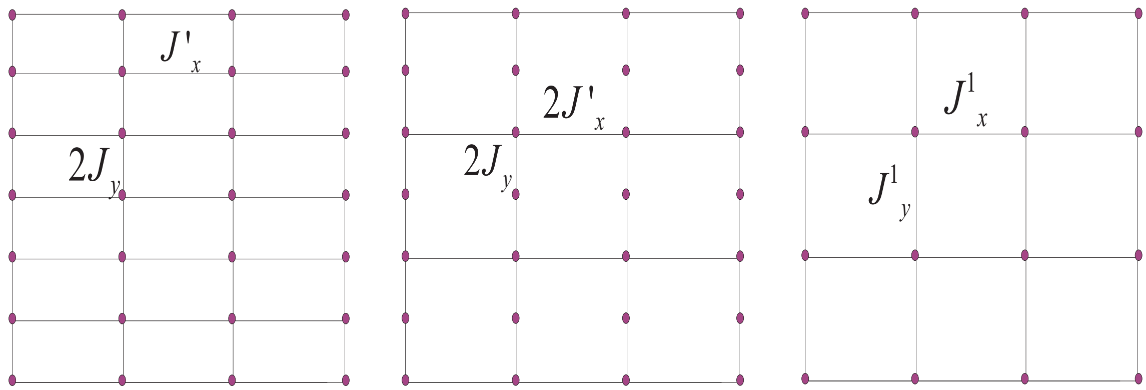


شکل ۱: سپس روی اسپین های وسط در اتصالات افقی جمع می بندیم. .روش میگدال – کادانف؛ مرحله اول: نیمی از اتصالات عمودی را پاک می‌کنیم و سهم آنها را به اتصالات دیگر می دهیم. .

با این وجود می توان روشی تقریبی را به‌کار برد که بر مبنای آن با روش حذف‌کردن بازهم به یک شبکه آیزینگ با برهم‌کنش های نزدیک ترین همسایه ها رسید. این روش به روش میگدال – کادانف $Migdal - Kadanoff$ معروف است. در این روش نخست مطابق با شکل () نیمی از اتصالات عمودی حذف شده و سهم آنها در برهم‌کنش بین اتصالات باقیمانده تقسیم می شود به این معنا که ضریب جفتیدگی آنها 2 برابر می شود. سپس مطابق با شکل () اسپین های افقی‌که حالا تنها دو تا همسایه دارند حذف می شوند و در نتیجه ضریب جفتیدگی J_x تبدیل می شود به J'_x که رابطه این دو ضریب عینا مطابق با رابطه ۵ است. حالا مطابق با شکل () نیمی از اتصالات افقی را برداشته و سهم آنها را به اتصالات باقیمانده می دهیم یعنی ضریب جفتیدگی J'_x را برای آنها به $2J'_x$ تبدیل می‌کنیم. در آخرین مرحله نیز روی اسپین های باقیمانده در وسط اتصالات عمودی روش حذف را به‌کار می بریم. به این ترتیب شبکه ای بدست می آید‌که طول شبکه آن دو برابر مقدار قبلی است.

تمرین: نشان دهید‌که با‌کاربرد روش میگدال–کادانف ضرایب جفتیدگی به شکل زیر تغییر می‌کنند:

$$J_x^1 = 2\tanh^{-1}[\tanh J_x)^2] \qquad J_y^1 = \tanh^{-1}[\tanh(2J_y)^2], \qquad (۹)$$



شکل ۲: روش میگدال‌کادانف: مراحل بعدی: این بار نیمی از اتصالات افقی را پاک می‌کنیم و سهم آنها را به اتصالات باقیمانده می دهیم و دوباره روی اسپین های وسطی در اتصالات عمودی جمع می بندیم.

۳.۲ مثال سوم: بازبهنجارش در یک سیستم شامل یک بلوک اسپین

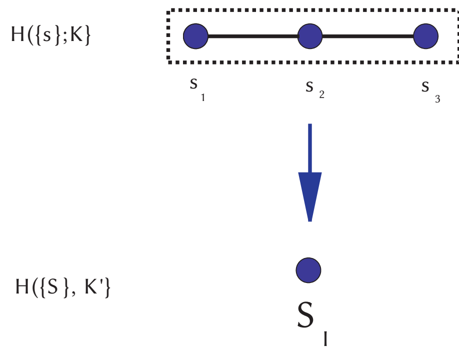
این مثال فقط برای این است‌که ما همراه با جزئیات محاسباتی ببینیم چگونه با تعریف بلوک های اسپینی می توان هامیلتونی جدید بین اسپین های بلوک را بدست آورد. واقعا این‌که چگونه بازبهنجارش در یک سیستم اسپینی به صورت‌کلی صورت می‌گیرد در مثال بعدی شرح داده خواهد شد. فرض‌کنید‌که سه ذره با اسپین یک دوم‌کناریکدیگر قرارگرفته اند و مطابق هامیلتونی زیر بایکدیگر برهم‌کنش می‌کنند، شکل ((3.2:

$$H = -J(s_1s_2 + s_2s_3) - B(s_1 + s_2 + s_3) \tag{۱۰}$$

هرگاه ضرایب جدید K_1 و K_2 را به صورت $K_1 := \beta J$ و $K_2 := \beta B$ تعریف‌کنیم تابع پارش به صورت زیر خواهد بود:

