گروه بازبهنجارش:قسمت سوم

وحید کریمی پور، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۲۳ آذر ۱۳۹۲

۱ مقدمه

حال که یادگرفتیم چگونه بازبهنجارش را در سیستم های اسپینی یا سیستم های پیوسته انجام بدهیم نوبت به آن رسیده است که ببینیم چگونه از این بازبهنجارش می توانیم استفاده کنیم. نهایتا باید بتوانیم با استفاده از بازبهنجارش هم معنا و دلیل عمومیت را بفهمیم و هم به یک روش معین برای محاسبه رفتار بحرانی سیستم ها دست پیدا کنیم . این روش می بایست همراه با روش اختلال ما را قادر سازد که نماهای بحرانی را رتبه به رتبه و با دقت بیشتر بدست آوریم. برای یادگرفتن این موضوع مثال بسیار ساده ای که را که در همان ابتدا شرح دادیم ، یعنی مدل آیزینگ یک بعدی را بدون میدان مغناطیسی دوباره نگاه می کنیم.

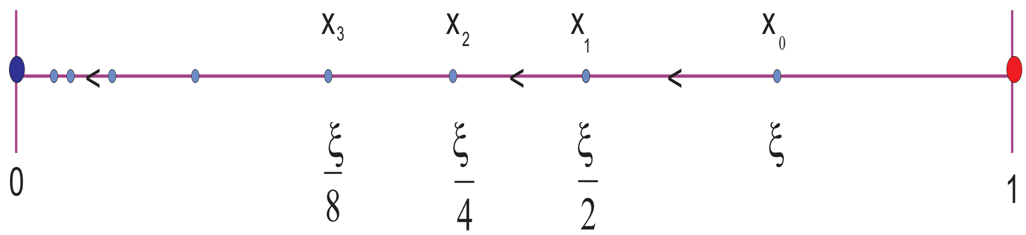
مثال اول: در مدل یک بعدی آیزینگ بدون میدان مغناطیسی دیدیم که در اثر بازبهنجارش طول همبستگی و ضریب جفتیدگی تغییر می کنند. در واقع اگر ضریب جفتیدگی و طول همبستگی را در مرحله n ام به ترتیب با J_n و ξ_n نشان دهیم آنگاه :

$$\tanh J_{n+1} = (\tanh J_n)^2, \qquad \xi_{n+1} = \frac{\xi_n}{2}. \tag{۱}$$

از این معادلات می توانیم مطالب بسیاری از جمله ایده اساسی چگونگی استفاده از معادلات بازبهنجارش را می توانیم یاد بگیریم. نخست برای سادگی، پارامتر x_n را به صورت $x_n := tanh J_n$ معرفی می کنیم: در نتیجه معادله فوق به صورت زیر نوشته می شود:

$$x_{n+1} = x_n^2. \tag{۲}$$

با توجه به تعریف x_n واضح است که $0 \le x_n \le 1$. معادله فوق یک شار یا $Flow$ تعریف می کند که بر مبنای آن با شروع از یک x_0 رشته

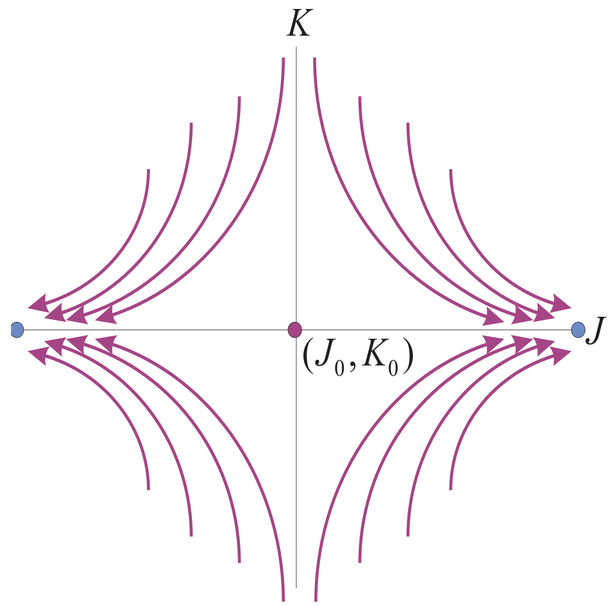


شکل ۱: شار بازبهنجارش برای یک سیستم که فقط یک ضریب جفتیدگی دارد. .

