نظریه گینزبورگ-لانداو

وحید کریمی پور، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۲۷ آذر ۱۳۹۲

۱ مقدمه

هر قطعه ای از ماده از مجموعه ای از الکترون ها ، پروتون ها و نوترون ها تشکیل شده است که با یکدیگر برهم‌کنش های الکترومغناطیسی و هسته ای دارند. بسته به شرایط خارجی مثل فشار، دما، میدان مغناطیسی و نظایر آن ، این قطعه ماده می تواند در فازهای مختلف جامد، مایع، گاز، پلازما، رسانا یا ابررسانا، شاره یا ابرشاره قرار بگیرد و انواعی ازگذار فاز را از خود نشان دهد. تمامی این‌گذار فاز ها ناشی از همان برهم کنش های بنیادی الکترومغناطیسی و هسته ای است. علی القاعده باید بتوان با شروع از یک هامیلتونی بنیادی که در بردارنده ی برهم‌کنش های میکروسکوپی و بنیادی است، تمام این‌گذار فاز ها و خصوصیات فازهای ایجاد شده را توضیح داد. اما کمی دقت و تفکر نشان می دهد که چنین کاری عبث و بیهوده است. زیرا در هر مقیاسی می بایست یک نحوه توصیف را که متناسب با آن مقیاس است به‌کار برد. به عنوان مثال اگر چه می دانیم که یک توپ فوتبال از بیلیون ها اتم درست شده است برای توصیف حرکت آن در زمین فوتبال از مکانیک‌کوانتومی استفاده نمی‌کنیم و معادله بس ذره ای شرودینگر را حل نمی‌کنیم چرا که می دانیم متغیرهایی که در این مقیاس می توانند با بهترین تقریب ممکن حرکت توپ را توصیف‌کنند مختصات مرکز جرم توپ فوتبال هستند. توصیف توپ بر اساس حرکت میلیاردها اتمی که آن را می سازند یک توصیف غلط نیست بلکه یک توصیف بی فایده است. به همین ترتیب وقتی که می خواهیم حرکت زمین را در منظومه شمسی در نظر بگیریم به حرکت بادها و امواج دریاها و اقیانوس ها کاری نداریم بلکه زمین را یک کره ی تقریبا کامل با تعداد خیلی کمی متغیر دینامیکی در نظر می‌گیریم. در مقیاس بازهم بالاتر یعنی مقیاس کیهانی حتی کل منظومه شمسی و کهکشان راه شیری را به صورت یک نقطه و یک ذره از سیال کیهانی در نظر می‌گیریم. درس کلی ای که از این مثال ها می‌گیریم آن است که برای مطالعه هر پدیده ای لزوما نمی بایست از میکروسکوپی ترین توصیف آن پدیده شروع کرد بلکه می بایست متغیرهای مربوط به آن مقیاس را تعیین کرد و نوع برهم‌کنش ها یا هامیلتونی موثری را که نشان دهنده برهم‌کنش متغیرها در آن

مقیاس است، بدست آورد.

۲ هامیلتونی موثر

همه هامیلتونی هایی که برای توصیف پدیده های مختلف در مقیاس های گوناگون به کار می بریم، هامیلتونی موثر هستند، به این معنا که این هامیلتونی ها از هامیلتونی هایی در مقیاس پایین تر ناشی می شوند. پیوندهای شیمیایی ناشی از برهم‌کنش های الکترومغناطیسی است، نیروی بین هسته ها ناشی از برهم‌کنش های بنیادی تر بین کوارک ها وگلوئون هاست. هامیلتونی موثر در یک مقیاس را هم می توان از انجام آزمایش و مشاهده مستقل بدست آورد (این کاری است که از نظر تاریخی نیز انجام شده است) و هم می توان با متوسط گیری روی درجات آزادی نامربوط در مقیاس خرد تر از یک هامیلتونی بنیادی تر بدست آورد.

