

در باره حل دقیق مدل آیزینگ

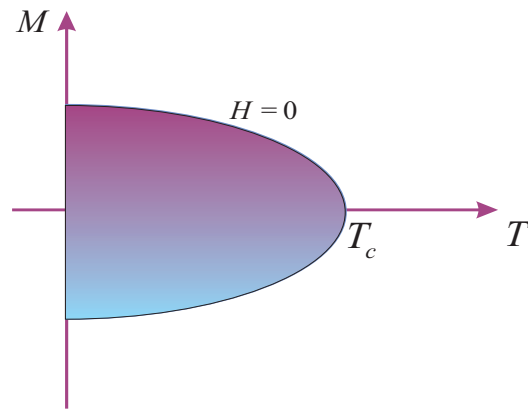
وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲ آبان ۱۳۹۲

۱ مقدمه

در درس های پیشین نخست روش پدیده شناسی ویدام^۱ را بررسی کردیم. سپس با توجه به مدل های میکروسکوپی سعی کردیم که این مدل ها را در تقریب میدان متوسط حل کنیم. دیدیم که این تقریب تصویر کیفی خوبی از گذار فاز ارائه می دهد اما نمی تواند مقادیر نماهای بحرانی را مطابق با نتایج تجربی بدست بدهد. دلیل این ناتوانی نیز روشن است زیرا هم آزمایش ها و هم شبیه سازی های متعدد نشان می دهند که اتفاقا آنچه که در نزدیکی نقطه گذار فاز مهم است، افت و خیز در همه مقیاس هاست و همین افت و خیزها هستند که منشا بسیاری از خواص مهم پدیده های بحرانی هستند. بنابراین در نظر نگرفتن این افت و خیزها در تقریب میدان میانگین یک خطای بزرگ است. در واقع اگر خوب به این موضوع یعنی اهمیت بسیار زیاد افت و خیزها از یک سو و نادیده انگاشتن آنها در تقریب میدان میانگین توجه کنیم، می بایست از همین نتیجه هم که این تقریب تصویرکیفیی خوبی از وقوع گذار فاز و هم چنین مقادیر قابل قبولی از نماهای بحرانی را بدست می دهد راضی باشیم. بنابراین شاید در آینده بتوانیم تصحیحاتی از تقریب میدان میانگین را در نظر بگیریم و امیدوار باشیم که با این تصحیحات به نتایج بازهم بهتری برسیم. این کار را در درسهای آینده انجام خواهیم داد. این نوع نگرش، یعنی حل میدان میانگین و تقریب های متوالی بعد از آن را می توانیم با تصویری که از حل دقیق بعضی مدل ها بدست می آوریم ترکیب کنیم. حل دقیق یک مدل به طور کامل و بدون استفاده از هیچ تقریبی مسلما بهترین و نیرومندترین روش مطالعه یک پدیده است. متاسفانه همه مدل ها به طور

^۱Widom



شکل ۱: بازپهنجارش در یک سیستم اسپینی. در مرحله اول روی اسپین های درون یک بلوک جمع می کنیم و در مرحله دوم مقیاس طول را بزرگ می کنیم به نحوی که بلوک ها به اندازه قبلی کوچک شوند. سیستم در حد ترمودینامیک است و بی نهایت اسپین و بلوک دارد.

دقیق حل پذیر نیستند و تنها تعداد خیلی کمی از مدل های مکانیک آماری را می توان به صورت دقیق و تحلیلی حل کرد. با این وجود بینشی که از حل های دقیق بدست می آید آنقدر عمیق و جالب و قابل اطمینان است که ما را به مطالعه آن دسته از مدل های دقیقا حل پذیر در مکانیک آماری تشویق می کند. مدلی که بیش و پیش از سایر مدل ها مطالعه شده است مدل آیزینگ است که اهمیت آن تنها در مطالعه گذار فاز پارامغناطیس-فرومغناطیس نیست بلکه ناشی از این است که تعداد زیادی از مسائل و مدل های دیگر به این مدل نگاشته می شوند.

۲ مدل آیزینگ یک بعدی

در این درس مدل آیزینگ یک بعدی را تحت شرایط گوناگون و به روشهای متفاوت حل می کنیم. نخست فرض می کنیم که میدان مغناطیسی برابر با صفر است.

۱.۲ حل مدل آیزینگ یک بعدی بدون میدان مغناطیسی با استفاده از تغییر متغیر

۱.۱.۲ شرایط مرزی باز

هامیلتونی سیستم برابر است با:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}, \quad (۱)$$

و تابع پارش برابر است با

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{\beta J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}}. \quad (۲)$$

برای حل می توانیم تغییر متغیر زیر را اعمال کنیم:

$$q_1 = S_1 S_2, \quad q_2 = S_2 S_3, \quad \dots, \quad q_{N-1} = S_{N-1} S_N, \quad (۳)$$

این تغییر متغیر از (S_1, S_2, \dots, S_N) به $(q_1, q_2, \dots, q_{N-1})$ دو به یک است، زیرا اگر همه S_i ها را در یک علامت منفی ضرب کنیم هیچ تغییری در q_i ها حاصل نخواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J (q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} = 2 (2 \cosh \beta J)^{N-1}, \quad (۴)$$

۲.۱.۲ شرایط مرزی پرودیک

در این حالت شرط مرزی به این صورت است که $S_{N+1} = S_1$ و هامیلتونی برابر است با

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1}. \quad (۵)$$

اما این بار جمله $S_N S_1$ در هامیلتونی وجود دارد و با اعمال همان تغییر متغیر تابع پارش برابر می شود با:

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J(q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} e^{\beta J(q_1 q_2 \dots q_{N-1})}, \quad (6)$$

حال می توانیم جمله آخر یعنی عبارت نمایی را بسط دهیم و بدست آوریم

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J(q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} (q_1 q_2 \dots q_{N-1})^n, \quad (7)$$

به این ترتیب جمع $\sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}}$ تبدیل می شود به $N - 1$ تا جمع مجزا از هم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Z &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} \left[\sum_{q=1, -1} q^n e^{\beta J q} \right]^{N-1} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} [e^{\beta J} + (-1)^n e^{-\beta J}]^{N-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

حال جمع روی n های زوج و فرد را جدا می کنیم و بدست می آوریم:

$$Z = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^{2n}}{(2n)!} (2 \cosh \beta J)^{N-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^{2n+1}}{(2n+1)!} (2 \sinh \beta J)^{N-1} = (2 \cosh \beta J)^N + (2 \sinh \beta J)^N \quad (9)$$

مقایسه تابع پارش نهایی در شرایط مرزی باز و بسته بخوبی نشان می دهد که در حد ترمودینامیک یعنی $N \rightarrow \infty$ نتایج ترمودینامیکی یکسان خواهند بود.

۲.۲ حل مدل آیزینگ یک بعدی بدون میدان مغناطیسی به روش تکرار

حال از یک روش دیگر موسوم به روش تکرار استفاده می کنیم. داریم $h = 0$. شرایط مرزی نیز باز است. تابع پارش را برای N تا اسپین در نظر می گیریم:

$$Z_N = \sum_{\{S_1, S_2, \dots, S_N\}} e^{\beta J(S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + S_{N-1} S_N)}, \quad (10)$$

اگر روی آخرین اسپین جمع را انجام دهیم بدست می آوریم:

$$Z_N = \sum_{\{S_1, S_2, \dots, S_{N-1}\}} e^{\beta J(S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + S_{N-2} S_{N-1})} \sum_{S_N} e^{\beta J S_{N-1} S_N}, \quad (11)$$

اما جمع روی آخرین اسپین ساده است:

$$\sum_{S_N} e^{\beta J S_{N-1} S_N} = 2 \cosh(\beta J S_{N-1}), \quad (12)$$

حال نکته مهم این است که این عبارت بستگی به مقدار S_{N-1} ندارد و همواره برابر است با $2 \cosh \beta J$. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z_N = Z_{N-1} (2 \cosh \beta J) \quad (13)$$

با تکرار این رابطه تابع پارش را بدست می آوریم که مقدارش برابر خواهد بود با $2(2 \cosh \beta J)^{N-1}$.

۳.۲ حل مدل آیزینگ یک بعدی به روش ماتریس انتقال

یکی از قدرتمندترین و عمومی ترین روش ها برای حل مدل آیزینگ و مدل های مشابه، روش ماتریس انتقال^۲ نام دارد. ایده این روش را برای مدل یک بعدی آیزینگ توضیح می دهیم ولی خواننده می تواند براحتی آن را برای مدل های دیگر و برای بعد ۲ نیز صورت بندی کند. فرض کنید که در هر نقطه از یک شبکه یک بعدی متغیری آماری داریم که آن را با S نشان می دهیم. S لزوماً دو مقدار ± 1 ندارد و می تواند Q مقدار مختلف را اختیار کند. برای سادگی نیز از S به عنوان متغیر اسپین نام می بریم اگر چه ممکن است واقعا S یک متغیر اسپینی نباشد. انرژی هر هیئت دلخواه از اسپین ها را نیز به ترتیب زیر می نویسیم:

^۲Transfer Matrix Method

$$H(S_1, S_2, \dots, S_N) = \sum_{i=1}^N h(S_i, S_{i+1}), \quad (14)$$

که در آن $h(S, S')$ یک تابع متقارن از S و S' است. شرط مرزی را نیز پر یودیک می گیریم یعنی $S_{N+1} = S_1$. تابع پارش برابر است با:

$$Z_N = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} e^{-\beta h(S_1, S_2)} e^{-\beta h(S_2, S_3)} \dots e^{-\beta h(S_{N-1}, S_N)} \quad (15)$$

حال ماتریس T را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\langle S | T | S' \rangle := e^{-\beta h(S, S')} \quad (16)$$

ماتریس T یک ماتریس $Q \times Q$ است و به آن ماتریس انتقال گفته می شود. بنابراین تابع پارش به این صورت در می آید:

$$Z_N = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} \langle S_1 | T | S_2 \rangle \langle S_2 | T | S_3 \rangle \dots \langle S_N | T | S_1 \rangle = \text{tr}(T^N) \quad (17)$$

در نتیجه محاسبه تابع پارش تبدیل می شود به محاسبه ویژه مقدارهای یک ماتریس $Q \times Q$ که از مسئله اولی بسیار ساده تر است. برای مدل آیزینگ T دوبعدی است. در این حالت داریم

$$\langle S | T | S' \rangle := e^{\beta J S S' + \frac{\beta h}{2}(S+S')} \quad (18)$$

و یا

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta J + \beta h} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta h} \end{pmatrix} \quad (19)$$

ویژه مقدارهای این ماتریس براحتی تعیین می شوند و برابرند با:

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \left(\cosh \beta J \pm \sqrt{\sinh^2 \beta J + e^{-4\beta J}} \right) \quad (20)$$

در نتیجه تابع پارش برابر خواهد بود با:

$$Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N \quad (21)$$

که در آن λ_1 ویژه مقدار بزرگ تر است. در حد ترمودینامیک یعنی وقتی که N به سمت بی نهایت میل می کند، خواهیم داشت:

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-kT \ln Z_N}{N} = -kT \ln \lambda_1. \quad (22)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$f = -J - kT \ln \left[\cosh \beta B + \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}} \right]. \quad (23)$$

تمام جملات درون f تحلیلی هستند. تنها وقتی یک نقطه غیرتحلیلی بوجود می آید که درون رادیکال برابر با صفر شود و این امر هیچ گاه اتفاق نمی افتد مگر وقتی که $T \rightarrow 0$ که در این صورت عبارت داخل رادیکال برابر می شود با $\sinh^2 \frac{B}{kT}$ و ما خواهیم داشت:

$$f_{T \rightarrow 0} = -J - \lim_{T \rightarrow 0} kT \ln \left[\cosh \frac{B}{kT} + \left| \sinh \frac{B}{kT} \right| \right] \quad (24)$$

در نتیجه f برابر می شود با:

$$f_{T \rightarrow 0} = \begin{cases} -J - kT \ln e^{\frac{B}{kT}} = -J - B & , \quad B > 0 \\ -J - kT \ln e^{-\frac{B}{kT}} = -J + B & , \quad B < 0 \end{cases} \quad (25)$$

به این ترتیب دیده می شود که در $T = 0$ ، تابع f یک ناپوستگی از خود نشان می دهد. به طور کلی با داشتن تابع انرژی آزاد می توانیم تمام خصوصیات ترمودینامیکی این سیستم را بدست آوریم. می دانیم که

$$m := \frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial \beta B}, \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial B}, \quad \epsilon = -\frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial \beta}, \quad C_B = \frac{\partial \epsilon}{\partial T}. \quad (26)$$

به این ترتیب با محاسبه سرراست بدست می آوریم

$$m = \frac{\sinh \beta B}{\sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}}. \quad (27)$$

این رابطه نشان می دهد که:

الف: وقتی که $B = 0$ باشد، m نیز برابر با صفر خواهد بود و این یعنی اینکه در این سیستم یک بعدی مغناطش خود بخود و شکست تقارن بوجود نمی آید.

ب: وقتی که $T \rightarrow 0$ یا $\beta \rightarrow \infty$ ، این رابطه بیان می کند که $m = \frac{B}{|B|}$.

ج: $m(B) = -m(-B)$.

از رابطه ۲۷ می توانیم نفوذپذیری مغناطیسی را نیز حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که:

$$\chi = \frac{\beta \cosh \beta B e^{-4\beta J}}{(\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J})^{\frac{3}{2}}}. \quad (28)$$

از جمله می توان نفوذپذیری مغناطیسی را در میدان مغناطیس $B = 0$ حساب کنیم:

$$\chi(B = 0) = \frac{e^{\frac{2J}{kT}}}{kT}. \quad (29)$$

۴.۲ توابع همبستگی

یک تابع همبستگی مثل $\langle S_i S_j \rangle$ را می توان به روش های مختلف حساب کرد. اما قبل از محاسبه بهتر است معنای آن را دریابیم. معلوم است که هر وقت S_i و S_j تمایل به هم جهت بودن داشته باشند، $\langle S_i S_j \rangle$ مقدار بیشتری دارد. این موضوع را به ترتیب زیر می توان دریافت: فرض کنید که دو متغیر تصادفی x و y تابع توزیع احتمال $P(x, y)$ را داشته باشند. این دو متغیر مقادیر $+1$ و -1 را اختیار می کنند. در این صورت داریم:

$$P(x = y) = P(1, 1) + P(-1, -1) = \langle \delta_{x,1} \delta_{y,1} \rangle + \langle \delta_{x,-1} \delta_{y,-1} \rangle \quad (30)$$

اما می توانیم بنویسیم $\delta_{x,1} = \frac{1+x}{2}$ و $\delta_{x,-1} = \frac{1-x}{2}$. در نتیجه می توان نوشت:

$$P(x=y) = \frac{1}{4} \langle (1+x)(1+y) \rangle + \frac{1}{4} \langle (1-x)(1-y) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \langle xy \rangle). \quad (31)$$

بنابراین نشان دادیم که:

$$P(S_i = S_j) = \frac{1}{2} (1 + \langle S_i S_j \rangle), \quad P(S_i = -S_j) = \frac{1}{2} (1 - \langle S_i S_j \rangle). \quad (32)$$

این رابطه نشان می دهد که تابع همبستگی $\langle S_i S_j \rangle$ مستقیماً به احتمال هم جهت بودن S_i و S_j مربوط است.

تابع همبستگی معنای دیگری نیز دارد. این کمیت در واقع نشان می دهد که مقدار مغناطش در نقطه i یعنی $\langle S_i \rangle$ چقدر نسبت به تغییرات میدان مغناطیسی در نقطه j حساس است. برای درک این نکته سیستمی را در نظر بگیرید که میدان مغناطیسی ناهمگن دارد. هامیلتونی این سیستم به شکل زیر است:

$$H = H_0(S_1, S_2, \dots, S_N) - \sum_i B_i S_i. \quad (33)$$

که در آن H_0 نشان دهنده برهم کنش های بین اسپین هاست که می تواند شکل خیلی کلی ای داشته باشد. همانطور که می بینید هامیلتونی این سیستم خیلی کلی است و مختص مدل آیزینگ نیست. در حقیقت نتیجه ای که بدست می آوریم کاملاً کلی است و ربطی به مدل خاص آیزینگ ندارد و در همه ابعاد نیز برقرار است. می دانیم که تابع پارش این سیستم به صورت زیر است:

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{\beta \sum_i B_i S_i - \beta H_0}. \quad (34)$$

برای سادگی نمادگذاری موقتاً نماد \tilde{B}_i را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\tilde{B}_i := \beta B_i$.
با توجه به این رابطه و این نماد بدست می آوریم:

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i}, \quad \langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{B}_i \partial \tilde{B}_j}. \quad (35)$$

حال عبارت $\frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial \tilde{B}_j}$ را حساب می کنیم:

$$\frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial \tilde{B}_j} = \frac{\partial}{\partial \tilde{B}_j} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_j} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{B}_j \partial \tilde{B}_i} \\
&= -\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle + \langle S_i S_j \rangle.
\end{aligned} \tag{۳۶}$$

بنابراین به طور کلی رابطه زیر را بین تابع همبستگی و تابع پاسخ^۳ یک سیستم مغناطیسی بدست آوردیم:

$$G(i, j) \equiv \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle - \langle S_i S_j \rangle = kT \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j}. \tag{۳۷}$$

این رابطه بیان می کند که تابع G_{ij} در واقع مقدار حساسیت مغناطش در نقطه i را نسبت به تغییرات میدان مغناطیسی در نقطه j می سنجد.

حال می پردازیم به محاسبه دقیق تابع همبستگی در مدل آیزینگ یک بعدی. مثل تابع پارش، محاسبه تابع همبستگی نیز بسته به بود یا نبود میدان مغناطیسی و یا نوع شرایط مرزی به روش های متفاوتی قابل انجام است. در زیر بعضی از این روش ها را توضیح می دهیم.

۱.۴.۲ محاسبه تابع همبستگی در غیاب میدان مغناطیسی

۱ - تابع پارش برابر است با:

$$Z(K_1, K_2, \dots, K_N) = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} e^{\sum_{i=1}^N K_i S_i S_{i+1}}, \tag{۳۸}$$

و $Z(K) = Z(K_1, K_2, \dots, K_N) |_{K_i=K}$ در این صورت داریم:

$$\langle S_i S_{i+1} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial K_i}, \quad \langle S_i S_{i+2} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial K_i \partial K_{i+1}}, \quad \langle S_i S_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^r Z}{\partial K_i \partial K_{i+1} \dots \partial K_{i+r-1}}. \tag{۳۹}$$

پس از مشتق گیری ها می توان K_i ها را مساوی K قرار داد. در شرایط مرزی باز براحتی می توان تابع پارش را حساب

Response Function^۳

کرد. این تابع پارش برابر است با:

$$Z = 2 \prod_{i=1}^{N-1} (2 \cosh K_i), \quad (40)$$

که از آن نتیجه می گیریم:

$$\langle S_i S_{i+r} \rangle = (\tanh K)^r. \quad (41)$$

می توانیم این رابطه را به شکل بهتری بنویسیم:

$$\langle S_i S_{i+r} \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (42)$$

که در مقایسه با رابطه قبلی مقدار زیر را برای ξ که به آن طول همبستگی می گوئیم بدست می دهد:

$$\xi = \frac{1}{\ln \coth K}. \quad (43)$$

۲.۴.۲ محاسبه تابع همبستگی به روش ماتریس انتقال

نخست روش بدست آوردن متوسط اسپین را در مرور می کنیم. می دانیم که

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} S_i e^{-\beta H} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} S_i \langle S_1 | T | S_2 \rangle \langle S_2 | T | S_3 \rangle \cdots \langle S_{i-1} | T | S_i \rangle \langle S_N | T | S_1 \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

حال ماتریس σ را چنان تعریف می کنیم که

$$\sigma |S\rangle = S |S\rangle \quad (45)$$

یعنی

$$\sigma |1\rangle = |1\rangle, \quad \sigma |-1\rangle = -|-1\rangle, \quad \rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

در این صورت رابطه () را به شکل زیر می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} \langle S_1 | T | S_2 \rangle \langle S_2 | T | S_3 \rangle \cdots \langle S_{i-1} | T \sigma | S_i \rangle \langle S_N | T | S_1 \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \text{tr}(T^{i-1} \sigma T^{N-i+1}) = \frac{\text{tr}(\sigma T^N)}{\text{tr} T^N}\end{aligned}\quad (47)$$

در حد ترمودینامیک تنها بزرگترین ویژه مقدار مهم است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle S_i \rangle = \langle \lambda_{max} | \sigma | \lambda_{max} \rangle. \quad (48)$$

به این ترتیب متوسط اسپین در مسئله مکانیک آماری کلاسیک در یک بعد تبدیل شده است به یک متوسط شبه کوانتومی در صفر بعد. یعنی متوسط یک عملگر σ که متناظر با اسپین هست روی یک حالت در یک فضای هیلبرت که دیگر نه مختص یک زنجیره یک بعدی بلکه مختص تنها یک اسپین است. این تناظر به صورت کلی تر و با دامنه وسیع تری قابل اثبات است به این معنا که یک مدل مکانیک آماری که روی یک شبکه d بعدی معادل است با یک سیستم کوانتومی در یک شبکه $d-1$ بعدی. در ادامه این درس بازهم به این تناظر بازخواهیم گشت. حال به محاسبه تابع همبستگی می پردازیم. بر خلاف روش های قبلی که تنها وقتی کاربرد داشتند که میدان مغناطیسی صفر بود، در این روش میدان مغناطیسی می تواند غیر صفر باشد. شرایط مرزی را پررودیک در نظر می گیریم و می نویسیم