$$Z = \sum_{s_1,s_2,s_3} e^{K_1(s_1s_2+s_2s_3)+K_2(s_1+s_2+s_3)} \tag{۱۱}$$

کوچکترین مقیاس طولی دراین شبکه سه تایی برابراست با فاصله بین دواسپین. حال فرض‌کنید‌که این مقیاس اندازه‌گیری را سه برابرکنیم. به این معنا‌که دیگر جزئیات درون این یک بلوک متشکل از سه اسپین را نبینیم . دراین حالت آنچه‌که از سه اسپین درون این بلوک باقی خواهد ماند یک نوع متوسط است‌که می توانیم آن را به طریقه معینی تعریف‌کنیم. مثلاً می توانیم برای اسپین های درون بلوک I ام‌که آنهارا با s_1^I s_2^I و s_3^I نشان می دهیم یک متغیر جدید دو حالته مثل S_I تعریف‌کنیم‌که بازهم مقادیر $1, -1$ راختیار می‌کند و مطابق با این قاعده تعریف شده است‌که هرگاه اکثریت اسپین های درون بلوک روبه بالا باشند این متغیر مقدار یک و هرگاه اکثریت آنها روبه پایین باشند این متغیر مقدار -1 را اختیار



شکل ۳: تغییر ضریب جفتیدگی در یک سیستم ساده متشکل از سه اسپین. .

کند. به عبارت بهتر :

$$\begin{aligned}(s_1,s_2,s_3) &\in \{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\} \longrightarrow S_I = 1\\ (s_1,s_2,s_3) &\in \{(-1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1)\} \longrightarrow S_I = 1\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

حال سوال این است که هامیلتونی موثری که درمقیاس بزرگ می بینیم چیست ؟ برای یافتن این هامیلتونی پارش را می نویسیم و روی اسپین های درون بلوک ها جمع می زنیم :

$$Z = \sum_{s_1,s_2,s_3} e^{H(s_1,s_2,s_3} = \sum_{S_I} \sum_{s_1,s_2,s_3|S_I} e^{H(s_1,s_2,s_3|S_I)} \qquad (۱۳)$$

که درآن $\sum_{(s_1,s_2,s_3|S_I)}$ به معنای آن است که روی تمام حالت های درون بلوک، مشروط براین که مقدار اسپین بلوک برابربا S_I باشد، جمع می زنیم.

حال می توانیم جمع روی اسپین های درون بلوک را انجام دهیم و به نتیجه زیربرسیم:

$$Z = \sum_{S_I} e^{H(S_I)} \qquad (۱۴)$$

که درآن

$$e^{H(S_I)} = \sum_{s_1,s_2,s_3|S_I} e^{H(s_1,s_2,s_3|S_I)}. \tag{۱۵}$$

تابع $H(S_I)$ هامیلتونی موثری است که رفتار اسپین S_I را توصیف می‌کند. برای بدست آوردن شکل صریح آن می بایست از تعریف بالا و رابطه (12) استفاده کنیم. می نویسیم :

$$\begin{aligned} e^{H(S_I=1)} &= \sum_{s_1,s_2,s_3|S_I=1} e^{H(s_1,s_2,s_3|S_I=1)} = e^{H(1,1,1)} + e^{H(1,1,-1)} + e^{H(1,-1,1)} + e^{H(-1,1,1)} \\ &= e^{2K_1+3K_2} + e^{K_2} + e^{-2K_1+K_2} + e^{K_2} \end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned} e^{H(S_I=-1)} &= \sum_{s_1,s_2,s_3|S_I=-1} e^{H(s_1,s_2,s_3|S_I=-1)} = e^{H(-1,-1,-1)} + e^{H(-1,-1,1)} + e^{H(-1,1,-1)} + e^{H(1,-1,-1)} \\ &= e^{2K_1-3K_2} + e^{-K_2} + e^{-2K_1-K_2} + e^{-K_2} \end{aligned} \tag{۱۷}$$

تاکنون $H(S_I = 1)$ و $H(S_I = -1)$ را بدست آورده ایم. حال هامیلتونی $H(S_I = 1)$ را می توانیم به شکل کلی زیر بنویسیم:

$$H(S_I) = e^{K_0' S_I + K_1'} \tag{۱۸}$$

و می توانیم از رابطه های (16) و (17) مقدار ضرایب جدید K_1' و K_2' را بخوانیم، زیرا:

$$\begin{aligned} e^{K'0+K'1} &= e^{2K_1+3K_2} + e^{K_2}(2 + +e^{-2K_1}) \\ e^{-K'0+K'1} &= e^{2K_1-3K_2} + e^{-K_2}(2 + e^{-2K_1}) \end{aligned} \tag{۱۹}$$

و از آنجا:

$$K_0' = \frac{1}{2}\ln(\frac{A}{B}) \qquad K_1' = \frac{1}{2}\ln(AB) \tag{۲۰}$$

که درآن

$$A := \qquad e^{2K_1+3K_2} + e^{K_2}(2 + e^{-2K_1})$$

$$B := \qquad e^{2K_1-3K_2} + e^{-K_2}(2+e^{-2K_1}) \qquad (۲۱)$$

رابطه (18)، نشان می دهد که سیستم اسپینی سه تایی درمقیاس بزرگ تر بایک هامیلتونی موثر توصیف می شود که درآن ثابت های جفتیدگی K_0, K_1, K_2 به ثابت های جفتیدگی K_0', K_1', K_2' تغییر یافته اند. دراینجا ما فرض کرده ایم که ثابت جفتیدگی K_0 درابتدا وجود داشته است ولی مقدار آن صفر بوده است. مثال فوق ساده ترین مثال از بازبهنجارش ضرایب جفتیدگی است. دراین مثال البته بازبهنجارش درهمین مرحله متوقف می شود ولی دریک سیستم اسپینی بی نهایت این عمل می تواند مرتباً تکرارشود. برای یک سیستم کوچک که تنها شامل یک بلوک اسپینی بود ما توانستیم ضرایب جدید را به طوردقیق برحسب ضرایب اولیه بدست آوریم ولی برای سیستم های بزرگ که شامل تعداد بسیارزیاد ویا بی نهایتی از بلوک ها هستند این کار معمولا بطوردقیق انجام پذیر نیست ضمن آنکه اصل روش همانی است که درمثال بالا گفته شد. جزئیات فنی و نحوه انجام بازبهنجارش را برای سیستم های بزرگ اسپینی و یابرای سیستم های پیوسته در مثال های بعدی بیان خواهیم کرد.