۱.۲ پدیده های بحرانی و دانه درشت‌کردن

به یکی از پدیده ها مثل گذار فاز فرومغناطیسی توجه می کنیم. وقتی که گذار فاز مرتبه دوم رخ می دهد، یک طول مربوط ، طول همبستگی است که آن را با ξ نشان می دهیم . این طول خیلی بیشتر از طول مشخصه شبکه جامد یعنی a است ($\xi >> a$). بنابراین یک توصیف میکروسکوپی که بر اساس برهم‌کنش اتم ها در فاصله شبکه ای یعنی a است، توصیف خوبی از پدیده فرومغناطیسی وگذار فاز مغناطیسی نیست. به همین دلیل می بایست بجای هامیلتونی کاملا میکروسکوپی از یک هامیلتونی استفاده کنیم که برای مقیاس های بزرگ و نزدیک ξ مناسب است. می خواهیم ببینیم چگونه می توانیم در این مقیاس هامیلتونی مناسب را بدست آوریم. هرگاه مقیاس مشاهده خود را از a به sa تغییر دهیم به این معناست که دیگر افت و خیز متغیرهای میکروسکوپی را که کوچکتر از sa هستند نمی بینیم . اگر بلوک های اسپینی را به طول sa در نظر بگیریم هر بلوک دارای s^D تا اسپین دارد. ما می توانیم متوسط اسپین های درون یک بلوک را تشخیص دهیم ولی نمی توانیم بگوییم که هر اسپین درون یک بلوک چه وضعیتی دارد. اگر موقعیت یک بلوک را با x نشان دهیم و اسپین متوسط درون این بلوک را با S_x نشان دهیم خواهیم داشت:

$$S_x = \frac{1}{s^D} \sum_{i \in x=1}^{s^D} s_i \qquad (۱)$$

واضح است که اگر اسپین های s_i مقدارهای ± 1 را اختیارکنند، آنگاه S_x مقادیر خیلی نزدیک به همی را بین -1 و1 به خود می‌گیرد و اگر این دانه درشت‌کردن را چندین بار انجام دهیم آنگاه مقادیر متغیرهای نهایی عملا مقادیر پیوسته ای را اختیار می کنند. نکته مهم این است که متغیر اولیه هر چه که باشد در مقیاس های بزرگ و دانه درشت متغیر آماری عملا مقدار پیوسته ای اختیار می کند. این مقدار پیوسته را در مدل آیزینگ

با $\phi(x)$ نشان می دهیم. در مقیاس طولی که نسبت به طول واحد شبکه خیلی بزرگ است نه تنها ساختار شبکه به یک ساختار پیوسته تبدیل می شود بلکه متغیر آماری نیز پیوسته می شود. به عبارت دیگر در این مقیاس دیگر ساختار شبکه را نمی بینیم و بجای متغیرهای کاملا گسسته اسپین که در نقاط شبکه جای گرفته اند متغیرهایی می بینیم که مقادیر پیوسته اختیار می کنند. این امر به این معناست که می توانیم پدیده مورد نظر را در این مقیاس با میدان های پیوسته ای که روی یک فضای پیوسته تعریف شده اند مدل سازی کرد. این تبدیلات را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} s_i &\longrightarrow \phi(x), \\ \sum_i &\longrightarrow \int d^D x, \\ \sum_{s_i} &\longrightarrow \int D\phi, \\ Z = \sum_{s_i} e^{-H(s_1,s_2,\cdots s_N)} &\longrightarrow Z = \int D\phi e^{-L[\phi]}. \end{aligned} \qquad (۲)$$

در این جا $L[\phi]$ یک تابعی است که تابعی لانداو نامیده می شود و بیان می کند که احتمال این که میدان $\phi(x)$ یک شکل معین را یا به عبارت دقیق تر شکلی را در محدوده معینی اختیار کند چقدر است. به عبارت دیگر $P[\phi] = \frac{1}{Z}e^{-L[\phi]}$ چگالی احتمال این است که میدان ϕ شکل $\phi(x)$ را اختیار کند. مسلم است که شکل تابعی لانداو را نمی توان با شروع از یک هامیلتونی میکروسکوپی و سپس چندین بار دانه درشت کردن بدست آورد. ولی می توان قیود کلی و فیزیکی روی آن را معین کرد . این تابعی می بایست شرایط زیر را برآورده کند:

الف: همه تقارن های اولیه فضایی (تقارن انتقالی ، دورانی) و داخلی ای را که مدل میکروسکوپی اولیه داشته است داشته باشد. به عنوان مثال اگر مدل اولی تحت تبدیل $s \longrightarrow -s$ تقارن داشته است لازم است که تابعی لانداو نیز تحت تبدیل $\phi(x) \longrightarrow -\phi(x)$ متقارن باشد.

ب: تابعی لانداو می بایست موضعی باشد به این معنا که به صورت انتگرالی از یک چگالی نوشته شود، به عبارت دیگر:

$$L[\phi] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)) \qquad (۳)$$

که در آن چگالی $\mathcal{L}$ تابعی از $\phi(x)$ و مشتقات آن است. در واقع از همان ابتدا و بدون اینکه چه از لحاظ عملی و حتی نظری لازم باشد که فرایند دانه درشت کردن را انجام بدهیم می توانیم بگوییم که در یک مقیاس طولی معین تابعی لانداو به مثابه هامیلتونی موثر برای یک فرایند است که محتوی میدان های موجود در آن و هم چنین شکل تابعی را با ملاحظات فیزیکی و بیش از همه با مجموعه تقارن های فضایی و داخلی معین می کنیم. در واقع این فلسفه ای است که در نوشتن تمام لاگرانژی ها برای توصیف برهم کنش های بنیادی از قبیل برهم کنش الکترو مغناطیسی،الکترو ضعیف یا هسته ای دنبال می کنیم به این معنی که تنها راهنمای ما برای نوشتن لاگرانژی ها تقارن است. این که چگونه این مدل ها را مطالعه می

کنیم و تابع پارش آنها را محاسبه می‌کنیم موضوع جداگانه ای است که در درس های آینده به آن می پردازیم. در این جا تنها می خواهیم نمونه هایی از مدل های لانداو-گینزبورگ را معرفی کنیم.

۳ مدل های لانداو -گینزبورگ

۱.۳ مدل اسکالر حقیقی(کلاس عمومیت آیزینگ)

این مدل فقط یک میدان اسکالر حقیقی داردکه آن را با $\phi(x)$ نشان می دهیم. علاوه بر تقارن انتقالی و دورانی در فضا، این مدل تحت تبدیل $\phi \longrightarrow -\phi$ نیز متقارن است. این تقارن به دلایل واضح تقارن Z_2 نامیده می شود. تابعی لانداو را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L[\phi] = \int d^D x\{a_0 + a_2\phi^2(x) + a_4\phi^4(x) + (\nabla\phi(x))^2\} \qquad (۴)$$

به چند نکته یا فرض می بایست اشاره‌کنیم که در همه مدل های لانداو-گینزبورگ برقرار هستند:

الف- پارامترهای a_i توابعی تحلیلی از دمای کاهش یافته یاt هستند.

ب- ضریب a_4 می بایست مثبت باشد در غیر این صورت میدان های با اندازه های خیلی بزرگ احتمال شان از بقیه میدان ها بیشتر می شود و هر چه‌که اندازه میدان بیشتر باشد این احتمال بیشتر می شود.

ب- ضریب$(\nabla\phi)^2$ می بایست مثبت باشد چراکه در غیر این صورت احتمال پیدایش میدان هایی‌که مشتق های بسیار زیاد و در نتیجه افت و خیزهای بسیار شدید دارند زیاد می شود و هر میدانی‌که مقدار افت و خیزها یش زیاد تر باشد احتمال آن نیز بیشتر خواهد بود و حال آنکه در اثر دانه درشت‌کردن انتظار طبیعی داریم‌که میدان ها هموار باشند.