ای از x ها بدست می آید. این رشته از x ها که در واقع نشان دهنده ضرایب جفتیدگی متوالی هستند در شکل زیر نشان داده شده اند. از این شکل مطالب بسیار زیادی می توان آموخت. نخست اینکه این شار دو نقطه ثابت یا $Fixed\ Point$ دارد یکی $x=0$ و دیگری $x=1$. اما ماهیت این دو نقطه ثابت باهم متفاوت است. $x=1$ یک نقطه ثابت دافع و $x=0$ یک نقطه ثابت جاذب است، به این معنا که اگر کمی از نقطه $x=1$ دور شویم این انحراف در اثر تکرار بکلی ما را از این نقطه ثابت دور می کند و حال آنکه اگر کمی از نقطه $x=0$ دور شویم بازهم به آن بازمی گردیم. هم چنین اگر به تعریف $x=\tanh J \equiv \tanh \frac{J}{kT}$ توجه کنیم متوجه می شویم که $x=0$ نشان دهنده یک نقطه با دمای بی نهایت و $x=1$ نشان دهنده یک نقطه با دمای صفر است. می دانیم که در دمای بی نهایت سیستم آیزینگ کاملا بی نظم و در دمای صفر سیستم کاملا منظم است. بنابراین نقطه ثابت $x=0$ نشان دهنده یک فاز بی نظم و نقطه $x=1$ نشان دهنده یک فاز منظم است. آنچه که در شکل () می بینیم رشته ای از سیستم های آیزینگ است که همگی رفتار بلند بردشان با هم یکسان است. سیستم با ضریب جفتیدگی x_0 دقیقا همان سیستم با ضریب جفتیدگی x_1 است و تمامی این سیستم ها رفتارشان در مقیاس های بزرگ مثل سیستمی است که در دمای بی نهایت قرارگرفته است و هیچ گونه نظمی ندارد. به این ترتیب می فهمیم که مدل آیزنیگ یک بعدی نمی تواند نظم مغناطیسی داشته باشد. این همان چیزی است که قبلا به روش های گوناگون دیده ایم. به این ترتیب ما توانسته ایم در ساده ترین سیستم شار ساده بازبهنجارش را بدست آورده و از روی آن در مورد فازهای سیستم قضاوت کنیم.

یک بار دیگر این قضاوت را خلاصه می کنیم. سیستم آیزینگ یک بعدی دارای دو فاز است یکی فاز منظم (نقطه ثابت $x=1$) و دیگری فاز نامنظم (نقطه ثابت $x=0$) ، ولی فاز منظم آن پایدار نیست و به مجرد کوچکترین اختلالی در هم می ریزد و حال انکه فاز نامنظم آن پایدار است.

اگر بنا بر فرض شار بازبهنجارش به شکل ؟؟ می شد، آنگاه نتیجه کاملا متفاوتی می گرفتیم. در این شار فرضی سه نقطه ثابت وجود دارد که دوتای آنها یعنی نقاط ثابت $x=0$ و $x=1$ نقاط ثابت پایدار هستند و دیگری یعنی x_0 نقطه ثابت ناپایدار است. نقاط ثابت پایدار نشان



شکل ۲: شار بازبهنجارش برای سیستمی که دو ضریب جفتیدگی دارد.