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_i S_j \langle S_N | T | S_{N-1} \rangle \cdots \langle S_{i+1} | T | S_i \rangle \cdots \langle S_{j+1} | T | S_j \rangle \cdots \langle S_2 | T | S_1 \rangle. \quad (49)$$

با تعریف ماتریس σ_z به صورت $\sigma_z = \sum_{1,-1} S |S\rangle \langle S|$ یا $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\langle S_i S_j \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} \langle S_N | T | S_{N-1} \rangle \cdots \langle S_{j+1} | T \sigma_z | S_j \rangle \cdots \langle S_{i+1} | T \sigma_z | S_i \rangle \cdots \langle S_2 | T | S_1 \rangle \\ &= \frac{1}{Z_N} \text{tr}(\mathcal{T}^{N-j} \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z \mathcal{T}^i) \\ &= \frac{\text{tr}(\mathcal{T}^{N-j} \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z \mathcal{T}^i)}{\text{tr}(\mathcal{T}^N)}.\end{aligned}\quad (50)$$

در حد ترمودینامیک، وقتی که $N \rightarrow \infty$ تنها بزرگترین ویژه مقدار و ویژه بردار مربوط به ماتریس انتقال باقی می ماند و صورت و مخرج کسر بالا نیز ساده می شوند:

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{\langle \lambda_+ | \sigma_z T^{j-i} \sigma_z | \lambda_- \rangle}{\lambda_+^{j-i}}. \quad (51)$$

حال می خواهیم تابع همبستگی متصل یعنی $G_{i,j} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$ را در حد فاصله های بزرگ یعنی $|j-i| \gg 1$ بدست آوریم. دومین ویژه مقدار ماتریس انتقال را از نظر اندازه با λ_- نشان می دهیم. اگر یک عملگر واحد به صورت $I = \sum_\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda|$ قبل از σ_z باز کنیم و از توان $|j-i|$ بقیه ویژه مقدارها در مقابل ویژه مقدار اول و دوم صرف نظر کنیم بدست می آوریم:

$$\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = \lambda_+^{i-j} \langle \lambda_+ | \sigma_z T^{j-i} \sigma_z | \lambda_+ \rangle \quad (52)$$

برای $|j-i| \gg 1$ تابع همبستگی متصل به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle &= \lambda_+^{i-j} \langle \lambda_+ | \sigma_z T^{j-i} \sigma_z | \lambda_+ \rangle - \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle^2 \\ &= \lambda_+^{i-j} \left[\langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle \lambda_+^{j-i} \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle + \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_- \rangle \lambda_-^{j-i} \langle \lambda_- | \sigma_z | \lambda_+ \rangle \right] - [\langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle]^2 \\ &= \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{j-i} \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_- \rangle \langle \lambda_- | \sigma_z | \lambda_+ \rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

به این ترتیب می فهمیم که برای $|j-i|$ های خیلی بزرگ تراز 1:

$$G_{ij} \sim e^{|j-i| \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \sim e^{-\frac{|j-i|}{\xi}}, \quad (54)$$

که در آن ξ یعنی طول همبستگی برابر است با:

$$\xi = \frac{1}{\ln(\frac{\lambda_+}{\lambda_-})}. \quad (55)$$

بنابراین طول همبستگی توسط نسبت بزرگترین ویژه مقدار T به ویژه مقدار بعدی داده می شود. این نتیجه وقتی که مدل های فراتر از مدل آیزینگ یک بعدی نیز مطالعه می شوند درست است. در واقع استدلال بالا هیچ ربطی به یک مدل خاص نداشت و به طور کلی معتبر بود. از مدل آیزینگ یک بعدی داریم:

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_-} = \frac{\cosh \beta B + \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}}{\cosh \beta B - \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}} \quad (56)$$

در حالت های حدی این عبارت و در نتیجه طول هبستگی شکل ساده ای پیدا می کند. مثلا در میدان مغناطیسی صفر، خواهیم داشت:

$$\xi(B=0) = \frac{1}{\ln(\coth \frac{2J}{kT})}. \quad (57)$$

هم چنین براحتی می توان دریافت که:

$$\xi(T \rightarrow \infty) = 0, \quad \xi(T \rightarrow 0) \rightarrow \sim \frac{1}{2} e^{\frac{2J}{kT}} \rightarrow \infty. \quad (58)$$

۳ چرا در مدل آیزینگ یک بعدی گذار فاز رخ نمی دهد.

دیدیم که در مدل آیزینگ یک بعدی و در دمای غیر صفر گذار فاز رخ نمی دهد. در این بخش می خواهیم دلیل این پدیده را از نظر فیزیکی بفهمیم. این مسئله را می توان از راه های گوناگون توضیح داد.

۱.۳ استدلال مبتنی بر انرژی و شکست تقارن

حالت هایی را که می توانند نشان دهنده فاز منظم باشند در نظر می گیریم. این حالت ها در شکل () نشان داده شده اند و انرژی آنها بنابر تقارن یکسان است. فرض کنید که تمام اسپین ها در یکی از کمینه های انرژی مثل $C = (++++++\dots+)$ قرار گرفته باشند. حال فرض کنید که یکی از اسپین ها از حالت + به حالت - تغییر می کند و حالت $C_1 = (+++++-+++++\dots+)$ بدست می آید. تفاوت انرژی این حالت و حالت قبلی برابر است با $E(C_1) - E(C) = 4J$. حال فرض کنید که یکی دیگر از اسپین ها نیز برگردد و حالت $C_2 = (++++--+++++\dots+)$ تشکیل شود براحتی معلوم می شود که $E(C_2) - E(C_1) = 0$ و هرچند تا از اسپین ها را که برگردانیم دیگر احتیاجی به انرژی اضافی نداریم. معنای این حرف این است که حالت های $C = (++++++\dots+)$ و $C' = (-\dots-\dots-\dots-)$ تنها با یک سد انرژی میکروسکوپی به اندازه $4J$ از هم جدا شده اند و ارتفاع این سد ربطی به اندازه سیستم ندارد. بنابراین افت و خیزهای گرمایی اجازه نمی دهند که این سیستم یک بعدی در یکی از کمینه های انرژی گیر کند. به عبارت دیگر افت و خیزهای گرمایی اجازه شکست تقارن و پیدایش فاز منظم را نمی دهند.

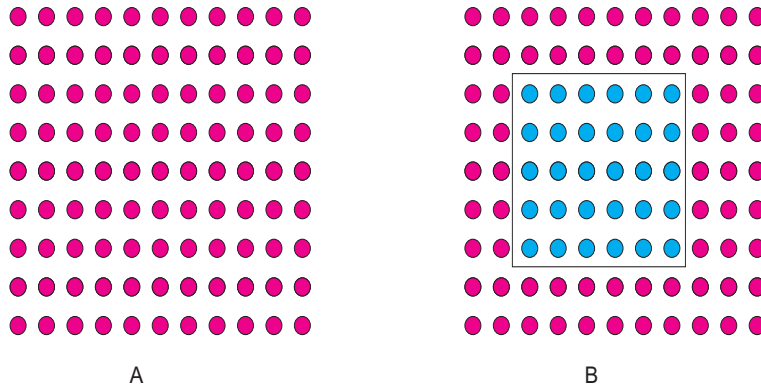
۲.۳ استدلال مبتنی بر انرژی آزاد

سیستمی که در دمای ثابت T قرار دارد، سعی می کند به طرف حالت هایی برود که انرژی آزاد آنها کمتر باشد و وقتی به تعادل می رسد که این انرژی آزاد به کمترین مقدار خود رسیده باشد. انرژی آزاد با تابع $F = E - TS$ داده می شود. حال باید از خود سوال کنیم که آیا حالتی مثل $C_0 = (++++++)$ می تواند حالتی باشد که در آن F کمترین مقدار خود را دارد؟ برای پاسخ به این سوال، انرژی آزاد حالت های نزدیک به C_0 را نگاه می کنیم. برای آنکه F در نقطه C_0 کمترین مقدار را داشته باشد می بایست انرژی آزاد حالت های نزدیک به C_0 از انرژی آزاد حالت C_0 بیشتر باشد. حالتی را در نظر بگیرید که در آن یکی از اسپین ها برگشته باشد. برای این حالت که آن را C' می نامیم، انرژی برابر است با $E_0 + 4J$ که در آن E_0 انرژی حالت C_0 است. ولی تعداد چنین حالت هایی N تا است زیرا اسپین منفی می تواند در هر جایی از شبکه ی N تایی اتفاق افتاده باشد. بنابراین انرژی آزاد برای یک حالت ماکروسکوپی که انرژی اش برابر با $E_0 + 4J$ است برابر است با $F_1 = E_0 + 4J - kT \ln(N)$. در نوشتن این رابطه از این استفاده کرده ایم که آنتروپی یک ماکرو حالت که تمام میکرو حالت هایش با احتمال یکسان اشغال می شوند برابر است با $k \ln \Omega$ که در آن Ω تعداد میکرو حالت های مربوطه است. اما رابطه فوق نشان می دهد که با افزایش N همواره F منفی می شود مگر وقتی که T برابر با صفر باشد. بنابراین هر وقت دمای غیر صفر داشته باشیم، حالت C_0 یا متناظر آن که همه اسپین ها منفی هستند نقاط کمینه تابع F و در نتیجه نقاط تعادل ترمودینامیکی نیستند. دقت کنید که این مسئله کاملاً مختص یک بعد است و در واقع برای همه مدل های یک بعدی که برهم کنش هایی با برد محدود دارند صادق است. این نوع استدلال در دو بعد و بالاتر نشان می دهد که گذار فاز در دمای محدود امکان پذیر است. در واقع اگر حالت C_0 و حالت های نزدیک به آن یعنی حالت هایی را که بعضی از اسپین ها برگشته اند، در دو بعد در نظر بگیریم آنگاه وضعیتی مثل شکل () داریم:

یک حالت منظم مثل آنکه در شکل () نشان داده شده و یک حالت کمی بی نظم که در آن گروهی از اسپین ها برگشته و تشکیل یک جزیره داده اند در نظر بگیرید. تفاوت انرژی این حالت را از انرژی حالت منظم با ΔE نشان می دهیم. اگر محیط جزیره را با L نشان دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta E = 2JL. \quad (59)$$

طبیعی است که تعداد زیادی میکرو حالت مشابه وجود دارد که همه آنها تفاوت انرژی شان با مقدار بالا نشان داده می شود. همگی این حالت ها جزیره های یک یا چند پارچه ای را نشان می دهد که مجموع محیط های آنها برابر با L است. تعداد این



شکل ۲: بازه‌نچارش در یک سیستم اسپینی. در مرحله اول روی اسپین‌های درون یک بلوک جمع می‌زنیم و در مرحله دوم مقیاس طول را بزرگ می‌کنیم به نحوی که بلوک‌ها به اندازه قبلی کوچک شوند. سیستم در حد ترمودینامیک است و بی‌نهایت اسپین و بلوک دارد.