۴.۲ مثال چهارم: بلوک های اسپینی در یک سیستم بی نهایت بزرگ

دراین قسمت نشان می دهیم که چگونه بازبهنجارش را دریک سیستم اسپینی باید انجام داد. بازهم یک مدل یک بعدی درنظر می گیریم . مطابق شکل () بلوک های اسپینی سه تایی درنظر می گیریم. ولی باید تاکید کنیم که روش انجام کار کاملاً کلی است و ربطی به مدل خاص یک بعدی یا حتی مدل اسپینی و یا بلوک های سه تایی ندارد. می توان این روش را برای مدل هایی مثل مدل $Potts$ یا برای مدل های دوبعدی و سه بعدی نیز بکار برد. هم چنین لازم نیست بلوک ها حتما مربعی باشد و می توانند هر شکلی داشته باشند. بنابراین خواننده می بایست سعی کند که روش کلی استدلال را به خوبی بفهمد تا بتواند آن را برای مدل های پیچیده تر نیز به کار ببرد. مراحل کار به این ترتیب است:

مرحله یک: نخست نوع بلوک ها را انتخاب می کنیم و برای هر بلوک اسپین معادل بلوک را مطابق با یک قاعده معین تعریف می کنیم. مثلا می توانیم تعریف کنیم که هرگاه اکثریت اسپین ها مثبت باشند اسپین بلوک ها برابر با $+1$ و هرگاه اکثریت آنها منفی باشند اسپین بلوک برابر با -1 است. در حالت کلی این قاعده را به این شکل می نویسیم:

$$S_I = f(s_1, s_2, \cdots s_m)|_{i\in I}. \qquad (۲۲)$$

طبیعی است که تابع f طوری تعریف شده است که اسپین های بلوک ها نیز همان مقادیر گسسته اسپین های قبلی را اختیار کنند. دراین رابطه $i \in I$ نشان دهنده این است که اسپین i متعلق به بلوک I است. سپس هامیلتونی کل شبکه را به دو قسمت تقسیم می کنیم و می نویسیم

$$H = H_0 + V, \tag{۲۳}$$

که در آن H_0 شامل تمامی برهم‌کنش های درون بلوک ها و V

شامل تمام برهم‌کنش های بین بلوک هاست. به عنوان مثال در شکل () برهم‌کنش بین

s_3 و s_4 داخل V و بقیه برهم‌کنش ها درون H_0 هستند.

بنابراین H_0 بلوک های متفاوت را باهم کوپل نمی‌کند و برهم‌کنش بین بلوک ها تنها از طریق V حاصل می شود. اگر V برابر با صفر می بود می توانستیم براحتی هامیلتونی جدید بین اسپین های بلوک ها را بنویسیم. در این صورت هامیلتونی جدید به شکل زیر بدست می آمد:

$$e^{H(S_I,S_{II},\cdots} = \sum_{(\{s_i\}|S_I,\{s_j\}|S_{II},\cdots} e^{H_0} = \sum_{(\{s_i\}|S_I} e^{h_0^I(\{s_i\})} \sum_{(\{s_j\}|S_{II}} e^{h_0^{II}(\{s_j\})} \cdots \tag{۲۴}$$

که در آن h^I هامیلتونی مربوط به بلوک I ام است، با تعریفی مشابه برای h_{II} . از آنجا که این جمع ها از هم جدا شده اند انجام آنها آسان است و می توانیم بنویسیم:

$$e^{H(S_I,S_{II},\cdots)} = \prod_I \sum_{\{s_i\}|S_I} e^{h_0^I(\{s_i\})} = \prod_I e^{h^I(S_I)} = e^{\sum_I h^I(S_I)} \tag{۲۵}$$

به این ترتیب هامیلتونی حاصل که روی بلوک ها تعریف شده است به صورت یک هامیلتونی بدون برهم‌کنش درمی آید که بلوک های متفاوت را باهم جفت نمی‌کند. آنچه که باعث می شود این محاسبه به سادگی بالا نباشد این است که بلوک ها از طریق V باهم دیگر جفت می شوند و می بایست این جفتیدگی را به حساب بیاوریم. این کاری است که تقریبا در همه مدل ها می بایست با روش های تقریبی انجام بدهیم. روش انجام آن در مرحله دوم روشن می شود.

مرحله دوم: حال می خواهیم هامیلتونی را برای متغیرهای بلوک ها یعنی اسپین های جدید بنویسیم. داریم:

$$e^{H(S_I,S_{II},\cdots} = \sum_{(\{s_i\}|S_I,\{s_j\}|S_{II},\cdots} e^{H_0+V} \tag{۲۶}$$

جمله V که بلوک های مختلف را باهم جفت باعث می شود که دیگر نتوانیم جمع را به صورت ساده انجام دهیم. ولی می توانیم این عبارت را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} e^{HS_I,S_{II},\cdots} &= \sum'_{\{s\}|\{S\}} e^{H_0+V} = \frac{\sum'_{\{s\}|\{S\}} e^{H_0+V}}{\sum'_{\{s\}|\{S\}} e^{H_0}} \sum'_{\{s\}|\{S\}} e^{H_0} \\ &= \langle e^V \rangle_0 \sum'_{\{s\}|\{S\}} e^{H_0} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