پ- با بازتعریف میدان $\phi(x)$ می توانیم ضریب جمله $(\nabla\phi)^2$ را برابر با 1 بگیریم.

در مشابهت با آنچه‌که در نظریه میدان‌کوانتومی یادگرفته ایم، گاهی اوقات جمله $a_2\phi^2$ را جمله جرمی [۱] ، جمله $(\nabla\phi)^2$ را جمله جنبشی[۲] و $a_4\phi^4$ را جمله برهم‌کنش [۳] می نامیم.

۴ مدل لانداو-گینزبورگ برای میدان مختلط

این مدل برای توصیف ابرشارگی و هم چنین‌کلاس عمومیت XY بکار می رود. یادآوری می‌کنیم‌که پارامتر نظم در هر دوی این مدل ها یک بردار دو بعدی است‌که می تواند در صفحه مختلط قرارگیرد. میدان ϕ در این جا مختلط است و داریم $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. تابعی لانداو به صورت زیر است:

$$L[\phi] = \int d^D x\{a_0 + a_2|\phi|^2 + a_4|\phi|^4 + |\nabla\phi|^2\} \qquad (۵)$$

گروه تقارن این مدل $U(1)$ است زیرا تابعی لانداو تحت تبدیل $\phi \longrightarrow e^{i\alpha}\phi$ که درآن α ثابت است متقارن است.

۵ مدل لانداو-گینزبورگ برای‌کلاس عمومیت $O(n)$

این مدل دارای n میدان حقیقی اسکالر است‌که به صورت

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

نوشته می شود. تابعی لانداو به صورت زیر است:

---

[۱] mass term

[۲] Kinetic Term

[۳] Interaction Term

$$L[\phi] = \int d^D x \{a_0 + a_2 \Phi^T \Phi + a_4 (\Phi^T \Phi)^2 + \nabla \Phi^T \nabla \Phi\}. \quad (۶)$$

گروه تقارن این مدل گروه ماتریس های متعامد n بعدی یا $O(n)$ است به این معنا که تابعی لانداو تحت تبدیل $\Phi \longrightarrow R\Phi$ که در آن $R \in O(n)$ است ، ناورداست.

۶ مدل لانداو-گینزبورگ برای n میدان حقیقی با تقارن جایگشت

دراین مدل تقارن محدود تز از تقارن دوران است و تابعی لانداو تنها تحت تبدیل

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{pmatrix} \longrightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} \phi_{\pi_1} \\ \phi_{\pi_2} \\ . \\ . \\ \phi_{\pi_n} \end{pmatrix} \quad (۷)$$

که در آن $\pi \in S_n$ یک جایگشت است ناورداست.

به این دلیل که تقارن کمتر شده است تابعی لانداو جملات بیشتری دارد.

۷ مدل های لانداو-گینزبورگ در فضای تکانه

فرض می کنیم که سیستم فیزیکی در فضایی مکعبی با ابعاد L محصور شده است. حجم کل فضا برابر است با $V = L^D$. شرایط مرزی را پریودیک می گیریم. می دانیم که شکل فضا و شرایط مرزی در حد ترمودینامیک اثری در خواص فیزیکی سیستم ندارد. بنابراین می توانیم میدان ها را بر حسب مود های فوریه بسط دهیم:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L^D}} \sum_k \tilde{\phi}_k e^{ik \cdot x} \quad (۸)$$

که درآن $k = (k_1, k_2, \cdots k_D)$ و $k_j = \frac{2\pi}{L} n_j$. روشن است که n_j ها اعداد صحیح هستند.

با توجه به رابطه

$$\frac{1}{L^D} \int d^D x e^{i(k-k')\cdot x} = \delta_{k,k'} \tag{۹}$$

خواهیم داشت

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{L^D}} \int d^D x e^{-ik\cdot x} \phi(x). \tag{۱۰}$$

دقت کنید که اگر میدان حقیقی باشد، آنگاه $\phi_k^* = \phi_{-k}$

تمرین: رابطه بالا را ثابت کنید.