جزیره‌ها را می‌توان تخمین زد. در واقع اگر تعداد چنین جزیره‌هایی را با N_L نشان دهیم می‌توانیم بنویسیم

$$N_L \approx (z-1)^L. \quad (60)$$

که در آن z تعداد همسایه‌های یک نقطه از شبکه است. دلیل این رابطه این است که می‌توان تصور کرد که محیط یک جزیره رد مسیری است که یک ولگرد از خود به جا می‌گذارد و این ولگرد در هر قدم از ولگشت خود $z-1$ انتخاب دارد و چون تعداد قدم‌ها برابر با L است بنابراین تعداد کل مسیرهای ممکن که می‌تواند طی کند با تقریب قابل قبولی از مرتبه بالا است. به این ترتیب بدست می‌آوریم که میزان تغییر انرژی آزاد برای این ماکرو حالت برابر است با:

$$\Delta F \approx \Delta E - T\Delta S = \Delta E - kT\Delta N_L = 2JL - kTL \ln(z-1) = L(2J - kT \ln(z-1)) \quad (61)$$

این رابطه نشان می‌دهد که یک دما وجود دارد که بالاتر از آن به هم خوردن نظم آیزینگ باعث کاهش انرژی آزاد می‌شود. این دما همان دمای گذار است و توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$T_c = \frac{2J}{k \ln(z-1)}, \quad (62)$$

در دماهای پایین تر از T_c نظم فرومغناطیسی پایدار است و در دماهای بالاتر، این نظم پایدار نیست. به چند نکته باید توجه کرد:

نکته اول: این تجزیه تحلیل و نتیجه آن برای هر مدل آماری با تقارن گسسته کاربرد دارد زیرا اساساً بر مفهوم دپواره حوزه^۴ مبتنی است که برای هر مدل با تقارن گسسته مطرح است.

نکته دوم: بعد $d = 1$ برای مدل های با تقارن گسسته بعد پایین بحرانی^۵ خوانده می شود زیرا گذار فاز در این مدل ها در این بعد و پایین تر از آن امکان پذیر نیست. برای مدل های پیوسته نظیر مدل هایزبرگ نشان داده می شود که بعد پایین بحرانی برابر با 2 است.

۴ مدل دو بعدی آیزینگ

در این بخش به بررسی حل دقیق مدل آیزینگ دو بعدی می پردازیم. نخستین بار لارس آنساگر^۶ در دهه ۱۹۴۰ توانست حل دقیق این مدل را البته در میدان مغناطیسی صفر بدست آورد و نشان دهد که این مدل واقعا در یک دمای محدود دچار گذار فاز شده و دارای مغناطش خود به خود می شود. حل آنساگر مبتنی بر روش ماتریس انتقال است. همانطور که می توانید حدس بزنید ماتریس انتقال برای مدل دو بعدی که دارای N سطر و N ستون است یک ماتریس 2^N بعدی است و بنابراین پیدا کردن بزرگترین ویژه مقدار آن به صورت تحلیلی و دقیق کار بسیار دشواری است. اهمیت کار آنساگر نیز این است که توانسته است این کار را انجام دهد و برای اولین بار به طور دقیق نشان دهد که گذار فاز ممکن است. از آن هنگام تا کنون نه تنها روش های مختلفی برای حل مدل آیزینگ کشف شده است بلکه مدل های متنوع دیگری نیز در دو بعد تعریف شده اند که به صورت دقیق قابل حل هستند. امروزه شاخه ای از فیزیک تحت نام «مدل های حل پذیر»^۷ یا «مدل های انتگرال پذیر»^۸ به مطالعه این نوع مدل ها هم در مکانیک آماری و هم در نظریه میدان و ارتباط آنها با یکدیگر می پردازد. در این بخش ما نخست به معرفی دو نوع بسط برای حل اختلالی مدل آیزینگ می پردازیم و سپس یک مفهوم مهم فیزیکی به نام دوگانگی^۹ را معرفی

Domain Wall^۴

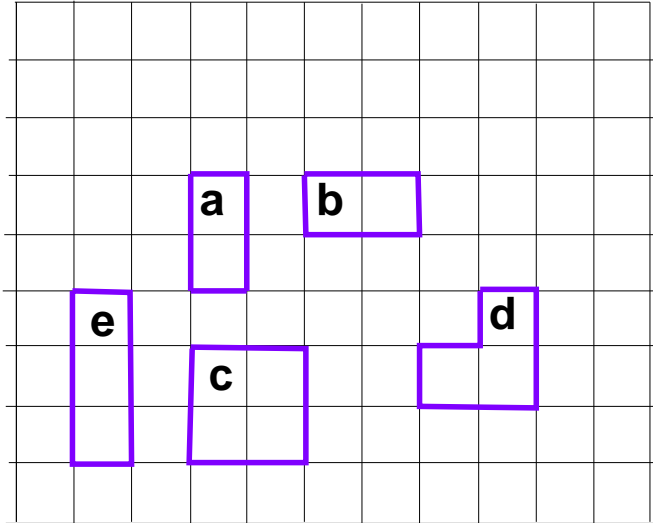
Lower Critical Dimension^۵

Lars Onsager^۶

Exactly Solvable Models^۷

Integrable Models^۸

Duality^۹



شکل ۳: حلقه های بسته در شبکه آیزینگ دوبعدی .

می کنیم که به کمک آن می توان نقطه گذار فاز را به فرض وجود به طور دقیق بدست آورد. دست آخریک روش حل برای مدل آیزینگ دوبعدی را مطالعه می کنیم.

۱.۴ بسط دمای بالا

بسط دمای بالا یک روش اختلالی است که در دماهای بالا یعنی وقتی که $J \gg kT$ باشد و سیستم تقریباً بی نظم باشد، مفید است. در واقع پارامتر بسط بستگی مستقیم به مقدار $\frac{J}{kT}$ دارد و بنابراین هر چه که دما بالاتر باشد می توان با جملات کمتری در بسط اختلالی تابع پارش مدل آیزینگ را با دقت خوب بدست آورد. می دانیم که هامیلتونی مدل آیزینگ به شکل زیر است:

$$H = -J \sum_{i,j} s_i s_j. \quad (63)$$

تابع پارش عبارت است از

$$Z = \sum_S e^{\beta J \sum_{i,j} s_i s_j} \equiv \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N} \prod_{links} e^{\beta J s_i s_j}. \quad (64)$$

براحتی می توان نشان داد که رابطه زیر همیشه برقرار است. صحت این رابطی متکی به این است که $s_i s_j$ همواره یا یک است و یا منهای یک .

$$e^{K s_i s_j} = \cosh K + s_i s_j \sinh K = \cosh K(1 + s_i s_j \tanh K) =: \cosh K(1 + s_i s_j \tau) \quad (65)$$

در نتیجه می توان تابع پارش را به شکل زیر بازنویسی کرد که در آن $\tau = \tanh \beta J$.

$$Z_N(\beta J) = \sum_S \prod_{links} \cosh \beta J(1 + s_i s_j \tau) = (\cosh \beta J)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \quad (66)$$

که در آن L تعداد تمام اتصالات شبکه است. برای یک شبکه مربعی در دو بعد که N تا اسپین دارد تعداد این اتصالات برابر است با $L = 2N$. در این جا فرض کرده ایم که شرایط مرزی پریودیک برقرار است. می توان این عبارت را برحسب قوای متوالی τ بسط داد. جملات اول بسط به ترتیب زیر خواهند بود :

$$\begin{aligned} Z &= (\cosh K)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \\ &= (\cosh K)^L \sum_S \left(1 + \tau \left(\sum_{links} s_i s_j \right) + \tau^2 \left(\sum_{doublelinks} s_i s_j s_k s_l \right) + \tau^3 \left(\sum_{triplelinks} s_i s_j s_k s_l s_m s_n \right) + \dots \right) \quad (67) \end{aligned}$$

که در آن ها $\sum_{doublelinks}$ به معنای جمع روی جفت های اتصالات مختلف و $\sum_{triplelinks}$ به معنای جمع روی تمام اتصالات سه تایی مختلف است والی آخر.

دقت کنید که متناظر با هر $s_i s_j$ یک اتصال در شبکه وجود دارد.

از آنجا که دردمای های بالا τ کوچک است و می توانیم این عبارت را برحسب قوای τ بسط دهیم این بسط به بسط دمای بالا مشهور است. حال توجه می کنیم که روابط زیر همیشه برقرارند که در آن ها \sum_S به معنای جمع روی وضعیت همه اسپین های شبکه است.

$$\sum_s 1 = 2 \quad \sum_s s = 0 \quad (68)$$

و

$$\sum_S 1 = 2^N \quad \sum_S s_i = 0 \quad (69)$$

در نتیجه در جمع های بالا عبارت هایی مثل عبارت زیر که در آن ها حتی یکی از s ها به صورت منفرد ظاهر شده باشد برابر با صفر خواهند بود:

$$\sum_S s_i s_j \cdots s_k = 0 \quad (70)$$

تنها عبارت هایی مخالف صفر خواهند بود که در آن هر کدام از s ها به صورت جفت ظاهر شده باشد. این حرف به این معناست که در رابطه (67) تنها جملاتی باقی خواهند ماند که اتصالات مربوط به آنها مانند شکل (3) یک منحنی بسته تشکیل دهند. یعنی

$$Z = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{Loop} \tau^{l_{Loop}} \quad (71)$$

که در آن N_l تعداد منحنی های بسته به طول l است.

که در آن جمع روی تمام منحنی های بسته است و l_{loop} محیط یک حلقه است و $Q(\tau)$ تابع مولد تعداد این منحنی هاست. می توان این رابطه را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$Z_N(K) = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{l=0}^{\infty} N_l \tau^l = (\cosh K)^{2N} 2^N Q_N(\tau) \quad (72)$$

که در آن N_l تعداد منحنی های بسته به طول l است.

دقت کنید که پارامتر τ وقتی که $\frac{J}{kT}$ کوچک باشد کوچک است به همین مناسبت این بسط را بسط دمای بالا می نامند.

