درس هفتم : مدل لانداو ـ گینزبورگ در ساده ترین مثال ممکن

وحیدکریمی پور ـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۷ دی ۱۳۹۲

۱ مقدمه

در درس ششم یاد گرفتیم که چگونه براي بررسي یک سیستم بس ذره اي در نزدیکي نقطه بحراني مي توانیم از جزئیات مدل هاي میکروسکوپي صرف نظر کنیم و تابع پارش را برحسب یک تابعي از میدانهایي که نشان دهنده افت وخیزها در مقیاس هاي بزرگ هستند بیان کنیم. حال در مرحله اي هستیم که مي بایست شروع به حل این مدل کنیم. حل کامل به معناي محاسبه دقیق تابع پارش است که همانطور که انتظار داریم براي اغلب مدل ها غیرممکن است. بنابراین مي بایست به یک حل تقریبي یا رشته اي از حل هاي سیستماتیک تقریبي که میزان دقت آنها مرتبه به مرتبه بهترمي شود بسنده کنیم. در این درس به جاي آنکه از یک مدل پیچیده شروع کنیم یک مدل بسیار ساده را که تنها داراي یک درجه آزادي است مطالعه مي کنیم. خوبي این کار دراین است که مي توانیم همه مراحل اساسي راه حل و خواص ریاضي و فیزیکي آن را در یک چارچوب ساده، بدون پیچیدگي هاي غیر ضروري بفهمیم. در بخش های بعدی نخست مدل را معرفی می کنیم، سپس در تقریب صفرم یا تقریب لانداو مدل را حل می کنیم. سپس به یک مرحله بالاتر می رویم و در تقریب گاووسی مدل را حل می کنیم و دست آخر هم یک روش سیستماتیک را ارائه می دهیم که به کمک آن می توان مدل را به صورت اختلالی و رتبه به رتبه حل کرد.

۲ یک مدل لانداو ـ گینزبورگ ساده با یک درجه آزادی

این مدل دارای تقارن Z_2 است یعنی برای $h = 0$ دارای تقارن $q \longrightarrow -1 \cdot q$ است. تابع پارش آن به شکل زیر است:

$$Z = \int dq e^{-L(q)} = \int dq e^{-(a_0 + a_2 q^2 + a_4 q^4 - hq)} \qquad (۱)$$

دراین جا فقط یک متغیر داریم که افت و خیز گرمایی می کند و احتمال این که این متغیر مقدار q را اختیار کند برابر است با:

$$P(q) = \frac{1}{Z} e^{-L(q)}. \qquad (۲)$$

حال که مدل را معرفی کرده ایم می خواهیم سعی کنیم که این مدل را حل کنیم . نخست باید ببینیم آیا در این مدل اصلا گذار فازی رخ می دهد یا خیر و اگر رخ می دهد خصوصیات فیزیکی مربوط به گذار فاز را از روی تاب پارش حساب کنیم.

۳ تقریب صفرم یا تقریب لانداو

در تقریب صفرم که به تقریب لانداو مشهور است، Z را برابر با $e^{L(\tilde{q})}$ می گیریم که در آن $\tilde{q}$ مقداری است که L را کمینه می کند. این بدان معناست که فرض کنیم q همواره محتمل ترین مقدار یعنی بیشینه $P(q)$ یا کمینه $L(q)$ را اختیار می کند و از افت و خیز های q حول این محتمل ترین مقدار صرف نظر می کنیم. بنابراین در این تقریب خواهیم داشت

$$Z \approx e^{-L(\tilde{q})}, \qquad \langle q \rangle = \tilde{q}$$

. نکته مهمی که اکنون ثابت می کنیم آن است که پارامتر نظم یا m نیز با این مقدار $\tilde{q}$ برابر است. از آنجا که متوسط q همان پارامتر نظم است که با m نشان داده می شود می توانیم بنویسیم:

$$m \equiv \langle q \rangle = \tilde{q}. \qquad (۳)$$

از رابطه (۱) داریم:

$$m = \langle q \rangle = \frac{\partial \ln Z}{\partial h} \qquad (۴)$$

می خواهیم ثابت کنیم که طرف راست همان مقدار $\tilde{q}$ است. در تقریب لانداو می دانیم که $Z \approx e^{-L(\tilde{q})}$ که در آن $\tilde{q}$ نقطه کمینه L است. L را به طور کلی به صورت زیر می نویسیم:

$$L(q) = L_0(q) - hq, \tag{۵}$$

که در آن هیچ فرضی هم راجع به فرم L_0 نکرده ایم. بنابراین استدلالی که می کنیم کاملا کلی است و ربطی به شکل L ندارد. پس در تقریب لانداو داریم

$$Z \approx e^{-L_0(\tilde{q})+h\tilde{q}} \tag{۶}$$

که در آن $\tilde{q}$ در رابطه زیر صدق می کند:

$$\frac{\partial L_0}{\partial \tilde{q}} = h. \tag{۷}$$

از رابطه (۶) و (۴) بدست می آوریم:

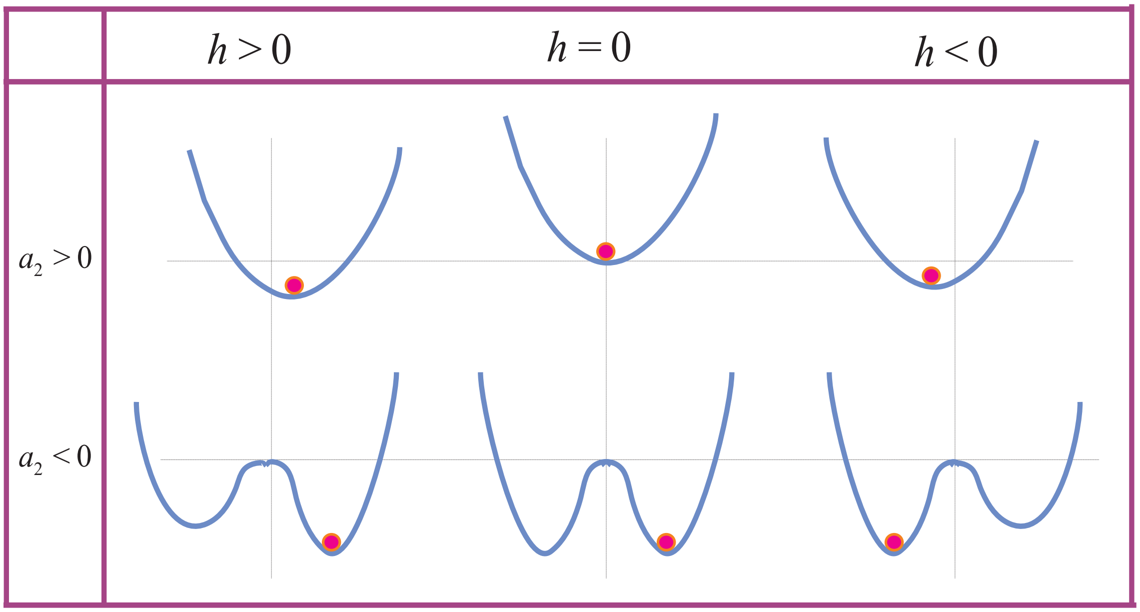
$$m = \frac{\partial}{\partial h}\left[-L(\tilde{q}) + h\tilde{q}\right] \tag{۸}$$

اما خود $\tilde{q}$ از طریق رابطه (۷) تابعی است از مقدار h . بنابراین طرف راست عبارت بالا خواهد شد:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}}\frac{\partial \tilde{q}}{\partial h} + h\frac{\partial \tilde{q}}{\partial h} + \tilde{q} \\ &= \frac{\partial \tilde{q}}{\partial h}\left(h - \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}}\right) + \tilde{q} = 0 + \tilde{q} = \tilde{q}. \end{aligned} \tag{۹}$$

بنابراین ثابت کردیم که مستقل از فرم L همواره رابطه $m = \tilde{q}$ برقرار است. بدیهی است که این نتیجه برای مدل های کاملا پیچیده نیز که درجات آزادی آنها را میدان ها تشکیل می دهند نیز معتبر است. بازمی گردیم به مدل (۱). نگاه ساده ای به فرم L نشان می دهد که نقطه کمینه L بستگی به علامت های h و a_2 دارد. این بستگی ها در شکل زیر نشان داده شده است: توجه به چند نکته مهم است.

۱ـ نخست به حالتی توجه کنید که $h = 0$ است. اگر $a_2 > 0$ باشد، $\tilde{q} = 0$ ولی برای $a_2 < 0$ $\tilde{q}$ دو مقدار یکسان با علامت های مختلف دارد که احتمال وقوع هر دو یکسان است و هرکدام می توانند به عنوان محتمل ترین مقدار qو در نتیجه m اختیار