یک نکته مهم در باره محدوده تکانه k. از آنجا که مدل لانداو–گینزبورگ برهم‌کنش های موثر را در مقیاس های بزرگ تر از یک حد معین توصیف می‌کند، اندازه تکانه k نمی تواند از صفر تا بی نهایت باشد بلکه می بایست یک حد بالا برای آن در نظر گرفت. این حد را با Λ نشان می دهیم. بنابراین تمام انتگرال های روی تکانه ها دارای حد بالای Λ هستند. این حد بالا را تکانه قطع [۴] می‌گویند. پس از این مقدمه می توانیم جملات متفاوت تابعی لانداو را در فضای تکانه بدست آوریم.

تمرین:نشان دهید که :

$$\begin{aligned}
&\int d^D x a_0 = L^D a_0 \\
&\int d^D x \phi^2(x) = \sum_k |\tilde{\phi}_k|^2 \\
&\int d^D x (\nabla\phi(x)) = \sum_k k^2 |\tilde{\phi}_k|^2 \\
&\int d^D x \phi^4(x) = \frac{1}{L^D} \sum_{k_1,k_2,k_3} \phi_{k_1}\phi_{k_2}\phi_{k_3}\phi_{-k_1-k_2-k_3}.
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

در این روابط $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \cdots k_D^2$.

[۴] cutoff

۱.۷ معنای $D\phi$

تاکنون راجع به $D\phi$ که اندازه ی انتگرال روی تمام میدان ها بود حرفی نزده ایم. حال‌که با تبدیل فوریه آشنا شدیم می توانیم $D\phi$ را معنا کنیم. از آنجا که

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L^D}} \sum_k \tilde{\phi}_k e^{ik\cdot x} \qquad (۱۲)$$

هر هیئتی از میدان با یک مجموعه از اعداد مختلط $\{\phi_k\}$ متناظراست. بنابراین انتگرال‌گیری روی این ضرایب معادل با انتگرال‌گیری روی تمام هیئت هایی است‌که میدان ϕ به خود می‌گیرد. بنابراین با توجه به این‌که ϕ_k (حتی برای میدان حقیقی) یک عدد مختلط است و نیز با توجه به این‌که برای میدان حقیقی $\phi_k^* = \phi_{-k}$ است ، منظور از $D\phi$ برای میدان های حقیقی عبارت زیر است:

$$D\phi = \prod_{|k|\leq\Lambda} d\,\phi_k d\phi_k^*. \qquad (۱۳)$$

به این ترتیب هامیلتونی لانداو‌گینزبورگ (برای یک میدان اسکالر حقیقی) در فضای تکانه به شکل زیر در می آید:

$$L = a_0 L^D + \sum_k (a_2 + k^2)|\phi_k|^2 + a_4 \sum_{k_1,k_2,k_3} \phi_{k_1}\phi_{k_2}\phi_{k_3}\phi_{-k_1-k_2-k_3}. \qquad (۱۴)$$

۸ ضمیمه : مقدمه‌کوتاهی بر تابعی ها

یک تابعی [۵] مثل F نگاشتی است از مجموعه توابع معین (توابع حقیقی یا مختلط یک یا چند متغیره) به اعداد حقیقی یا مختلط . به عبارت دیگر آرگومان یا متغیر یک تابعی خودش یک تابع است و مقدار یک تابعی به ازای یک آرگومان معین یک عدد حقیقی یا مختلط است. این البته چیز جدیدی نیست و ما در درس های دوره لیسانس نیز با مثال های گوناگونی از تابعی سروکار داشته ایم بدون اینکه از نام تابعی استفاده کنیم. مثالهای زیر همه تابعی هستندکه در آنها آرگومان تابعی را با g نشان داده ایم.

$$F_1[g] = \int_a^b g(x)dx,$$
$$F_2[g] = \int_a^b g^2(x)dx,$$
$$F_{x_0}[g] = g(x_0),$$

[۵] Functional

$$F_3[g] = e^{-\int_a^b g(x)+g'(x)^2 dx}. \qquad (۱۵)$$

در همه این موارد تابع g یک تابع است که در فاصله $[a,b]$ تعریف شده و حاصل تابعی نیز یک عدد است.