۲.۴ بسط دمای پایین

در بخش گذشته بسط دمای بالا را مطالعه کردیم که بسطی است در فاز بی نظم. حال یک نوع دیگر بسط را مطالعه می کنیم که برای دماهای پایین مناسب است. برای فهم این بسط هامیلتونی را به شکل زیر می نویسیم:

$$H = J \sum_{i,j} (1 - s_i s_j) - 2N = H_0 - 2NJ \quad (۷۳)$$

دقت کنید که این هامیلتونی با هامیلتونی قبلی متفاوت نیست تنها به شکل متفاوتی نوشته شده است. می توانیم بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{\{s\}} e^{-\beta J \sum_{(i,j)} (1 - s_i s_j)} \quad (۷۴)$$

دقت کنید که با کم و زیاد کردن یک مقدار ثابت هامیلتونی را به شکلی نوشته ایم که به وضوح نشان می دهد حالت منظم یعنی حالتی که همه اسپین ها مثل هم هستند مقدار انرژی صفر دارد. و هر دو اسپین مجاوری که مثل هم نباشند مقدار انرژی را به اندازه $2J$ بالا می برند. بنابراین اگر یک حالت منظم مثل حالتی که همه اسپین ها در حالت $+1$ هستند را در نظر بگیریم این حالت انرژی صفر دارد. حال حالتی را در نظر بگیرید که در آن ها جزیره ای از اسپین ها برگشته اند و مقدار -1 را اختیار کرده اند. اگر محیط این جزیره برابر با l باشد، آنگاه انرژی این حالت برابر است با $2Jl$. دقت کنید که مهم نیست که این جزیره یک پارچه یا دو پارچه یا چندپارچه باشد. از آنجا که طول کل محیط آن برابر با l است انرژی آن برابر با $2Jl$ است. هر حالت دیگری را که در نظر بگیریم چیزی نیست جز جزیره هایی که در آنها اسپین ها برگشته اند و در نتیجه انرژی آن ها برابر است با $2J$ برابر طول کل محیط این جزیره ها. بنابراین تابع پارش را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{l=0}^{\infty} N_l e^{2\beta J l} \quad (۷۵)$$

دیده می شود که تابعی که در این بسط نیز وجود دارد همان تابع Q است اگر چه متغیر درون آن تغییر کرده است. بنابراین داریم

$$Z_N = e^{2\beta NJ} Q_N(e^{2\beta J}). \quad (۷۶)$$

۵ دوگانی

در درس های مقدماتی ریاضی با توابع زوج و فرد آشنا شده ایم. زوج بودن یک تقارن خیلی ساده است که باعث می شود با داشتن مقدار تابع برای یک متغیر، مقدار آن را برای یک مقدار دیگر از متغیر نیز بدست آوریم. یک تابع تناوبی نمونه

دیگری از یک تابع متقارن را نشان می دهد. یک مثال دیگر تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ است. هرگاه مقدار این تابع را برای $x = 10$ بدانیم مقدار آن نیز برای $x = 0.1$ نیز می دانیم. حال از خود سوال می کنیم که آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ نیز به نوعی چنین خاصیتی داشته باشد؟ آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ در دماهای بالا و پایین به هم مرتبط باشند؟ البته طبیعتاً انتظار داریم که این ارتباط در صورت وجود یک رابطه ساده مثل زوج بودن یا نظیر آن نباشد.

نخستین بار کرامرز و وانیر^{۱۰} متوجه شدند که این دو بسط کاملاً شبیه به هم هستند و به هم قابل تبدیل شدن هستند. آنها از این خاصیت استفاده کردند و با فرض اینکه یک گذار فاز وجود داشته باشد توانستند دمای گذار را به طور دقیق بدست آورند. این رابطه یعنی رابطه تابع پارش مدل آیزینگ در دمای بالا و در دمای پایین به دوگانی کرامرز- وانیر معروف است^{۱۱}. در این بخش سعی می کنیم دوگانی کرامرز- وانیر را بفهمیم. فرض کنید که یک مدل آیزینگ با ثابت برهم کنش J داریم. هرگاه بسط دمای بالا را برای تابع پارش این مدل را در دمای T بنویسیم خواهیم داشت:

$$Z_N(K) = 2^N (\cosh K)^{2N} Q_N(\tanh K) \quad (77)$$

که در آن $K = \frac{J}{kT}$.

حال فرض کنید که برای این مدل تابع پارش را در دمای T' بنویسیم و از بسط دمای پایین استفاده کنیم. آنگاه بنا بر رابطه (??) خواهیم داشت:

$$Z_N(K') = e^{2K'N} Q_N(e^{2K'}), \quad (78)$$

که در آن $K' = \frac{J}{kT'}$. آیا رابطه ای بین این دو تابع پارش یعنی تابع پارش یک مدل در دمای بالا و دمای پایین وجود دارد؟ دقت کنید که محاسبه تابع پارش برای مدل آیزینگ کار بسیار سختی است. اما علیرغم این سختی شاید بتوانیم چنین رابطه ای را پیدا کنیم. دلیل این کار هم این است که وقتی به رابطه های (77، 78) نگاه می کنیم می بینیم که هر دوی آنها بر حسب یک تابع نوشته شده اند اگرچه در این تابع متغیرهای متفاوتی برای دمای بالا و پایین به کار رفته است. خود این تابع را با سختی بسیار می توان حساب کرد ولی در این جا نیازی به محاسبه آن نداریم تنها این مهم است که در هر دو تابع پارش این تابع به کار رفته است. برای فهم رابطه دوگانی تنها کاری که باید بکنیم این است که تابع Q_N را بین دو عبارت تابع پارش (77، 78)

^{۱۰}Krammers and Wannier

حذف کنیم. البته لازمه این کار این است که متغیرهای دو تابع را با هم مساوی قرار دهیم. بنابراین قرار می دهیم

$$e^{2K'} = \tanh K. \quad (79)$$

تمرین: نشان دهید که رابطه بالا معادل است با رابطه زیر:

$$\sinh 2K \sinh 2K' = 1. \quad (80)$$

دقت کنید که این رابطه بیان می کند وقتی $K = \frac{J}{kT}$ کوچک است $K' = \frac{J}{kT'}$ بزرگ است و بالعکس. این امر به این معناست که وقتی T بزرگ باشد، T' کوچک است و بالعکس.

حال برای هر دو دمایی که در رابطه (80) صدق کنند داریم:

$$\frac{Z_N(K)}{2^N (\cosh K)^{2N}} = \frac{Z_N(K')}{e^{2K'N}}. \quad (81)$$

این همان رابطه ای است که می خواستیم یعنی تابع پارش مدل آیزینگ در دو دمای متفاوت که یکی بالاتر از J/k و دیگری پایین تر از J/k است به هم ربط داده شده اند. بازهم برمی گردیم به مثال ساده ای که در ابتدای این بخش به آن اشاره کردیم. فرض کنید به ما بگویند که یک تابع زوج تنها در یک نقطه غیرتحلیلی است یعنی یا خودش یا یکی از مشتق هایش ناپیوسته است. به نظر شما این نقطه چه نقطه ای است؟ آیا می توانید بدون دانستن شکل دقیق تابع تنها با اطلاعات داده شده یعنی اینکه تابع زوج است و تنها یک نقطه تکین دارد آن نقطه را پیدا کنید؟

براحتی می توانید خودتان را قانع کنید که پاسخ این سوال مثبت است و نقطه مورد نظر نقطه 0 است.

تمرین: هرگاه به شما بگویند که یک تابع دارای تقارن

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (82)$$

است و تنها یک نقطه غیرتحلیلی دارد، آن نقطه کدام است؟

هرگاه به ما بگویند که یک تابع دارای تقارن

$$g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + a \quad (83)$$

است که در آن a یک مقدار ثابت است و تنها یک نقطه غیر تحلیلی دارد، بازم با قطعیت می توانیم بگوییم که آن نقطه $x = 1$ است. چرا که اگر این تابع مثلاً در نقطه 2 غیر تحلیلی باشد، آنگاه رابطه بالا به این معناست که در نقطه $\frac{1}{2}$ نیز غیر تحلیلی است که ناممکن است.

بعد از این مثال های ساده به رابطه (۸۱) توجه می کنیم. برای وضوح بیشتر از طرفین رابطه (۸۱) لگاریتم می گیریم و طرفین را بر واحد تعداد ذرات حساب می کنیم. با تعریف $f := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N}$ بدست می آوریم

$$f(K) = f(K') + \ln 2(\cosh^2 K) - 2K' \quad (۸۴)$$

از استدلال و مشاهده فیزیکی می دانیم که در مدل آیزینگ، در صورت وجود، تنها یک نقطه گذار فاز وجود دارد یعنی این مدل تنها دو فاز یکی منظم و دیگری بی نظم دارد و اگر تابع پارش اش یا تابع انرژی آزاد، دارای تکینگی باشد این تکینگی فقط در یک نقطه است. یعنی نقطه ای که شرط $K = K'$ برقرار می شود. بنابراین نقطه گذار فاز با توجه به این تساوی و رابطه (۸۰) از رابطه زیر بدست می آید:

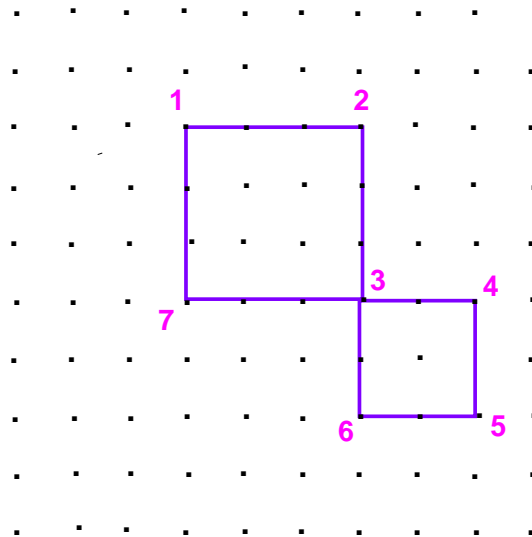
$$\sinh 2K_c \sinh 2K_c = 1. \quad (۸۵)$$

تمرین: از این رابطه استفاده کنید و نشان دهید که دمای بحرانی برابر است با:

$$kT_c = \frac{2J}{\ln(1 + \sqrt{2})}. \quad (۸۶)$$

۶ حل دقیق مدل آیزینگ دوبعدی

سرانجام در این بخش به حل دقیق مدل آیزینگ دوبعدی می رسیم. بخش مقدماتی کار را قبلاً انجام داده ایم به این معنا که مسئله را تبدیل کرده ایم به محاسبه تابع $Q_N(\tau)$ که نیازمند جمع روی تمام حلقه های بسته در شبکه است. دشواری کار در این است که وقتی که با حلقه های با محیط زیاد سرو کار داریم انواع خیلی زیادی از این منحنی ها وجود دارد که شمارش سیستماتیک آنها را دشوار می کند. با این وجود چنانچه در ادامه خواهیم دید این کار را می توان به طور دقیق انجام داد. برای ادامه بازمی گردیم به رابطه (۷۲). هدف ما محاسبه تابع Q_N است. نخست دقت می کنیم که در $Q(\tau)$ منظور از یک منحنی



شکل ۴: این حلقه بسته به چندین صورت (جهت) می تواند طی شود. ولی همه این جهت های گوناگون نمی بایست به صورت جداگانه شمرده شوند چون تنها نحوه اتصالات مهم است و نه جهت طی شدن حلقه.

تنها عبارت از مجموعه اتصالات موجود در آن است و نه اینکه این منحنی چگونه و یا درچه جهتی طی می شود. به عنوان مثال هر سه منحنی شکل (4) با هم معادلند و می بایست تنها یک بار شمرده شوند.