دراین عبارت منظور از $\langle e^V \rangle_0$ این است که متوسط عبارت e^V با توجه به هامیلتونی H_0 یعنی با وزن e^{H_0} گرفته می شود. حال دقت می کنیم که جمله دوم در طرف راست عبارت بالا همان است که قبلا آن را براحتی محاسبه کردیم و منجر به هامیلتونی بدون برهم کنش بین بلوک ها شد. آنچه که باید محاسبه کنیم عبارت $\langle e^V \rangle_0$ است. اما چون دوست داریم این عبارت را نهایتا به صورت نمای e بنویسیم و از روی آن هامیلتونی بین بلوک ها را بخوانیم نخست از اتحاد زیر استفاده می کنیم که به موجب آن همواره می توان برای هر نوع تابع V و هر نوع توزیع احتمال نوشت:

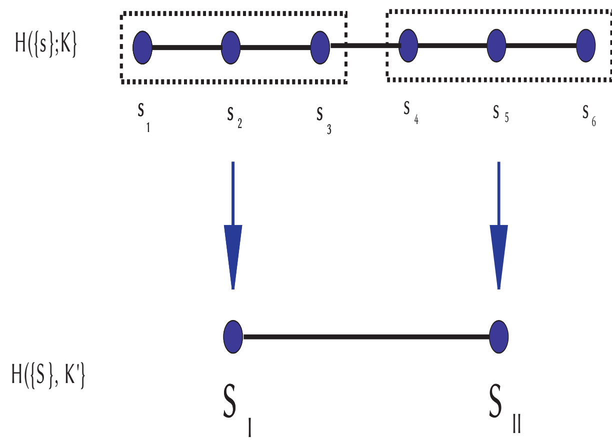
$$\langle e^V \rangle = e^{\langle V \rangle + \frac{1}{2}(\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2) + \cdots}. \quad (۲۸)$$

این بسط به بسط کومولانت $Comulant\ Expansion$ معروف است.

تمرین: جملات تا مرتبه سوم و چهارم از V را در عبارت بالا پیدا کنید.

حال اگر فرض کنیم که سهم برهم کنش های بین بلوک ها نسبت به سهم برهم کنش های درون بلوک ها کوچک است (یعنی V نسبت به H_0 کوچک است) می توانیم محاسبه بالا را تا یک رتبه معین انجام دهیم. مثلا تا رتبه یک فقط احتیاج به محاسبه $\langle V \rangle_0$ داریم و تا رتبه دوم می بایست $\langle V^2 \rangle_0 - \langle V \rangle_0^2$ را نیز محاسبه کنیم . محاسبه این جملات کاری است که به طور دقیق امکان پذیراست. بنابراین روش بازبهنجارش را می توان رتبه به رتبه انجام داد و دقت آن منوط به کوچکی جملات برهم کنش بین بلوک ها در مقایسه با برهم کنش درون بلوک هاست. طبیعی است که هرچه که بلوک ها را بزرگ تر بگیریم این روش دقیق تر می شود. در ادامه این کار را برای یک سیستم ساده یک بعدی در رتبه یک انجام می دهیم.

مثال: سیستم نشان داده شده در شکل () را در نظر بگیرید:



شکل ۴: وقتی که در یک سیستم بزرگ بلوک های اسپینی را در نظر می‌گیریم برهم‌کنش ها را می بایست به دو نوع تقسیم‌کنیم، یکی برهم‌کنش های درون بلوک ها و دیگری برهم‌کنش های بین بلوک ها..

برای سادگی فرض می‌کنیم که میدان مغناطیسی صفر است . بنابراین هامیلتونی مدل عبارت است از:

$$H = K_1 \sum_{i,j}' s_i s_j \qquad (۲۹)$$

از روی شکل می توان جملات H_0 و V را براحتی تشخیص داد. نخست می بایست جمع روی اسپین های درون هر بلوک را با هامیلتونی درون بلوک انجام دهیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که:

$$e^{h^I(S_I)} = \sum_{\{s_1,s_2,s_3\}|S_I} e^{K_1(s_1s_2+s_2s_3)} = e^{K_0'+K_1'S_I} \qquad (۳۰)$$

تمرین: نشان دهید که

$$K_0' = 0 \qquad K_1' = \ln(e^{2K_1} + 2 + e^{-2K_1}) \qquad (۳۱)$$

حال می توانیم برهم‌کنش بین بلوک هارا رتبه به رتبه بدست بیاوریم. از آنجا که برهم‌کنش درلبه های بلوک ها رخ می دهد می توان دریافت که جمله $\frac{1}{2}(\langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2)$ از جمله $\langle V\rangle$ کوچکتراست و جملات بعدی نیز از جمله دوم کوچکترهستند والی آخر. بنابراین می توان به این بسط

به عنوان یک بسط اختلالی نگاه کرد.

حال $\langle V\rangle_0$ را حساب می کنیم.

می دانیم که

$$V = V_{I,II} + V_{II,III} + \cdots \quad (۳۲)$$

که در آن $V_{I,II}$ برهم کنش بین بلوک های I و II است و الی آخر. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle V\rangle_0 = \langle V_{I,II}\rangle_0 + \langle V_{II,III}\rangle_0 + \cdots \quad (۳۳)$$

کافی است که جمله $\langle V_{I,II}\rangle_0$ یعنی برهم کنش بین بلوک های I و II را حساب کنیم زیراجملات دیگر کاملاً شبیه به همین جمله هستند. داریم :

$$\langle V_{I,II}\rangle_0(S_I, S_{II}) = K_1\langle s_3 s_4\rangle_0 = K_1\langle s_3\rangle_0\langle s_4\rangle_0 \quad (۳۴)$$

که درتساوی آخر از این استفاده کرده ایم که تابع وزن e^{H_0} به صورت حاصلضرب توابع وزن روی دو بلوک تجزیه می شود. بنابراین کافی است که دو کمیت $\langle s_3\rangle_0$ و $\langle s_4\rangle_0$ را حساب کنیم.

