روابط مقیاسی

وحید کریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۲۲ مهر ۱۳۹۲

۱ مقدمه

در هر سیستم فیزیکی یک یا چند طول مشخصه وجود دارند که به طور طبیعی مقیاسی هستند برای مقایسه سایر طول ها. مثلا در زندگی روزمره برای انسان ها، وجب (پهنای دست) یا ذرع (فاصله بین نوک انگشتان دو دست در حالت باز) مقیاس های طبیعی طولی هستند. در منظومه شمسی فاصله بین زمین و خورشید یک طول طبیعی است که به واحد نجومی [۱] معروف است. در مقیاس کیهانی طول طبیعی سال نوری است. هم چنین در دنیای اتمی مقیاس طبیعی طول آنگستروم یا شعاع بور [۲] است. مقیاس طبیعی در فیزیک هسته ای یک فرمی است که تقریبا یک صدهزارم آنگستروم است. هیچ کس فاصله سیارات را از یکدیگر یا از خورشید بر حسب متر یا میلی متر اندازه گیری نمی کند. هم چنین هیچ کس قد انسانها را برحسب میلی متر یا کیلومتر نمی سنجد. وجود این مقیاس های مشخص طولی نشان می دهد که پدیده های مربوطه به آن حوزه دارای تقارن مقیاس نیستند. به عبارت دیگر سازوکار و قوانین فیزیکی اجازه نمی دهد که اشیایی با ابعاد کاملا متفاوت در آن حوزه بوجود بیایند. قوانین زیست شناسی و فیزیک اجازه نمی دهند که انسانهایی با طول چند ده متر بوجود بیایند یا درختانی با طول هزار متر. دنیای اطراف ما به وضوح دارای تقارن مقیاس نیست. ما در اطراف خود درختانی با طول های از میلی متر تا هزاران متر نمی بینیم. اتم هایی با شعاع های از آنگستروم تا متر وجود ندارد. وجود مقیاس های طولی متفاوت مقیاس های متفاوت دیگری را نظیر جرم و انرژی به همراه می آورد. مقیاس انرژی برای انسانها ، اتم ها و هسته ها متفاوت است. این جدا شدن

[۱] Astronomical Unit (AU)

[۲] Bohr Radius

مقیاس ها یک نتیجه بسیار مهم و اساسی دارد و آن این که می توان این دنیا ها را مستقل از یک دیگر مطالعه کرد. هر حوزه قوانین مخصوص به خود را دارد. می توان حرکت یک پرتابه، یک سنگ را در سطح زمین با استفاده از قوانین نیوتن و رابطه $F = ma$ توصیف کرد و نیازی نیست که فکر کنیم سنگ از میلیون ها اتم تشکیل شده و برای توصیف حرکتش می بایست معادله شرودینگر بس ذره ای را حل کنیم. درست است که سنگ نهایتا از اتم ها تشکیل شده و احتمالا اگر یک رایانه خیلی خیلی قوی داشته باشیم با حل معادله شرودینگر نیز می توانیم حرکت سنگ را در سطح زمین توصیف کنیم ولی این کار نه مفید است و نه لازم. در حقیقت مکانیک کلاسیک برخاسته از یک دینامیک بنیادی تر یعنی دینامیک کوانتومی است که در یک مقیاس طولی بسیار کوچک تر حاکم بر حرکت اشیا ء است. وقتی که مقیاس طولی مشاهده خود را از سطح اتمی (انگستروم) بزرگ کرده و به سطح سنگ (میلی متر و سانتی متر) می رسانیم دینامیک کوانتومی نیز تغییر شکل داده و به دینامیک کلاسیک تبدیل می شود. این تغییرشکل به این معنانیست که قوانین مکانیک کوانتومی نا معتبر می شوند. سنگ همچنان از میلیون ها اتم تشکیل شده است و قوانین اتمی در سطح تک تک اتم ها در کارند ولی در مقیاسی که ما سنگ را مشاهده می کنیم آن همه درجات آزادی را نمی بینیم. حرکات الکترون ها دور اتم ها، نوسانات یونها و هزاران حرکت دیگر همگی در این مقیاس مشاهده نادیدنی شده اند و بنابراین کافی است که فقط به درجات آزادی ای که در این مقیاس قابل مشاهده هستند توجه کنیم و قوانینی برای حرکت سنگ براساس این درجات آزادی معدود که همان مختصات مرکز جرم و نظایرآن است بیابیم. این قوانین همان قوانین نیوتن هستند. چنانچه که قانون حرکت سنگ را که برمبنای مکانیک نیوتنی است بتوانیم از حل معادله شرودینگر بس ذره ای استخراج کنیم می توانیم بگوییم که مکانیک کلاسیک یک نظریه موثر [۳] است که از یک نظریه بنیادی تر [۴] استخراج شده است. این که آیا واقعا چنین چیزی ممکن است یا نه چندان واضح نیست چرا که کسی سعی در این کار نکرده است ولی می توان تصور کرد که این حرف درست است. از خوش شانسی ماست که پدیده های مختلف هرکدام قوانین موثر خود را دارند و لازم نیست برای حرکت یک سنگ یا چرخش زمین به دور خورشید از مکانیک کوانتوی استفاده کنیم. این خوش شانسی ناشی از این امر است که این دنیاهای متفاوت با مقیاس های طولی کاملا مختلف از هم جدا شده اند. ——————————–