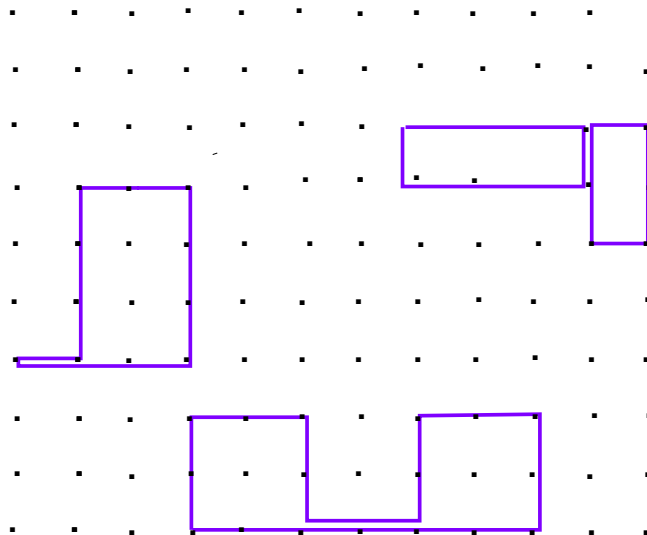
تذکر ۲: از آنجا که در هر جمله از بسط (67) هراتصال یک و فقط یک بار ظاهر می شود منحنی هایی نظیر شکل (5) مجاز نیستند.

برای محاسبه تابع $Q(\tau)$ نخست دقت می کنیم که در بسط $Q(\tau)$ هم حلقه های یکپارچه وجود دارند و هم حلقه های چند پارچه. اگر یک حلقه یک پارچه را با C ، طول آن را با l_C و تابع مولد آنها را با $W(\tau)$ نشان دهیم یعنی اگر

$$W(\tau) := \sum_C \tau^{l_C} \quad (87)$$

آنگاه رابطه ساده ای بین تابع مولد $W(\tau)$ و $q(\tau)$ وجود دارد به این معنا که

$$Q(\tau) = e^{W(\tau)}. \quad (88)$$



شکل ۵: سه نمونه از حلقه های غیرمجاز که در آن ها یک اتصال دوبار وجود دارد. منحنی بالای سمت راست یک منحنی دو پارچه و دو منحنی دیگر دو پارچه هستند.

برای اثبات این رابطه تنها کافی است که طرف راست را بسط دهیم :

$$Q(\tau) = 1 + \sum_C \tau^{l_C} + \frac{1}{2} \sum_{C, C'} \tau^{l_C + l_{C'}} + \frac{1}{3!} \sum_{C, C', C''} \tau^{l_C + l_{C'} + l_{C''}} + \dots \quad (۸۹)$$

اما این بسط دواشکال دارد. یکی اینکه منحنی هایی مثل آنها که در شکل (؟؟) نشان داده شده اند هرکدام یک بار ظاهر می شوند و حال آنکه این سه منحنی باید یکدیگر معادلند و می بایست تنهایی از آنها را به حساب آورد. ثانیاً منحنی های غیرمجازی نظیر آنها که در شکل (۵) نشان داده شده اند نیز در این بسط وجود دارند.

چگونه می توان این دو اشکال را برطرف کرد؟

خوشبختانه این دو اشکال را می توان برای مدل آیزینگ دو بعدی رفع کرد ولی برای مدل آیزینگ سه بعدی اگر چه همچنان روش بسط بر حسب حلقه ها برقرار است اما این دو اشکال قابل رفع نیستند.

اما در دو بعد راهی که می بایست در پیش گرفت آن است که به منحنی های مختلف وزن هایی آنچنان نسبت دهیم که هر منحنی مجاز با وزن یک ظاهر شود و وزن های منحنی های غیر مجاز یکدیگر را حذف کنند. یک قضیه در توپولوژی جواب این مسئله را بدست داده است و جواب این است که تابع $W(\tau)$ را می بایست نه به شکل (87) بلکه می بایست به شکل زیر

نشان داد:

$$W(\tau) := \sum_C (-1)^{P_C} \tau^{l_C} \quad (90)$$

که در آن جمع منحنی های یکپارچه C است. در این عبارت l_C طول منحنی C و P_C وزنی است که به منحنی C نسبت می دهیم. این وزن برای منحنی های سمت چپ در شکل (5) که شامل گام برگشتی هستند برابر با صفر و برای دیگر منحنی ها برابر با $(-1)^{W_C+1}$ است که در آن W_C عدد پیش آن منحنی است و به ترتیب زیر تعریف می شود:

$$W_C = \frac{N_R - N_L}{4} \quad (91)$$

که در آن N_R و N_L به ترتیب تعداد دورهای راست گرد و چپ گرد منحنی است. در نتیجه بجای عبارت (89) عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$Q(\tau) = 1 + \sum_C P(C) \tau^{l_C} + \frac{1}{2} \sum_{C, C'} P(C) P(C') \tau^{l_C + l_{C'}} + \frac{1}{3!} \sum_{C, C', C''} P(C) P(C') P(C'') \tau^{l_C + l_{C'} + l_{C''}} + \dots \quad (92)$$

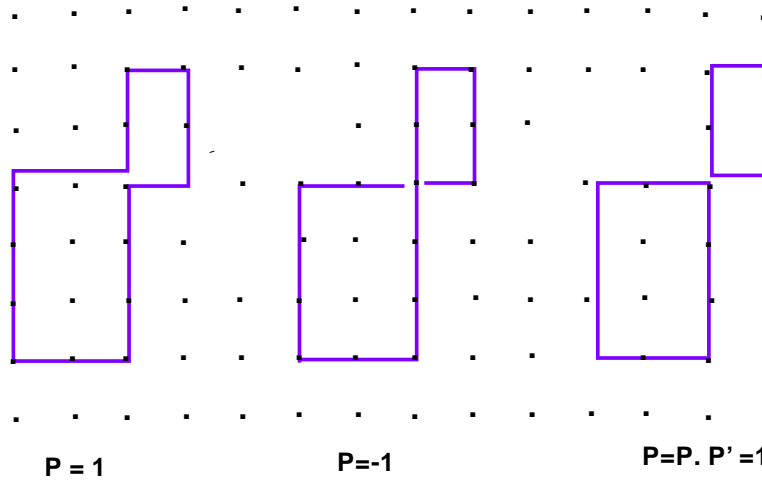
دیده می شود که وزن یک منحنی دو پارچه برابر با حاصلضرب مولفه های یک پارچه آن است. حال برای این که کاربرد این ضریب را بینیم به چند مثال توجه می کنیم.

نخست دقت می کنیم که یک منحنی یکپارچه بدون تقاطع وزن 1 می گیرد. و وزن یک منحنی چند پارچه برابر با حاصلضرب وزن های مولفه های آن است. شکل های (6) تا (9) نشان می دهند که چگونه منحنی های غیر مجاز یکدیگر را حذف می کنند.

برای آنکه وزن های گفته شده به منحنی ها نسبت داده شود کافی است که یک منحنی یکپارچه را به صورت مسیر حرکت یک ذره در نظر بگیریم و آن را در یک جهت طی کنیم و به هر گام رو به جلو وزن یک و به هر گام روبه عقب وزن صفر و به هر گردش به راست وزن $e^{i\frac{\pi}{4}}$ و به هر گردش به چپ وزن $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ نسبت دهیم. در این صورت به یک منحنی که شامل یک گام برگشت یا بیشتر باشد وزن صفر نسبت داده خواهد شد و برای یک منحنی که شامل گام برگشت نیست وزن

$$(e^{i\frac{\pi}{4}})^{N_R - N_L} = (e^{i\frac{\pi}{4}})^{4W_C} = (-1)^{W_C} = -P_C \quad (93)$$

نسبت داده خواهد شد. با این کار به منحنی های یکپارچه مجاز وزن -1 نسبت داده خواهد شد. دقت کنید که یک منحنی را می توان در دو جهت طی کرد و در هر دو مورد وزنها ی داده شده با هم برابرند.

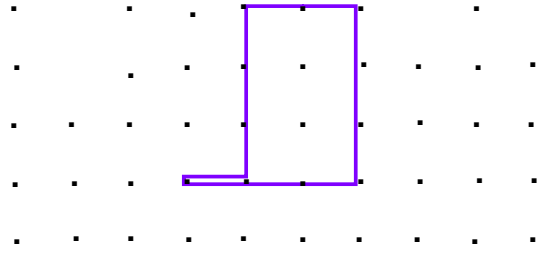


شکل ۶: وزن های منحنی های سمت چپ و وسط یکدیگر را خنثی می کنند.

در نتیجه این انتخاب تنها مسیرهای مجاز و غیرمقاطع وزن -2 (یک بار برای طی شدن در جهت ساعتگرد و یک بار هم برای طی شدن در مسیر پادساعتگرد) اختیاری کنند و دیگر مسیرها وزن صفر خواهند گرفت.

حال به نقطه ای رسیده ایم که می توانیم شمارش منحنی ها را بدون نگرانی از دوباره شماری آنها و یا شمارش منحنی های غیر مجاز شروع کنیم. هدف ما آن است که تعداد مسیرهای بسته به طول l را که یک ذره می تواند در شبکه طی کند بشماریم. فرض کنید که تعداد این مسیرها وقتی که این ذره از نقطه مبدأ شروع به حرکت کند برابر با n_l باشد. در این صورت تعداد کل مسیرهایی که می تواند در شبکه طی کند برابر است با $N_l := \frac{N n_l}{l}$. بنابراین کافی است که خود را محدود به مسیرهایی کنیم که از مبدأ شروع می شوند. مسئله ما حالا یک شکل کاملاً مشخص پیدا کرده است که در زیر برای وضوح آن را دوباره می نویسیم:

مسئله : متحرکی از مبدأ شروع به حرکت می کند. در هر گام که به جلو برمی دارد وزن τ را ذخیره می کند، در هر گردش به راست وزن $\tau e^{i\frac{\pi}{4}}$ و در هر گردش به چپ وزن $\tau e^{-i\frac{\pi}{4}}$ را ذخیره می کند. در هر گام که به عقب برمی دارد نیز وزن صفر را ذخیره می کند. وقتی که این متحرک به نقطه مبدأ بازمی گردد وزنی را ذخیره کرده است. می خواهیم بدانیم که کل وزنی را که این ذره می تواند با طی کردن تمام مسیرهای ممکن با طول l ذخیره کند چقدر است. هرگاه این وزن کل را محاسبه کنیم با تقسیم آن بر -2 تعداد کل مسیرهای بسته به طول l ، یعنی n_l را بدست می آوریم.