بعلت تقارن چپ وراست ای که درهامیلتونی اولیه وجود دارد نیز می دانیم که $\langle s_3\rangle_0$ شبیه $\langle s_4\rangle_0$ است. بنابراین فقط یکی از این دو را می بایست حساب کنیم . بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\langle s_3\rangle_0(S_I = 1) &= \frac{\sum_{\{s_1,s_2,s_3\}|S_I=1} s_3 e^{K_1(s_1s_2+s_2s_3)}}{\sum_{\{s_1,s_2,s_3\}|S_I=1} e^{K_1(s_1s_2+s_2s_3)}}\\ &= \frac{e^{2K_1} + e^{-2K_1}}{e^{2K_1} + 2 + e^{-2K_1})}\end{aligned} \quad (۳۵)$$

و

$$\begin{aligned}\langle s_3\rangle_0(S_I = -1) &= \frac{\sum_{\{s_1,s_2,s_3\}|S_I=-1} s_3 e^{K_1(s_1s_2+s_2s_3)+K_2(s_1+s_2+s_3)}}{\sum_{\{s_1,s_2,s_3\}|S_I=-1} e^{K_1(s_1s_2+s_2s_3)+K_2(s_1+s_2+s_3)}}\\ &= \frac{-e^{2K_1} - e^{-2K_1}}{e^{2K_1} + 2 + e^{-2K_1})}\end{aligned} \quad (۳۶)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$\langle s_3\rangle_0 = \frac{e^{2K_1}+e^{-2K_1}}{e^{2K_1}+2+e^{-2K_1})}S_I \tag{۳۷}$$

و از آنجا

$$\langle s_3 s_4\rangle_0 = \left(\frac{e^{2K_1}+e^{-2K_1}}{e^{2K_1}+2+e^{-2K_1})}\right)^2 S_I S_J \tag{۳۸}$$

باکنار هم‌گذاشتن این نتایج به این نتیجه می رسیم که تااین رتبه هامیلتونی بازبهنجارش شده عبارت است از:

$$H(\{S\}) = const + K_1\left(\frac{e^{2K_1}+e^{-2K_1}}{e^{2K_1}+2+e^{-2K_1})}\right)^2 S_I S_J \tag{۳۹}$$

که به این معناست که دراین رتبه هامیلتونی مدل آیزینگ از نظر شکل تغییر نکرده است و تنها ضریب جفتیدگی آن به صورت زیر بازبهنجارشده است :

$$K_1 \longrightarrow K_1' = K_1\left(\frac{e^{2K_1}+e^{-2K_1}}{e^{2K_1}+2+e^{-2K_1})}\right)^2 \tag{۴۰}$$

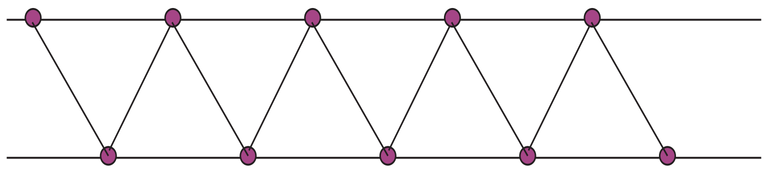
این‌که شکل هامیلتونی عوض نشده است و برهم‌کنش های جدید وارد نشده است تنها مربوط به تقریب رتبه یک است. درمرتبه های بالاتر برهم کنش های جدید بین اسپین های دورتراز نزدیک ترین همسایه هانیز ایجاد می شود. آنچه‌که برای این مثال یک بعدی شرح دادیم بدون تغییرعمده برای مدل آیزینگ دو بعدی و سه بعدی وهرمدل‌گسسته دیگری نیز بکار می رود.

تمرین: در مثال قبلی بلوک ها را پنج تایی در نظر بگیرید و بازبهنجارش را تا رتبه یک تکرارکنید.

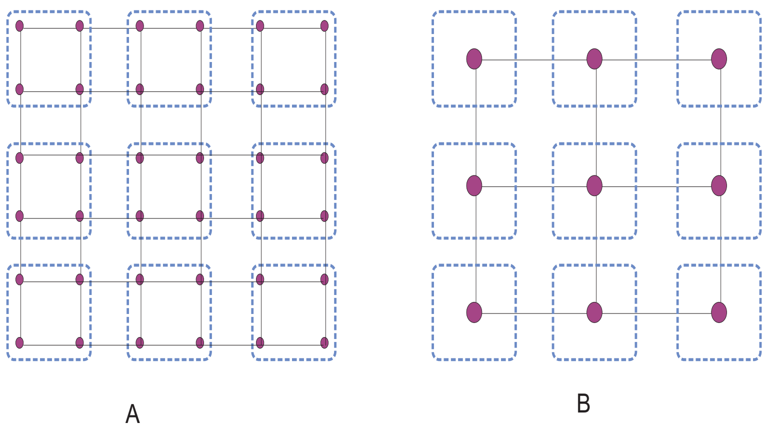
تمرین: در مثال قبلی، یعنی مثالی‌که بلوک های سه تایی داشت، باز بهنجارش را تا رتبه ۲ انجام دهید.