دهنده دو فاز سیستم هستند و نقطه ثابت ناپایدار نشان دهنده یک نقطه‌گذار فاز است. به عبارت دیگر نقطه $x = 0$ نشان دهنده فاز نامنظم است که در آن ثابت جفتیدگی بین اسپین ها به سمت صفر میل کرده است و اسپین ها از هم مستقل هستند . (یک راه دیگر گفتن این حرف این است که بگوییم دمای سیستم بی نهایت است). نقطه $x = 1$ نشان دهنده فاز منظم است که در آن ثابت جفتیدگی بین اسپین ها به سمت بی نهایت میل کرده و همه اسپین ها در یک جهت منظم شده اند. (یک راه دیگر گفتن این حرف این است که بگوییم دمای سیستم صفر است). نقطه $x = 0$ نشان دهنده یک نقطه‌گذار فاز است به این معنا که اگر ثابت جفتیدگی اندکی از x_0 بیشتر باشد (یا دما اندکی از T_0 کمتر باشد) سیستم به سمت فاز منظم می رود و اگر ثابت جفتیدگی اندکی از x_0 کمتر باشد (یا دما اندکی از T_0 بیشتر باشد) سیستم به سمت فاز بی نظم می رود. بنابراین این سیستم یک گذار فاز در دمای محدود از خود نشان می دهد.

حالت فرضی دیگری را در نظر بگیرید که سیستمی با دو تا ثابت جفتیدگی که آنها را J و K می نامیم دارای شار بهنجارشی به صورت نشان داده شده در شکل ۱ است.

در شکل می بینیم که شار به طرف دو نقطه ثابت پیش می رود، که با دو دایره آبی رنگ در دو انتهای محور افقی نشان داده شده اند. این دو نقطه ثابت که همه شار را به خود جذب می‌کنند نشان دهنده دو فاز مختلف سیستم هستند. اینکه شار به طرف کدام نقطه ثابت، یعنی کدام فاز می

رود بستگی به مقدار J اولیه دارد. اگر $J > J_0$ باشد شار به سمت نقطه ثابت راست و اگر $J < J_0$ باشد، شار به سمت نقطه ثابت سمت چپ می رود. ضریب جفتیدگی K در تعیین فاز نقشی ندارد . این ضریب را یک ضریب جفتیدگی نا مربوط $Irrelevant$ می خوانیم.

مثال دوم: مدل دوبعدی آیزینگ: در روش میگدال–کادانف برای بازبهنجارش در سیستم دوبعدی آیزینگ به روابط زیر رسیدیم:

$$J_x^{(n+1)} = 2\tanh^{-1}[\tanh J_x^{(n)})^2] \qquad J^{(n+1)}{}_y = \tanh^{-1}[\tanh(2J_y^{(n)})^2], \tag{۳}$$

تمرین: نشان دهیدکه اگر قرار دهیم

$$x_n := \tanh J_x^{(n)}, \qquad y_n := \tanh J_y^{(n)}, \tag{۴}$$

آنگاه معادلات بازبهنجارش ۳ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2}{1-x_n^4}, \qquad y_{n+1} = \frac{4y_n^2}{(1-y_n^2)^2}. \tag{۵}$$

به این ترتیب این معادلات شار بهنجارش یا $RG\ Flow$ را برای مدل آیزینگ دو بعدی وقتی‌که روش میگدال – کادانف را به‌کار می بریم نشان می دهند. این معادلات یک کیفیت کاملا متفاوت با شاربهنجارش در مدل یک بعدی دارند و آن اینکه دو نقطه ثابت دارند. این دو نقطه ثابت را می توان به روش عددی و با کمک گرفتن از نرم آفزارهایی مثل $Maple$ یا $Mathematica$ پیداکرد. این نقاط ثابت اینها هستند:

$$p_0 := (0,0), \qquad p_1 := (0.4746, 0.2253). \tag{۶}$$

دقت کنیدکه در یافتن نقاط ثابت بالا به این نکته توجه‌کرده ایم‌که x_n و y_n اعداد مثبتی هستند. می توانیم شار بهنجارش را نیز رسم‌کنیم. این شار در شکل ؟؟ نشان داده شده است.