P=0

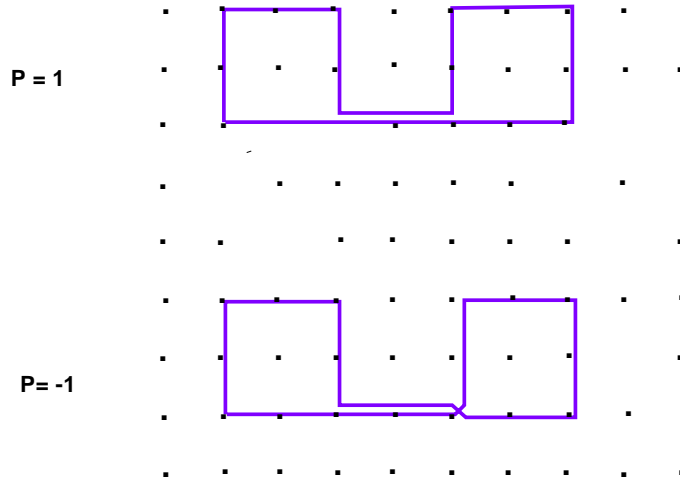
شکل ۷: به یک منحنی که دارای گام برگشت باشد وزن صفر نسبت داده می شود.

حل : متحرک از نقطه $(0,0)$ شروع به حرکت می کند و وقتی که بعد از طی کردن k گام به نقطه (x,y) می رسد وزن $M_k(x,y)$ را ذخیره کرده است. هرگاه آخرین گام را برای رسیدن به نقطه (x,y) به طرف راست بردارد این وزن را با $M^r_k(x,y)$ نشان می دهیم. همینطور وزن های $M^l_k(x,y)$ ، $M^u_k(x,y)$ و $M^d_k(x,y)$ را مطابق با اینکه آخرین گام را به طرف چپ، بالا و پایین بردارد تعریف می کنیم. حال می توانیم یک معادله تکرار برای این وزن ها به شکل زیر بنویسیم که در آن $\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}}$ و $\beta = e^{\frac{-i\pi}{4}}$ (نگاه کنید به شکل (Isinghighmaster)؟؟)

$$\begin{aligned}
 M^u_k(x,y) &= \tau M^u_{k-1}(x,y-1) + 0 M^d_{k-1}(x,y-1) + \beta \tau M^r_{k-1}(x,y-1) + \alpha \tau M^l_k(x,y-1) \\
 M^d_k(x,y) &= 0 M^u_{k-1}(x,y+1) + \tau M^d_{k-1}(x,y+1) + \alpha \tau M^r_{k-1}(x,y+1) + \beta \tau M^l_k(x,y+1) \\
 M^r_k(x,y) &= \alpha \tau M^u_{k-1}(x-1,y) + \beta \tau M^d_{k-1}(x-1,y) + \tau M^r_{k-1}(x-1,y) + 0 M^l_k(x,y-1) \\
 M^l_k(x,y) &= \beta \tau M^u_{k-1}(x+1,y) + \alpha \tau M^d_{k-1}(x+1,y) + 0 M^r_{k-1}(x,y-1) + \tau M^l_k(x,y-1) \quad (94)
 \end{aligned}$$

روابط تکرار فوق بر حسب مود های فوریه ساده تر می شوند:

$$\hat{M}_k^u(p,q) = \sum_{x,y} e^{ipx+iqy} M^u_k(x,y) \quad etc \quad (95)$$



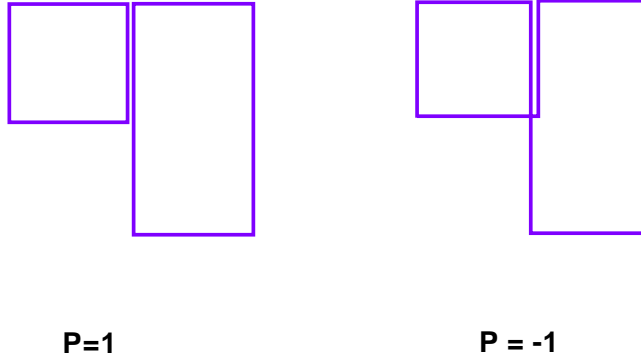
شکل ۸: نمونه ای از حذف منحنی ها که دارای اتصالات روی هم هستند.

در نتیجه روابط تکرار به صورت زیر درمی آیند:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_k^u(p, q) &= \tau e^{iq} \left(\hat{M}_{k-1}^u(p, q) + 0 \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + \beta \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + \alpha \hat{M}_k^l(p, q) \right) \\
 \hat{M}_k^d(p, q) &= \tau e^{-iq} \left(0 \hat{M}_{k-1}^u(p, q) + \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + \alpha \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + \beta \hat{M}_k^l(p, q) \right) \\
 \hat{M}_k^r(p, q) &= \tau e^{ip} \left(\alpha \hat{M}_{k-1}^u(p, q) + \beta \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + 0 \hat{M}_k^l(p, q) \right) \\
 \hat{M}_k^l(p, q) &= \tau e^{-ip} \left(\beta \hat{M}_{k-1}^u(p, q) + \alpha \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + 0 \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + \hat{M}_k^l(p, q) \right)
 \end{aligned} \tag{۹۶}$$

این رابطه را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_k^u(p, q) \\ \hat{M}_k^d(p, q) \\ \hat{M}_k^r(p, q) \\ \hat{M}_k^l(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau e^{iq} & 0 & \tau e^{iq} \beta & \tau e^{iq} \alpha \\ 0 & \tau e^{-iq} & \tau e^{-iq} \alpha & \tau e^{-iq} \beta \\ \tau e^{ip} \alpha & \tau e^{ip} \beta & \tau e^{ip} & 0 \\ \tau e^{-ip} \beta & \tau e^{-ip} \alpha & 0 & \tau e^{-ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{M}_{k-1}^u(p, q) \\ \hat{M}_{k-1}^d(p, q) \\ \hat{M}_{k-1}^r(p, q) \\ \hat{M}_{k-1}^l(p, q) \end{pmatrix} \tag{۹۷}$$



شکل ۹: نمونه دیگری از حذف منحنی هایی که دارای اتصالات روی هم هستند.

که می توان آن را به شکل خلاصه زیر نوشت :

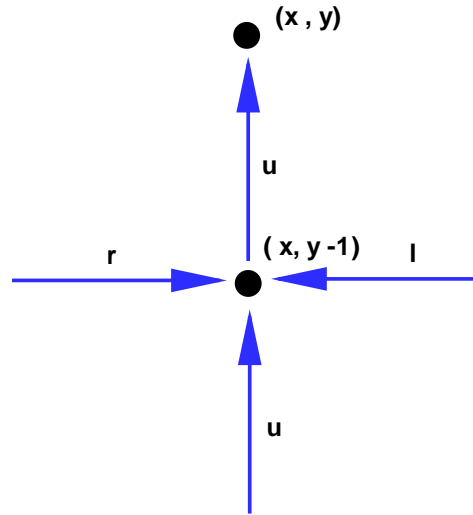
$$\hat{M}_k(p, q) = S\hat{M}_{k-1}(p, q) \quad (98)$$

و یا

$$\hat{M}_l = S^{l-1}\hat{M}_1 \quad (99)$$

حال احتیاج به شرایط اولیه داریم . در لحظه صفر متحرک می تواند قدم اول خود را در هر کدام از چهار جهت بالا، پایین، راست و یا چپ بردارد. خواننده براحتی می تواند تحقیق کند که در این شرایط به ترتیب خواهیم داشت :

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} e^{iq} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-iq} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{ip} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-ip} \end{pmatrix} \quad (100)$$



شکل ۱۰: شکلی که منجر به نوشتن اولین سطر از معادلات تکرار شده است. برای سطرهای دیگر نیز شکل های مشابه وجود دارد.

می بایست وزن کل بدست آمده را برای چهارنوع شرایط اولیه بالا با هم جمع کنیم. بنابراین با توجه به خطی بودن معادله

(99) می توانیم ماتریس های بالا را با هم جمع کنیم و بنویسیم :

$$\hat{M}_l = S^{l-1} M_1 \quad \text{where} \quad \hat{M}_1 = \begin{pmatrix} e^{iq} \\ e^{-iq} \\ e^{ip} \\ e^{-ip} \end{pmatrix} \quad (101)$$

هدف ماینداکردن کمیت زیراست :

$$n_l = \frac{-1}{2} (M_l^u(0,0) + M_l^d(0,0) + M_l^r(0,0) + M_l^l(0,0)) \quad (102)$$

که با توجه به رابطه (95) برابر است با :

$$n_l := \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq (\hat{M}_l^u(p,q) + \hat{M}_l^d(p,q) + \hat{M}_l^r(p,q) + \hat{M}_l^l(p,q)) \quad (103)$$

این کمیت را می توان با قطری کردن ماتریس S بدست آورد. فرض کنید که ماتریس S را قطری کنیم و ویژه مقادیرهای آن را با λ_1 تا λ_4 نشان دهیم که به ترتیب متناظر با ویژه بردارهای $|e_1\rangle$ تا $|e_4\rangle$ هستند. در این صورت هرگاه یک بردار پایه مرجع به شکل زیر تعریف کنیم :

$$\langle u| = (1, 1, 1, 1) \quad (104)$$

خواهیم داشت :

$$n_l = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \sum_{i=1}^4 \lambda_i^l \langle u|e_i\rangle \langle e_i|\hat{M}_1\rangle \quad (105)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} W(\tau) \equiv \sum_1^l \frac{N n_l}{l} &= \frac{-N}{4\pi^2} \sum_1^l \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \sum_{i=1}^4 \lambda_i^l \langle u|e_i\rangle \langle e_i|\hat{M}_1\rangle \\ &= \frac{N}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \sum_{i=1}^4 \ln(1 - \lambda_i) \langle u|e_i\rangle \langle e_i|\hat{M}_1\rangle \end{aligned} \quad (106)$$

بنابراین مسئله منتهی می شود به پیدا کردن ویژه مقادیرها و ویژه بردارهای ماتریس S . بعد از آنکه $W(\tau)$ را از رابطه بالا پیدا کردیم یافتن تابع پارش و انرژی آزاد सरراست است. خواهیم داشت:

$$Z = (2 \cosh^2 K)^N e^{Nw(\tau)} \quad (107)$$

که در آن $w(\tau) := \frac{1}{N} W(\tau)$ و از آنجا و

$$f(K) := \frac{-kT}{N} \ln Z = -kT (\ln(2 \cosh^2 K) + w(\tau)) \quad (108)$$

نتیجه نهایی بعد از پیدا کردن ویژه مقادیر ماتریس S و کمی محاسبه به شکل زیر درخواهد آمد.

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln(2 \cosh \beta) - \frac{1}{2\beta(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x \int_{-\pi}^{\pi} dp_y \ln[(1 + \tau^2)^2 - 2\tau(1 - \tau^2)](\cos p_x + \cos p_y). \quad (109)$$

۷ مسئله‌ها و تمرین‌ها

مسئله یک: مدل آیزینگ را با میدان مغناطیسی ولی با شرایط مرزی ثابت زیر در نظر بگیرید:

$$S_1 = 1, \quad S_N = 1. \quad (110)$$

با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پرئودیک بدست می‌آورد یکی است.

مسئله دو: مدل آیزینگ را با شرایط مرزی آزاد در نظر بگیرید به این معنا که اسپین‌های سر و ته زنجیره می‌توانند هر مقداری را اختیار کنند ولی الزاما با هم برابر نیستند. با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پرئودیک بدست می‌آورد یکی است.