می توان دو تابعی را با هم جمع یا از هم کم کرد و یک تابعی جدید بدست آورد. به طور کلی تمام اعمالی را که با تابع ها انجام می دادیم با تابعی ها نیز می توانیم انجام دهیم و تابعی ها ی جدید بدست آوریم. هم چنین می توان یک تابعی را با یک تابع معمولی ترکیب کرد و یک تابعی جدید بدست آورد. به عنوان مثال اگر F و G دو تابعی باشند آنگاه $F+G$ و FG نیز تابعی هستند.

۱.۸ مشتق تابعی

یک تابعی را می توان حد یک تابع چند متغیره در نظر گرفت وقتی که تعداد متغیرها به سمت بی نهایت میل می کند. هرگاه تابع را با F و متغیرهای این تابع را با $q_1, q_2, q_3, \cdots q_N$ نشان دهیم می توانیم بنویسیم

$$F = F(q_1, q_2, q_3, \cdots q_N). \qquad (۱۶)$$

حال تصور کنید که تعداد متغیرهای q را به سمت بی نهایت میل دهیم و مطابق شکل فاصله آنها را با هم به سمت صفر میل دهیم. دراین صورت تغییرات زیر اتفاق می افتد: نخست این که اندیس گسسته i به یک پارامتر پیوسته تبدیل می شود که آن را با x نشان می دهیم. دوم این که ممجموعه متغیرهای $(q_1, q_2, \cdots q_N)$ به یک مجموعه پیوسته مقادیر تبدیل می شوند که آن را با تابع $q(x)$ نشان می دهیم. درحد بالا تابع N متغیره F نیز به یک تابعی تبدیل می شود. این تغییرات را برای یادآوری می نویسیم:

$$\begin{aligned} i &\longrightarrow x \\ q_i &\longrightarrow q(x) \\ F(q_1, q_2, \cdots q_N) &\longrightarrow F[q]. \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

حال فرض کنید که به هرکدام از متغیرهای q_i مقدار کوچکی مثل ϵ_i را اضافه کنیم. دراین صورت از آنالیز توابع چند متغیره می دانیم که

$$F(q_1+\epsilon_1, q_2+\epsilon_2, \cdots q_N+\epsilon_N) = F(q_1, q_2, \cdots q_N) + \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \qquad (۱۸)$$

هرگاه تعداد متغیرها را به سمت بی نهایت میل دهیم و آنها را به هم مطابق با شکل فشرده کنیم رابطه بالا تبدیل می شود به :

$$F[q+\epsilon] = F[q] + \int \epsilon(x) \frac{\delta F}{\delta q(x)} dx. \qquad (۱۹)$$

دقت کنید که در این حد مجموعه ی متغیرهای $(\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots \epsilon_N)$ نیز به تابع $\epsilon(x)$ تبدیل می شود. عبارت بالا در واقع مشتق تابعی $\frac{\delta F}{\delta q(x)}$ را تعریف می کند. دقت کنید که این مشتق تابعی خودش یک تابعی نیست زیرا به کلیت تابع q بستگی ندارد بلکه تابعی از نقطه x نیز هست.

تمرین: با استفاده از تعریف مشتق تابعی نشان دهید که قواعد زیر برای مشتق تابعی صحیح هستند:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(F+G)}{\delta q(x)} &= \frac{\delta F}{\delta q(x)} + \frac{\delta G}{\delta q(x)} \\ \frac{\delta(FG)}{\delta q(x)} &= F[q]\frac{\delta G}{\delta q(x)} + \frac{\delta F}{\delta q(x)}G[q] \\ \frac{\delta(h(G[q]))}{\delta q(x)} &= h'(G[q])\frac{\delta G}{\delta q(x)}. \end{aligned} \qquad (۲۰)$$