درس هجدهم: فرض مقیاس پذیری ویدام

[۳] Effective Theory

[۴] Fundamental Theory

۲ مقدمه

درچند درس گذشته دیدیم که درنزدیکی نقطه بحرانی بعضی کمیت های فیزیکی:

الف: از خود رفتار توانی نشان می دهند،

ب : نماهای بحرانی مربوط به این کمیت ها عام هستند،

ج : بین این نماها روابط ساده ای وجود دارد که باعث می شود همه آنهارابتوان برحسب یکی دو تا از آنها نوشت .

دراین درس می خواهیم نخستین و ابتدایی ترین کوششی را که برای فهم این سه خصلت پدیده های بحرانی انجام شده است، بازهم با مثال گذارفاز مغناطیسی، بررسی کنیم.

۳ فرض مقیاس پذیری ویدام

برای یک سیستم مغناطیسی قانون اول ترمودینامیک به شکل زیر نوشته می شود:

$$dU = TdS + BdM \qquad (۱)$$

زیراکاری که بریک ماده مغناطیسی انجام می شود برابراست با BdM (برای فهم این نکته و اینکه چراکارانجام شده مطابق با تصور ابتدایی ما برابر با $-BdM$ نیست رجوع کنید به کتاب ترمودینامیک زیمانسکی). درنتیجه برای انرژی آزاد هلمهولتز یعنی F خواهیم داشت :

$$dF = -SdT + BdM \qquad (۲)$$

وبرای انرژی آزاد گیبس یعنی G خواهیم داشت :

$$dG = -SdT - MdB \qquad (۳)$$

دقت کنید که G تابعی از دما و میدان مغناطیسی یعنی کمیت های نافزونور سیستم است یعنی $G = G(T, B)$. از رابطه بالاداریم :

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} \qquad M = -\frac{\partial G}{\partial B} \tag{۴}$$

که از دورابطه اخیر بدست می آوریم :

$$C_B \equiv \frac{TdS}{dT} = T\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \qquad \chi_B \equiv \frac{\partial M}{\partial B} = -\frac{\partial^2 G}{\partial B^2} \tag{۵}$$

می دانیم که درنزدیکی نقطه بحرانی کمیت های فیزیکی از خود ناپیوستگی نشان می دهند که به معنای آن است که مشتق های تابع گیبس در دو طرف نقطه بحرانی بایکدیگر برابر نیستند زیرا مطابق روابط بالا این کمیت ها از مشتقات تابع گیبس هستند. برمبنای فرض مقیاس بندی ویدام $WidomScalingHypothesis$ تابع گیبس درنزدیکی نقطه بحرانی یک تابع همگن است به این معنا که دارای خاصیت زیراست:

$$G(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda G(t, B) \tag{۶}$$

که درآن a و b دو نما هستند که مقدار آنها فعلا معلوم نیست. خواهیم دید که نماهای بحرانی مشاهده پذیر برحسب این دو نما محاسبه می شوند.

دراین مرحله معلوم نیست که چه چیز مبنای این فرض ساده است و این خاصیت چه مبنای فیزیکی ای دارد. تنها ملاک اعتباراین فرض نتایجی است که از آن ناشی می شود. هرچه که هست خواهیم دید که این فرض ساده خاصیت توانی کمیت های فیزیکی را درنزدیکی نقطه بحرانی و هم چنین روابط بین نماهای بحرانی را بدست می دهد و این روابط همانهایی هستند که درآزمایش مشاهده می شوند. برای دیدن این موضوع از طرفین رابطه (6) نسبت به B مشتق می گیریم تا مطابق بارابطه (4) مغناطش بدست آید. خواهیم داشت :

$$\lambda^b M(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda M(t, B) \tag{۷}$$

بنابراین مغناطش نیز دارای رفتار مقیاسی است. ازآنجا که λ یک مقدار دلخواه است می توان درطرفین این رابطه B را مساوی

صفر و λ را مساوی $t^{-\frac{1}{a}}$ است. بدست می آوریم :

$$t^{-\frac{b}{a}}M(1,0) = t^{-\frac{1}{a}}M(t,0) \tag{۸}$$

و یا

$$M(t,0) = t^{\frac{1-b}{a}}M(1,0) \sim t^{\frac{1-b}{a}} \tag{۹}$$

این رابطه نشان می دهد که نمای بحرانی β را می توان برحسب دو نمای a و b بدست آورد:

$$\beta = \frac{1-b}{a} \tag{۱۰}$$

برای بدست آوردن نمای δ درهمان رابطه (7) درطرفین قرارمی دهیم $t=0$ و $\lambda = B^{-\frac{1}{b}}$. نتیجه آن خواهد بود که :

$$B^{-1}M(0,1) = B^{-\frac{1}{b}}M(t,B) \tag{۱۱}$$

ویا

$$M(t,B) = M(0,1)B^{\frac{1-b}{b}} \sim B^{\frac{1-b}{b}} \tag{۱۲}$$

بنابراین نمای بحرانی δ نیز برحسب دو نمای a و b بدست می آید: یعنی :

$$\delta = \frac{b}{1-b} \tag{۱۳}$$

حال به سراغ ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی یعنی χ می رویم . از رابطه (7) نسبت به B مشتق می گیریم و بدست می آوریم:

$$\lambda^{2b}\chi(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda\chi(t,B) \tag{۱۴}$$