مسئله سه: مدل آیزینگ را در میدان مغناطیسی صفر در نظر بگیرید ولی فرض کنید که ثابت جفت‌شدگی اسپین‌های مجاور به ترتیب J و $-J$ است. تابع پارش را بدست آورید و از روی آن انرژی آزاد را محاسبه کنید.

مسئله چهار: یک سیستم یک بعدی اسپین با هامیلتونی پادرومغناطیسی زیر در نظر بگیرید:

$$H = J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - B \sum_{i=1}^N (-1)^i S_i \quad (111)$$

شرایط مرزی را پرئودیک در نظر بگیرید و طول رشته را طوری بگیرید که این نوع شرط امکان پذیر باشد. حال تابع پارش را محاسبه کنید و سپس مغناطش متناوب را که به صورت زیر تعریف می‌شود حساب کنید:

$$M_s := \left\langle \sum_{i=1}^N (-1)^i S_i \right\rangle. \quad (112)$$

تغییرات M_s را به B حساب کنید. می‌توانید این کمیت را χ_s بنامید.

مسئله پنج : یک زنجیره اسپینی را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید:

$$H = \sum_{i=1}^N -JS_i S_{i+1} - KS_i S_{i+2} - B \sum_{i=1}^N S_i. \quad (113)$$

در این زنجیره هر اسپین با نزدیک ترین همسایه و هم چنین همسایه بعدی اش برهم کنش می کند. آیا این مدل گذار فاز از خود نشان می دهد؟ مغناطش را بر حسب میدان مغناطیسی بدست آورید. آیا مغناطش خود بخود پدیدار می شود؟

مسئله شش: در متن درس تابع همبستگی را برای مدل آیزینگ از روش مستقیم حساب کردیم. حال با استفاده از روش ماتریس انتقال و استفاده از رابطه $G(i, j) = kT \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j}$ تابع همبستگی را حساب کنید.

مسئله هفت: مدل $Q - State Potts$ به صورت زیر تعریف می شود. در هر نقطه ی i از شبکه یک متغیر S_i وجود دارد که می تواند Q متغیر متمایز از مجموعه $\{1, 2, \dots, Q\}$ اختیار کند. هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}} \quad (114)$$

در این مسئله توجه خود را به حالت $Q = 3$ معطوف می کنیم.

الف: زنجیره را باز بگیرید و با هر روشی که می توانید تابع پارش این مدل را حساب کنید. متوسط $\langle S_i \rangle$ و تابع همبستگی $\langle S_i S_j \rangle$ را حساب کنید. طول هم بستگی را بدست آورید.

ب: یک میدان خارجی اضافه کنید که در اثر آن هامیلتونی به شکل زیر در می آید:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}} - B \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, 1}. \quad (115)$$

با محاسبه تابع پارش متوسط $\langle S_i \rangle$ را حساب کنید. در این قسمت شرایط مرزی را پرریودیک در نظر بگیرید.

مسئله هشت: در مدل آیزینگ بدون میدان مغناطیسی و با شرایط مرزی پرریودیک احتمال این را که 3 اسپین مجاور مقدار

یکسان داشته باشند را حساب کنید. نتیجه خود را به k اسپین تعمیم دهید.

مسئله نه: مدل آیزینگ را روی یک زنجیره باز با طول N در نظر بگیرید. فرض کنید میدان مغناطیسی نیز برابر با صفر است. به حالتی که k تا اسپین سمت چپ همه در یک حالت مثلاً $+1$ هستند و بقیه اسپین های سمت راست در حالت -1 هستد اصطلاحاً حالتی با یک دیواره حوزه ۱۲ می گویند.

الف: احتمال اینکه در سیستم یک دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدر است؟

ب: احتمال اینکه در یک سیستم 2 تا دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدر است؟

ج: انرژی یک حالت برحسب تعداد دیواره های حوزه ای که دارد بنویسید. با شمارش تعداد حالت هایی که دارای k تا دیواره حوزه دارند تابع پارش مدل آیزینگ را حساب کنید.

د: تعداد متوسط دیواره های حوزه را در یک دمای خاص حساب کنید.

مسئله ده: مدل $3 - State Potts$ را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید: شرایط مرزی را پرئودیک در نظر بگیرید:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}}. \quad (116)$$

الف: تابع پارش این سیستم را حساب کنید.

ب: احتمال اینکه دو تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را محاسبه کنید.

^{۱۲}Domain Wall

پ: احتمال اینکه سه تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را حساب کنید.

مسئله یازده: با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش مدل آیزینگ یک بعدی را وقتی که میدان مغناطیسی صفر است به طور دقیق بدست آورید. هم چنین با استفاده از این روش تابع همبستگی بین دو اسپین را بدست آورید. شرایط مرزی را پرودییک در نظر بگیرید.

مسئله دوازده: تابع پارش مدل آیزینگ دو بعدی را در غیاب میدان مغناطیسی تا مرتبه τ^8 بدست آورید. در این جا $\tau = \tanh(\frac{J}{kT})$. هم چنین تا این رتبه تابع همبستگی بین دو اسپین دلخواه را بدست آورید.

مسئله سیزده: روشی را که برای بسط دمای بالا در مدل آیزینگ به کار بردیم برای مدل Q حالت پاتز $Potts$ در دو بعد تعمیم دهید. پارامتر اختلال را مشخص کنید. جملات اول بسط اختلالی برای تابع پارش را بدست آورید.

مسئله چهارده: مدل ۳ حالت پاتز را روی یک شبکه یک بعدی با شرایط مرزی پرودییک در نظر بگیرید. با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش این مدل را به صورت دقیق حساب کنید. آیا این مدل از خود گذار فاز نشان می دهد؟

مسئله پانزده: در مدل آیزینگ دو بعدی فرض کنید که دما پایین است یعنی $J \ll kT$. تابع پارش را تا مرتبه ۸ از پارامتر $\epsilon := e^{-\frac{J}{kT}}$ بدست آورید.

۸ ضمیمه: قضیه پرون-فروبنیوس

روش ماتریس انتقال بخصوص وقتی که توابع همبستگی را حساب می کنیم متکی است بر قضیه پرون-فروبنیوس^{۱۳}. این قضیه بیان می کند که هرگاه درایه های یک ماتریس T اکیدا مثبت باشند آنگاه بزرگترین مقدار ویژه این ماتریس یکتاست و واگنی ندارد.

^{۱۳}Peron-Ferrobenius

نخست به این نکته توجه می کنیم که ردّ ماتریس T مثبت است بنابراین بزرگترین ویژه مقدار آن حتماً مثبت است. برای بقیه اثبات نخست به قضیه نخست به قضیه رایلی^{۱۴} توجه می کنیم. بر مبنای این قضیه هرگاه یک ماتریس هرمیتی T داشته باشیم، و کمیت $\langle v|T|v \rangle$ در مجموعه بردارهای بهنجار $|v\rangle$ حساب کنیم، نقاط اکسترمم این تابع همان ویژه بردارهای T هستند. برای اثبات این تابع کافی است که با استفاده از ضرایب لاگرانژ وردش رتبه یک تابع

$$F(v) := \langle v|T|v \rangle - \lambda \langle v|v \rangle \quad (۱۱۷)$$

را مساوی با صفر قرار دهیم. این وردش منجر خواهد شد به:

$$\langle \delta v|(T - \lambda I)|v \rangle + \langle v|(T - \lambda I)|\delta v \rangle = 0. \quad (۱۱۸)$$

هرگاه به جای δv قرار دهیم $i\delta v$ به جای رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\langle \delta v|(T - \lambda I)|v \rangle - \langle v|(T - \lambda I)|\delta v \rangle = 0. \quad (۱۱۹)$$

که در نتیجه ترکیب دو رابطه به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید یعنی $\langle T|v \rangle = \lambda|v \rangle$ که در ضمن بیان می کند ضریب لاگرانژ همان ویژه مقدار است. این خاصیت برای همه ویژه مقدارها برقرار است. اما برای بزرگترین ویژه مقدار یک خاصیت اضافه برقرار است به این معنا که نقطه مربوطه تنها اکسترمم نیست بلکه ماکزیمم است. برای فهم آن هم کافی است که عبارت $F(v_0 + \delta v)$ را که در آن v_0 ویژه بردار مربوط به ویژه مقدار ماکزیمم یعنی λ_{max} است، تا رتبه دو بسط دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$F(v + \delta v) = \langle v + \delta v|T|v + \delta v \rangle - \lambda \langle v + \delta v|v + \delta v \rangle = F(v) + \langle \delta v|T - \lambda_{max}| \delta v \rangle. \quad (۱۲۰)$$

از آنجا که λ_{max} بزرگترین ویژه مقدار است خواهیم داشت:

$$\langle \delta v|T - \lambda_{max}| \delta v \rangle = \langle \delta v| \sum_i (\lambda_i - \lambda_{max}) |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| \delta v \rangle \leq 0. \quad (۱۲۱)$$

Rayleigh^{۱۴}

که ادعای قضیه را ثابت می کند.

حال از این قضیه استفاده می کنیم و نشان می دهیم که هرگاه درایه های T اکیدا مثبت باشند یعنی $T_{ij} > 0$ آنگاه درایه های v_0 نیز اکیدا مثبت هستند یعنی $(v_0)_i > 0$. برای نشان دادن این موضوع به این نکته توجه می کنیم که فضای بردارهای بهنجار متناظر با یک کره و بنابراین بدون مرز است. در نتیجه تابع $F(v)$ در نقطه v_0 نه تنها یک ماکزیمم نسبی دارد بلکه این ماکزیمم مطلق است. از برهان خلف استفاده می کنیم و فرض می کنیم که v_0 یک یا چند درایه منفی دارد. حال دقت می کنیم که عبارت $F(v_0)$ مجموع جملات مثبت و منفی است. اما با ضرب کردن این درایه های در عدد -1 بردار دیگری بدست می آوریم که هم بهنجار است و هم مقدار عبارت $F(v)$ را بزرگتر می کند که با ماکزیمم بودن $F(v_0)$ بدیل به مقدار بمقدار بزرگتری حاصل کند. منافات دارد. بنابراین v_0 نمی تواند دارای هیچ درایه ی منفی ای باشد. حال ثابت می کنیم که هیچ کدام از درایه های v_0 صفر نیز نمی توانند باشند زیرا اگر مثلا درایه اول آن برابر با صفر باشند به این معناست که عبارت زیر صفر شده است

$$\sum_{j=1}^d T_{1j}v_j = 0 \quad (122)$$

که با توجه به مثبت اکید بودن مقادیر T_{ij} و نامنفی بودن v_j ها غیرممکن است. پس ثابت کردیم که تمام درایه های v_0 اکیدا مثبت هستند. اما می دانیم که نمی توان دو بردار متعامد از این گونه داشت و از آنجا که ویژه بردارهای ماتریس هرمیتی همه بر هم عمودند نتیجه می گیریم که بزرگترین ویژه مقدار T واقعا غیر واگن است.