۲ شار بازبهنجارش

برای ادامه بحث و فهم اینکه از عمل بازبهنجارش چه چیزی یادخواهیم‌گرفت می توانیم بازبهنجارش را به طورکلی به صورت زیر تصورکنیم. فرض‌کنیم‌که یک دستگاه اسپینی درd بعد به صورت زیر داریم :

$$H = K_0 + K_1 \sum_{i,j} s_i s_j + K_2 \sum_{i,j,k} s_i s_j s_k + K_3 \sum_{i,j,k,l} s_i s_j s_k s_l + \cdots \qquad (۷)$$

دراین هامیلتونی کلیه ضرایب جفتیدگی قابل تصور راگنجانده ایم البته درنقطه شروع بسیاری از آنها می توانند صفر باشند. بنابراین این هامیلتونی با یک نقطهٔ $\mathbf{K} := (K_0, K_1, K_2, K_3, \cdots)$ از یک فضای بی نهایت بعدی مشخص می شود. هرگاه اندازه بلوک های خود را برای بازبهنجارش برابر با s بگیریم و عمل بازبهنجارش را انجام دهیم ضرایب جفتیدگی جدیدی بدست می آوریم که بانقطه جدیدی مثل $\mathbf{K}' := (K'_0, K'_1, K'_2, K'_3, \cdots)$ مشخص می شوند. می توانیم رابطه ضرایب را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{K}' = f_s(\mathbf{K}). \qquad (۸)$$

به دونکته باید دقت کرد: نکته اول : دمای T دیگر به عنوان یک ثابت $\frac{1}{kT}$ درجلو هامیلتونی جدید وجود ندارد و بدلیل فرم پیچیدهٔ روابط بازبهنجارش که نمونه ای ازآن درمعادله (؟؟) دیده می شود ثابت های جدید توابع پیچیده ای از دما هستند.
نکته دوم : ضرایب جفتیدگی $\mathbf{K}$ ، $\mathbf{K}'$ سیستم های اسپینی مختلفی را توصیف می کنند که رفتار بزرگ مقیاس آنها (بزرگ تر از مقیاس طولی s) یکسان ولی رفتارکوچک مقیاس آنها (کوچکتر از مقیاس طولی s) متفاوت است.
مسلم است که شکل تابع f_s را تنها پس از انجام بازبهنجارش برای مدل های معین می توانیم بدست بیاوریم ولی مستقل از هرنوع مدلی می توانیم یک خاصیت خیلی مهم از این توابع را بدست بیاوریم. فرض کنید که پس از یک بار بازبهنجارش با طول بلوک s ، طول بلوک های خود را s' بگیریم و عمل بازبهنجار ش را انجام دهیم . دراین صورت خواهیم داشت :

$$\mathbf{K}" = f_{s'}(\mathbf{K}'), \qquad \mathbf{K}' = f_s(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}" = f_{s'}(f_s(\mathbf{K})) \qquad (۹)$$

اما باتوجه به اینکه روش بازبهنجارش خود را عوض نکرده ایم و باتوجه به اینکه تمام کوپلاژ های ممکن را درتوصیف هامیلتونی درنظرگرفته ایم مثل آنست که از اول طول بلوک های خود را $s's$ گرفته ایم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{K}" = f_{s's}(\mathbf{K}) \qquad (۱۰)$$

بنابراین تابع f_s دارای خاصیت زیراست :

$$f_s(f_{s'}(\mathbf{K})) = f_{s's}(\mathbf{K}) \qquad (۱۱)$$

از این خاصیت بعدها یک استفاده خیلی مهم خواهیم‌کرد.

حال به معادله بازبهنجارش (8) بازمی‌گردیم. باتکرار عمل بازبهنجارش ضرایب جفتیدگی طبق این معادله تغییر خواهدکرد. هرگاه از نقطه $\mathbf{K}$ شروع‌کنیم و حاصل بازبهنجارش را بعداز n بار باز بهنجارش با $\mathbf{K}^{(n)}$ نشان دهیم آنگاه :

$$\mathbf{K}^{(n)} = f_s(\mathbf{K}_{n-1}) \qquad (۱۲)$$

این معادله نشان دهنده یک شار درفضای ضرایب جفتیدگی است. این شاررا شار بازبهنجارش می نامند.