تمرین: شکل () یک مدل آیزینگ را روی یک شبکه نردبانی مثلثی نشان می دهد. فرض‌کنیدکه میدان مغناطیسی هم وجود دارد. بلوک ها را به صورت نشان داده شده در شکل در نظر بگیرید. شبکه جدید یک شبکه یک بعدی خواهد بود. تا رتبه یک بر حسب V هامیلتونی روی شبکه جدید را بدست آورید:

تمرین: شکل () یک مدل آیزینگ روی یک شبکه مربعی را نشان می دهد. فرض‌کنیدکه میدان مغناطیسی هم وجود دارد. بلوک ها را به صورت نشان داده شده در نظر بگیرید و هامیلتونی روی شبکه جدید را تا رتبه یک بر حسب V بدست آورید. از آنجاکه تعداد اسپین های درون



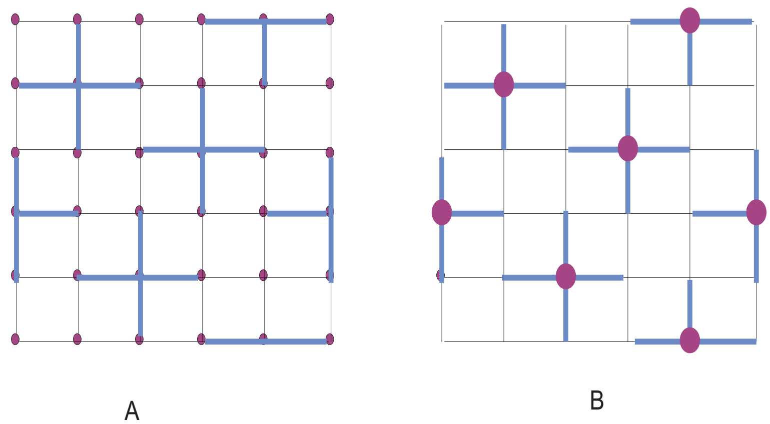
شکل ۵: شکل مربوط به تمرین بازبهنجارش در یک نردبان اسپینی. .



شکل ۶: بلوک های اسپینی کادانف در یک شبکه دو بعدی. هر بلوک شامل چهار اسپین است. .

هر بلوک زوج است از قاعده اکثریت نمی توان برای تعریف اسپین های بلوک استفاده کرد ولی می توانید برای تعریف اسپین هر بلوک یک روش اختیاری به کار ببرید.در واقع ۶ هیئت اسپینی در هر بلوک وجود دارد که در آن ها تعداد اسپین های مثبت و منفی باهم برابرند می توانید برای نیمی از این هیئت ها اسپین بلوک را برابر با 1 و برای نیمی دیگر اسپین بلوک را برابر با -1 بگیرید. البته بهتراست که انتخاب شما از لحاظ هندسی متقارن باشد.

تمرین: شکل () یک مدل آیزینگ روی یک شبکه مربعی را نشان می دهد. فرض کنید که میدان مغناطیسی هم وجود دارد. بلوک ها را به صورت نشان داده شده در نظر بگیرید و هامیلتونی روی شبکه جدید را تا رتبه یک بر حسب V بدست آورید. دقت کنید که هر بلوک تعداد پنج تا اسپین دارد و هر اسپین شبکه اصلی در یکی از بلوک ها جای می گیرد.



شکل ۷: بلوک های اسپینی کادانف در یک شبکه دو بعدی. هر بلوک شامل یک ستاره پنج اسپینی است و هر اسپین حتما دریک ستاره قرار گرفته است. .

۳ تبدیلات بازبهنجارش در یک شبکه دو بعدی

در این بخش یک روش برای تبدیل بازبهنجارش برای شبکه دوبعدی مثلثی را شرح می دهیم. شبکه مثلثی این خوبی را دارد که می توان بلوک ها را سه تایی در نظرگرفت و بدون از بین بردن تقارن Z_2 موجود در سیستم آیزینگ بازبهنجارش را انجام داد. شبکه مثلثی و بلوک ها در شکل () نشان داده شده اند. در هر بلوک سه اسپین وجود داردکه آنها را برای نمونه با s_1, s_2, s_3 نشان می دهیم. اسپین یک بلوک را با S_I نشان می دهیم. اسپین بلوک را برابر با یک قرار می دهیم هرگاه که اکثریت اسپین های درون بلوک مثبت باشند . به همین ترتیب اسپین یک بلوک را برابر با منهای یک قرار می دهیم هرگاه که اکثریت اسپین های درون یک بلوک منفی باشند. به زبان دیگر می توان نوشت:

$$S_I = 1, \qquad (s_1, s_2, s_3) \in \{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)\} =: A_1, \tag{۴۱}$$

و

$$S_I = -1 \qquad (s_1, s_2, s_3) \in \{(-1,-1,-1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1)\} =: A_{-1}. \tag{۴۲}$$

به زبان فشرده تر می توان نوشت:

$$S_I = sign(s_1 + s_2 + s_3). \tag{۴۳}$$

که در آن $sign(x)$ تابع علامت است که به این ترتیب تعریف می شود که برابر با یک است وقتی که آرگومان اش مثبت باشد و برابر با منهای یک است وقتی که آرگومانش منفی باشد. مطابق با آنچه که در بخش های قبلی گفتیم دراینجا نیز هامیلتونی را به دوبخش H_0 و V تقسیم می کنیم که در آن H_0 شامل برهم کنش های درون بلوک ها و V شامل برهم کنش های بین بلوک هاست. در ادامه بازبهنجارش را برای دو حالت جداگانه انجام می دهیم.

۱.۳ حالت اول: میدان مغناطیسی صفر است.