حال دردوطرف رابطه قرار می دهیم $B=0$ و $\lambda = t^{-\frac{1}{a}}$ و بدست می آوریم:

$$t^{\frac{-2b}{a}}\chi(1,0) = t^{-\frac{1}{a}}\chi(t,B) \tag{۱۵}$$

و یا

$$\chi(t,B) = t^{\frac{1-2b}{a}}\chi(1,0) \sim t^{\frac{1-2b}{a}} \tag{۱۶}$$

بنابراین نمای بحرانی γ نیز برحسبت دو نمای a و b بدست می آید. یعنی

$$\gamma = \frac{1-2b}{a}. \tag{۱۷}$$

توجه به این مسئله لازم است که رابطه (16) مستقل ازاینکه درکدام طرف نقطه بحرانی هستیم برقراراست. بنابراین نمای بحرانی γ' نیز همان رابطه (17) را با نماهای a و b دارد. آخرین نمای بحرانی ای که به محاسبه آن می پردازیم نمای α است که به ظرفیت گرمایی ویژه مربوط است. با توجه به رابطه (4) و استفاده از رابطه (6) بدست می آوریم:

$$\lambda^{2a}C_B(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda C_B(t,B) \tag{۱۸}$$

حال دردوطرف رابطه قرار می دهیم $B=0$ و $\lambda = t^{-\frac{1}{a}}$ و بدست می آوریم:

$$t^{-2}C_B(1,0) = t^{-\frac{1}{a}}C_B(t,0) \tag{۱۹}$$

و یا

$$C_B(t,0) \sim t^{\frac{1}{a}-2} \tag{۲۰}$$

بنابراین نمای بحرانی γ نیز برحسب دو نمای a و b بدست می آید. یعنی

$$\alpha = 2 - \frac{1}{a}. \tag{۲۱}$$

توجه به این مسئله لازم است که رابطه (21) مستقل ازاینکه درکدام طرف نقطه بحرانی هستیم برقراراست. بنابراین نمای بحرانی α نیز همان رابطه (21) را با نماهای a و b دارد.
به طور خلاصه ژوانستیم که چهارتا ازنماهای بحرانی را برحسب نماهای ویدام یعنی a و b بدست آوریم . این روابط عبارت بودند از:

$$\beta = \frac{1-b}{a} \qquad \delta = \frac{b}{1-b} \qquad \gamma = \gamma' = \frac{2b-1}{a} \qquad \alpha = \alpha' = 2 - \frac{1}{a} \tag{۲۲}$$

با حذف a و b بین این روابط می توان دو رابطه بین نماهای بحرانی پیدا کرد:

$$\gamma = \gamma' = \beta(\delta - 1) \qquad \alpha + \beta(\delta + 1) = 2 \tag{۲۳}$$

این روابط مستقل از اینکه پدیده بحرانی مغناطیسی در چه بعدی روی می دهد معتبر هستند و صحت آنها از نظر تجربی تایید شده است.

موفقیت فرضیه مقیاس پذیری ویدام آن است که تنهاباپیشنهاد یک فرض یعنی رابطه (6) توانستیم نشان دهیم که

اولاً کمیت های ترمودینامیکی مثل مغناطش ، ضریب نفوذپذیری مغناطیسی و ظرفیت گرمایی ویژه درنزدیکی نقطه بحرانی رفتارتوانی دارند.

ثانیاً نماهای بحرانی لااقل آنهایی که به همبستگی فضایی کمیت ها مربوط نیستند همگی از یک جفت نما یعنی نماهای a و b بدست می آیند.

ثالثاً با حذف نماهای a و b توانستیم روابطی بین نماهای بحرانی مشاهده پذیر بدست بیاوریم که همگی از نظر تجربی معتبر هستند.

این که دراستخراج این روابط از جزئیات ساختاری دستگاه بحرانی هیچ استفاده ای نشده است (مگر در مقدارعددی نماهای a و b) خود نشانه کمرنگی از عمومیت است که درپدیده های بحرانی به چشم می خورد. با توجه به مطالب فوق بخوبی می

توان دریافت که چرا فرضیه مقیاس پذیری ویدام را می توان نقطه شروع بسیارپرباری برای فهم پدیده های بحرانی شمرد که نهایتاً پله پله منجر به ابداع روش گروه بازبهنجارش شده است.