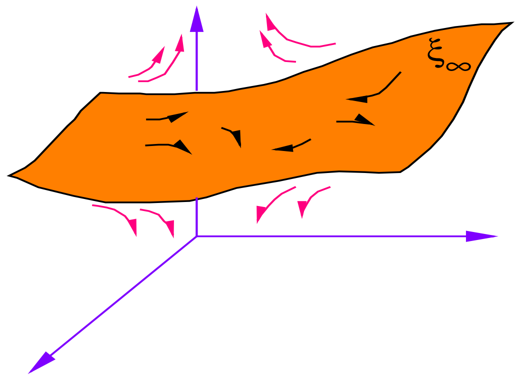
حال دقت می‌کنیم‌که با هرباربازبهنجارش طول همبستگی ξ تبدیل به $\frac{\xi}{s}$ می شود (شکل ؟؟). از این حرف دو نتیجه‌گرفته می شود.

۱ – اگر سیستم اسپینی با ضرایب جفتیدگی $\mathbf{K}$ درنزدیکی نقطه بحرانی خود باشد

سیستم اسپینی با ضرایب جفتیدگی باز بهنجارشدهٔ $\mathbf{K}'$ از نقطه بحرانی‌کمی دورتر است.

۲ – اگر سیستم اول درنقطه بحرانی باشد به این معنا که طول همبستگی آن بی نهایت باشد سیستم دوم نیز درنقطه بحرانی است زیرا طول همبستگی آن نیز بی نهایت خواهد بود.

حال درفضای توابع همبستگی می توانیم بپرسیم سیستم هایی‌که درنقطه بحرانی اندکدامند. این سیستم ها دارای چنان ضرایب جفتیدگی ای هستندکه برای آنها ξ به عنوان تابعی از ضرایب جفتیدگی بی نهایت است. مجموعه این نقاط (درفضای ضرایب جفتیدگی) یک ابر رویه تعریف می‌کنندکه به آن ابررویه بحرانی می‌گویند. برای همه نقاط روی این ابررویه ξ بی نهایت است. با توجه به نتایج یک و دوکه دربالا به آن اشاره شد می فهمیم‌که عمل بازبهنجارش نقاط داخل این ابررویه را به داخل این ابررویه می نگارد و نقاطی راکه روی این ابررویه نیستند از آن دورمی کند. این رفتار در شکل (2) نشان داده شده است.



شکل ۳: شار بازبهنجارش در یک سیستم کلی.

۳ نقطه ثابت

بنابرنتیجه ۲ که دربالا به آن اشاره شد شار بازبهنجارش نقاط روی ابررویه بحرانی را به همان رویه می نگارد. تمام نقاط روی این ابررویه در حالت بحرانی هستند به این معنا که طول همبستگی درآنها بی نهایت است. فرض اساسی ویلسون آن است که این شار درروی این ابررویه دارای یک نقطه ثابت است به این معنا که بعد از اینکه بارها عمل بازبهنجارش را انجام دهیم سرانجام به نقطه ای می رسیم که دیگر ضرایب جفتیدگی تغییر نمی‌کنند. این نقطه ثابت را با $\mathbf{K}^*$ نشان می دهیم و بنابرتعریف داریم :

$$\mathbf{K}^* = f_s(\mathbf{K}^*). \tag{۱۳}$$

فرض وجود نقطه ثابت بلافاصله توضیح ساده ای از عمومیت بدست می دهد زیرا بیان می‌کند که رفتار بحرانی تمام سیستم هایی که ضرایب جفتیدگی آنها روی خطوط شاری قراردارندکه به نقطه ثابت $\mathbf{K}^*$ منتهی می شوند توسط یک سیستم آنهم با ضرایب جفتیدگی $\mathbf{K}^*$ توصیف می شود. درواقع تمام این سیستم ها متعلق به یک کلاس عمومیت هستندکه می توان آن راکلاس عمومیت ِ $\mathbf{K}^*$ نامید.