نخست توجه خود را به برهم کنش های درون بلوک ها معطوف می کنیم. بنابر تقارن و یکسان بودن همه بلوک ها با هم داریم :

$$e^{H'_0\{S_I\}} = e^{\sum_I h'_0(S_I)} \tag{۴۴}$$

که درآن

$$e^{h'_0(S_I)} = \sum_{s_1,s_2,s_3} \delta(S_I, sign(s_1+s_2+s_3))e^{h_0(s_1,s_2,s_3)} = \sum_{s_1,s_2,s_3} \delta(S_I, sign(s_1+s_2+s_3))e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)} \tag{۴۵}$$

بنابراین خواهیم داشت:

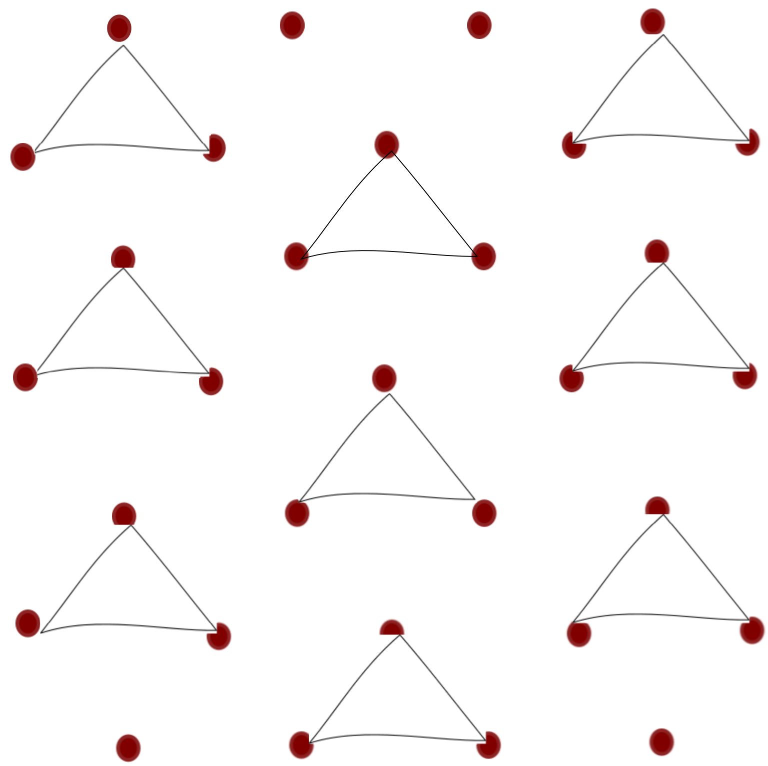
$$e^{h'_0(S_I=1)} = \sum_{(s_1,s_2,s_3)\in A_1} e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)} = e^{3K} + 3e^{-K}. \tag{۴۶}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$e^{h'_0(S_I=-1)} = \sum_{(s_1,s_2,s_3)\in A_{-1}} e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)} = e^{3K} + 3e^{-K}. \tag{۴۷}$$

به این ترتیب می فهمیم که h'_0 یک مقدار ثابت است و بستگی به اسپین S_I ندارد. این موضوع را البته از ابتدا هم می توانستیم بفهمیم. دلیل اش هم این است که اگر به رابطه ۴۵ نگاه کنیم متوجه می شویم که طرف راست این عبارت نسبت به تبدیل $S_I \longrightarrow -S_I$ متقارن است و بنابراین طرف چپ هم می بایست دارای این خاصیت باشد. اما تابعی که تنها به یک متغیر S_I بستگی داشته باشد و بخواهد تابع زوج باشد چیزی جز یک تابع ثابت نیست. حال به سراغ V می رویم . در رتبه اول می دانیم که $\langle e^V\rangle_0 = e^{\langle V\rangle_0}$ و بنابراین کافی است که $\langle V\rangle_0$ را حساب کنیم. از آنجا که این پتانسیل تنها بلوک ها را دو به دو به هم کوپل می کند داریم

$$\langle V\rangle_0 = \sum_{I,J} \langle V\rangle_0(S_I, S_J) \tag{۴۸}$$



شکل ۸: بلوک های اسپینی در یک شبکه دوبعدی مثلثی . . .

که درآن مطابق با شکل ()

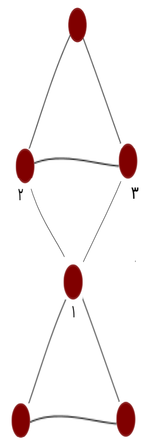
$$\langle V\rangle_0(S_I,S_J)=\langle s_1s_2+s_1s_3\rangle_0. \qquad (۴۹)$$

حال دقت می‌کنیم که هر دو جمله بالا با هم مساوی هستند. ضمنا دقت می‌کنیم که از آنجا که تابع احتمالی که با H_0 ساخته می شود بلوک های مختلف را به هم کوپل نمی‌کند پس می توانیم بنویسیم:

$$\langle V\rangle_0(S_I,S_J)=2\langle s_1s_2\rangle_0=2\langle s_1\rangle_0(S_I)\langle s_2\rangle_0(S_J). \qquad (۵۰)$$

از آنجا که دو جمله آخر نیز بنابر تقارن شکل هر بلوک با هم مساوی هستند پس فقط کافی است که یکی از متوسط ها را حساب کنیم. داریم

$$\langle s_1\rangle_0(S_I)=\sum_{s_1,s_2,s_3}\delta(S_I,s_1+s_2+s_3)s_1e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)}. \qquad (۵۱)$$



شکل ۹: برهم‌کنش های بین دو بلوک در شبکه مثلثی

بنابراین بدست می آوریم

$$\langle s_1\rangle_0(S_I=1)=\frac{1}{e^{3K}+3e^{-K}}\sum_{(s_1,s_2,s_3)\in A_1}s_1e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)}=\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}}. \quad (۵۲)$$