بنابراین نماهای بحرانی این سیستم ها با نماهای بحرانی سیستم $\mathbf{K}^*$ یکی است . دراین بخش خواهیم دیدکه چگونه این نماهای بحرانی را می توان با استفاده از خصوصیات شار بازبهنجارش درنزدیکی نقطه $\mathbf{K}^*$ بدست آورد. برای مطالعه خصوصیات شار درنزدیکی نقط ه $\mathbf{K}^*$ فرض‌کنید

که $\mathbf{K}$ نقطه ای نزدیک $\mathbf{K}^*$ باشد دراین صورت شار این نقطه را به نقطه ای درهمان نزدیکی مثل $\mathbf{K}'$ خواهد نگاشت . بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{K}' = f_s(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}* + \Delta\mathbf{K}' = f_s(\mathbf{K}^* + \Delta\mathbf{K}) = f_s(\mathbf{K}^*) + \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{K}^*}\Delta\mathbf{K} \tag{۱۴}$$

و یا

$$\Delta\mathbf{K}' = A_s\Delta\mathbf{K}, \tag{۱۵}$$

که درآن

$$A_s := \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{K}^*}. \tag{۱۶}$$

حال می توان ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس A_L را پیداکرد:

$$A_s|u_i\rangle = \lambda_i(s)|u_i\rangle \tag{۱۷}$$

می توانیم $\Delta\mathbf{K}$ و $\Delta\mathbf{K}'$ را برحسب این ویژه بردار ها بسط داد:

$$\Delta\mathbf{K} = \sum_i c_i|u_i\rangle \qquad \Delta\mathbf{K}' = \sum_i c_i'|u_i\rangle \tag{۱۸}$$

می توان به c_i ها به عنوان ضرایب جفتیدگی جدید درنزدیکی نقطه ثابت نگاه‌کرد. بااین نامگذاری نقطه ثابت نقطه ای است‌که درآن همه c_i هاصفر هستند.

با قراردادن این بسط ها در رابطه (15) به نتیجه زیر می رسیم:

$$c_i' = \lambda_i(s)c_i \tag{۱۹}$$

c_i ها ضرایب جفتیدگی قبل از بازبهنجارش و c_i' ها ضرایب جفتیدگی بعد از بازبهنجارش هستند. حال می پرسیم‌که بستگی ویژه مقدارهای $\lambda_i(s)$ به s چگونه است؟ برای دریافت این بستگی از خاصیت مهم (11) استفاده می‌کنیم. با استفاده از تعریف A_L و مشتق‌گیری زنجیره ای براحتی می توان رابطه زیر را ثابت‌کرد:

$$A_{s's} = A_{s'}A_s \tag{۲۰}$$

این رابطه بیان می‌کند‌که A_s را می توان به شکل زیر نوشت:

$$A_s = s^\tau \tag{۲۱}$$

که درآن τ یک ماتریس مستقل از L است. درنتیجه این رابطه خواهیم داشت:

$$\Lambda_i = s^{\mu_i} \qquad (۲۲)$$

که درآن μ_i ها ویژه مقدارهای ماتریس τ و مستقل از L هستند.

نامگذاری زیر برای ویژه مقدارها ی μ_i عمومی شده است. هرگاه $\mu_i > 0$ باشد، c_i یک ثابت جفتیدگی باربط خوانده می شود که به معنای آن است که‌هرگاه c_i را از مقدار صفر کمی تغییردهیم شاربازبهنجارش این نقطه را از نقطه ثابت دورترخواهدکرد. مسلم است که جهت ویژه بردارهای باربط می بایست ابررویه بحرانی را قطع‌کنند زیرا فرض شده است که درروی ابررویه بحرانی همه شار به نقطه ثابت می ریزد.