به همین ترتیب بدست می آوریم

$$\langle s_1\rangle_0(S_I=-1)=\frac{1}{e^{3K}+3e^{-K}}\sum_{(s_1,s_2,s_3)\in A_{-1}}s_1e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)}=-\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}}. \quad (۵۳)$$

با کنار هم قرار دادن دو رابطه اخیر بدست می آوریم

$$\langle s_1\rangle_0(S_I)=\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}}S_I \quad (۵۴)$$

و در نتیجه با جایگزینی در رابطه ۴۸

$$\langle V\rangle_0=\sum_{I,J}2K(\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}})^2S_IS_J \quad (۵۵)$$

به این ترتیب می فهمیم که در رتبه اول بازهنجارش داریم

$$Z=\sum_{\{S_I\}}(e^{3K}+3e^{-K})^{\frac{N}{3}}e^{\sum_{\langle I,J\rangle}K'S_IS_J}=\sum_{\{S_I\}}e^{\frac{N}{3}\ln(e^{3K}+3e^{-K})+\sum_{\langle I,J\rangle}K'S_IS_J} \quad (۵۶)$$

که در آن

$$K' = 2K(\frac{e^{3K}+e^{-K}}{e^{3K}+3e^{-K}})^2 \quad (۵۷)$$

نقطه ثابت این تبدیلات را می توان با تعریف $x := e^{4k}$ بدست آورد. خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{x+1}{x+3}, \qquad \longrightarrow \qquad x = 1+2\sqrt{2} \approx 2.83. \quad (۵۸)$$

۴ حالت دوم: میدان مغناطیسی غیر صفر است.

دراین حالت هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} K s_i s_j + \tilde{K} \sum_i s_i, \quad (۵۹)$$

که در آن $\tilde{K}$ نشان دهنده میدان مغناطیسی یا $\frac{B}{kT}$ است. تبدیلات بازبهنجارش در این حالت نشان می دهد که هر دو ثابت جفتیدگی چگونه تغییر می‌کنند، یعنی روابط بازبهنجارش به شکل زیر در می آیند:

$$K' = f_1(K, \tilde{K}),$$
$$\tilde{K}' = f_2(K, \tilde{K}), \quad (۶۰)$$

که در آن f_1 و f_2 توابع عموما غیرخطی هستند. دقت کنید که وقتی میدان مغناطیسی صفر است هامیلتونی دارای تقارن Z_2 است و وجود میدان مغناطیسی یعنی جمله $\tilde{K}$ این تقارن را از بین می برد. تبدیلات بازبهنجارش ما دارای تقارن Z_2 است به این معنا که اگر تمام s_i های درون یک بلوک را به $-s_i$ تبدیل کنیم، اسپین بلوک یعنی S_I نیز به $-S_I$ تبدیل می شود. بنابراین انتظار داریم که این معادلات شرایط زیر را بر آورده کنند:

$$f_1(K, -\tilde{K}) = f_1(K, \tilde{K}),$$
$$f_2(K, -\tilde{K}) = -f_2(K, \tilde{K}). \quad (۶۱)$$

حال به نظر می رسد که می بایست از ابتدا معادلات بازبهنجارش را بدست آوریم . ولی یادآوری یک نکته به ما کمک می کند که از محاسبات سنگین رها شویم و آن این که ما می دانیم که نقطه بحرانی جایی است که میدان مغناطیسی برابر با صفر است. در نتیجه از آنجا که نهایتا نیز می خواهیم این روابط را در نزدیکی نقطه بحرانی خطی کنیم، کافی است که در رابطه اول $\tilde{K}_1$ را برابر با صفر قرار دهیم. این کار به این معناست که

همان رابطه قبلی یعنی رابطه (۵۷) را می توانیم در این حالت نیز برای بازبهنجارش ثابت جفتیدگی K به‌کار ببریم و تنها کاری که باید بکنیم این است که نحوه بازبهنجارش ثابت جفتیدگی $\tilde{K}$ را پیدا کنیم. اما این کار ساده است زیرا جملات شامل میدان مغناطیسی در درون H_0 است یعنی بلوک ها را به یکدیگر جفت نمی‌کند. بنابراین می نویسیم:

$$e^{h'_0(S_I=1)} = \sum_{(s_1,s_2,s_3)\in A_1} e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)+\tilde{K}(s_1+s_2+s_3)} = e^{3K+3\tilde{K}} + 3e^{-K+\tilde{K}}. \quad (۶۲)$$

و

$$e^{h'_0(S_I=-1)} = \sum_{(s_1,s_2,s_3)\in A_{-1}} e^{K(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)+\tilde{K}(s_1+s_2+s_3)} = e^{3K-3\tilde{K}} + 3e^{-K-\tilde{K}}. \quad (۶۳)$$

کلی ترین شکلی که برای $h'_0(S_I)$ می توانیم بنویسیم یک تابع خطی ساده به صورت $A + \tilde{K}'S_I$ است. با توجه به این فرم و تقسیم دو عبارت قبلی بر هم بدست می آوریم:

$$e^{2\tilde{K}'} = \frac{e^{3K+3\tilde{K}} + 3e^{-K+\tilde{K}}}{e^{3K-3\tilde{K}} + 3e^{-K-\tilde{K}}} \quad (۶۴)$$

و یا

$$\tilde{K}' = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{3K+3\tilde{K}} + 3e^{-K+\tilde{K}}}{e^{3K-3\tilde{K}} + 3e^{-K-\tilde{K}}}. \quad (۶۵)$$

حال می خواهیم $\frac{dK'}{dK}|_{K=K_c,\tilde{K}=0}$ را حساب کنیم.

تمرین: ثابت کنید که این مقدار برابراست با $\frac{3}{\sqrt{2}}$.