هرگاه $\mu_i < 0$ باشد، c_i یک ثابت جفتیدگی بی ربط خوانده می شود که به معنای آن است که‌هرگاه c_i را از مقدار صفر کمی تغییردهیم شاربازبهنجارش این نقطه را مجدداً به نقطه ثابت بازخواهدگرداند. بنابراین هرچه که به یک دستگاه نزدیک بحرانی از مقیاس های بزرگ و بزرگ تر نگاه‌کنیم این ثابت های جفتیدگی‌کوچک وکوچک تر خواهند شد و نهایتاً از بین خواهند رفت. جهت ویژه بردارهای بی ربط می بایست مماس برابررویه بحرانی باشد. برای فهمیدن این موضوع بیایید فرض‌کنیم‌که یک ویژه بردار بی ربط ابررویه بجرانی را قطع می‌کند. دراین صورت نقطه ای مثل $\mathbf{K}$ خارج سطح به نقطه ثابت $\mathbf{K}^*$ نگاشته می شود. ازآنجاکه درنقطه $\mathbf{K}^*$ طول همبستگی بی نهایت است و طول همبستگی درامتداد شارکم می شود پس در نقطه $\mathbf{K}$ نیزطول همبستگی می بایست بی نهایت باشدکه به این معناست‌که نقطه $\mathbf{K}$ نیز می بایست روی ابررویه بحرانی باشد یعنی ویژه بردار بی ربط می بایست مماس بر ابررویه بحرانی باشد.

۱.۳ پیداکردن نماهای بحرانی

آنچه‌که تاکنون‌گفته شد جنبه های‌کلی بازبهنجارش بود. مسلم است‌که انجام بازبهنجارش بطور دقیق برای هیچ سیستم برهم‌کنش داری امکان پذیرنیست. درهربارکه بازبهنجارش انجام دهیم ثابت های جفتیدگی جدیدی به هامیلتونی اضافه خواهد شدکه لازم می دارد بازبهنجارش را بطور دقیق باهامیلتونی جدید انجام دهیم‌که بازهم منجر به ثابت های جفتیدگی جدید خواهد شد واین‌کارهمچنان ادامه خواهد یافت. برای رهاشدن از این پیچیدگی بودکه فضای ثابت های جفتیدگی را ازهمان ابتدا بی نهایت بعدی‌گرفتیم. امااین‌کار تنها برای این بودکه بتوانیم بطورکلی و صوری درباره بازبهنجارش صحبت‌کنیم. درعمل هیچ‌گاه نمی توان شاربازبهنجارش را دریک فضای بی نهایت بعدی از ثابت های جفتیدگی تعیین‌کرد و هرگز نمی توان بطوردقیق نقطه ثابت را تعیین‌کرد.

تحت بازبهنجارش آن دسته از c_i ها که‌برای آنها مقدار μ_iدراین مرحله می توانیم رابطه انرژی آزادگیبس را قبل و بعد از بازبهنجارش درنزدیکی نقطه ثابت بنویسیم. ازآنجاکه درحین بازبهنجارش مقدارعددی تابع پارش تغییری نمی‌کند برای انرژی آزادگیبس برواحد اسپین خواهیم داشت:

$$g(c_1', c_2', c_3', \cdots) = L^d g(c_1, c_2, c_3, \cdots) \qquad (۲۳)$$

و یا

$$g(s^{\mu_1} c_1, s^{\mu_2} c_2, s^{\mu_3} c_3, \cdots) = s^d g(c_1, c_2, c_3, \cdots) \qquad (۲۴)$$

و یا

$$g(s^{\frac{\mu_1}{d}} c_1, s^{\frac{\mu_2}{d}} c_2, s^{\frac{\mu_3}{d}} c_3, \cdots) = s g(c_1, c_2, c_3, \cdots) \qquad (۲۵)$$

این رابطه نشان می دهدکه تابع انرژی آزادگیبس یک تابع شبه همگن باشد. از درس های قبل به یاد داریم‌که این خاصیت تابع‌گیبس نقطه شروع فرض مقیاس پذیری ویدام بودکه از آنجا می توانستیم نماهای بحرانی را برحسب نماهای ویدام بدست آوریم. تنها تفاوتی‌که وجود دارد آن است که تعداد نماها ظاهراً دراین جا بیشتر از دو تاست.