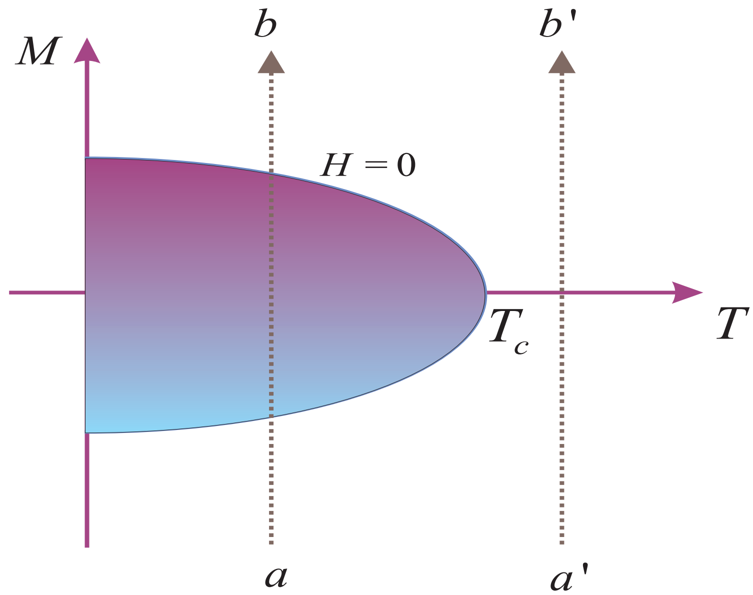
شکل ۱: تابعی لانداو و کمینه آن در شرایط مختلف برای یک مدل ساده .

شوند. هرکدام از این دو مقدار که اختیار شوند به این معناست که پارامتر نظم مقدار غیر صفر به خود گرفته است و تقارن Z_2 شکسته شده است. رابطه این دو مقدار کمینه با یکدیگر این است که تحت عمل گروه تقارنی Z_2 به هم تبدیل می شوند. این شکل نشان می دهد که a_2 در موقع گذار فاز یعنی در $T=T_c4$ تغییر علامت می دهد و بنابراین می توان نوشت

$$a_2(T)=a_2'(T)(T-T_c)\approx a_2'(T-T_c), \qquad (۱۰)$$

که در آن $a_2'(T)$ تابعی است که در نزدیکی نقطه گذار فاز هموار است و بنابراین می توان آن را در نزدیکی نقطه گذار فاز برابر با یک ثابت مثل a_2' گرفت.

۲ـ اگر به حالت $T>T_c$ یعنی ردیف بالا در شکل نگاه کنیم متوجه می شویم که با تغییر h از منفی به مثبت m نیز به طور پیوسته از مقدار منفی تغییر کرده و بتدریج مقدار آن کم می شود و از نقطه $m=0$ می گذرد و به طور پیوسته زیاد شده و به مقدارهای مثبت می رسد. بنابراین، این تغییرات با h نشان دهنه یک گذار فاز پیوسته است که در شکل زیر با خط abر نشان داده شده است.



شکل ۲: تغییرات مغناطش برحسب میدان مغناطیسی در دمای بالاتر و پایین تر از دمای بحرانی

۳ ـ حال ردیف پایین شکل را در نظر بگیرید که در آن $T<T_c$ است. اگر بازهم مقدار h را از مقادیر منفی زیاد کنیم و سرانجام به مقدار مثبت برسیم (یعنی شکل سمت راست) و از مقدار $h=0$ نیز عبور کنیم از منطقه $m=0$ عبور نمی کنیم بلکه در این نقطه یعنی در $h=0$ هر دو حالت $m>0$ و $m<0$ با هم همزیستی دارند. این گذار نشان دهنده یک گذار فاز نوع اول است که با خط $a'b'$ در شکل بالا مشخص می شود.

پس از این ملاحظات کیفی به مطالعه کمی مدل بالا می پردازیم. نخست مقدار $\tilde{q}$ را بدست می آوریم: از روابط () و () داریم:

$$2a_2\tilde{q}+4a_4\tilde{q}^3-h=0. \qquad (۱۱)$$

اگر $h=0$ باشد معادله بالا تبدیل می شود به $2a_2\tilde{q}+4a_4\tilde{q}^3=0$ که حل آن به ترتیب زیر است:

$$\tilde{q}=\begin{cases} 0 & a_2>0(T>T_c) \\ \pm\sqrt{\frac{-a_2}{2a_4}}^{\frac{1}{2}} & a_2<0(T<T_c) \end{cases} \tag{۱۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$m(h=0)=\begin{cases} 0 & T>T_c \\ \pm\sqrt{\frac{-a_2'(T-T_c)}{2a_4}}^{\frac{1}{2}} & T<T_c \end{cases} \tag{۱۳}$$

که از آن نتیجه می گیریم $\beta=\frac{1}{2}$. هم چنین از رابطه () نتیجه می گیریم

$$m(T=T_c)\sim h^{\frac{1}{3}}, \qquad \longrightarrow \qquad \delta=3. \tag{۱۴}$$

برای این مدل تا کنون نماهای β و δ را بدست آورده ایم. حال دو باره به معادله (۱۱) که معادله حالت را نشان می دهد نگاه می کنیم و آن را به شکل زیر می نویسیم زیرا که می دانیم $m=\tilde{q}$:

$$2a_2m+4a_4m^3=h. \tag{۱۵}$$

از طرفین این رابطه نسبت به h مشتق می گیریم و $\frac{\partial m}{\partial h}$ را نیز χ می نامیم که همان نفوذ پذیری مغناطیسی است:

$$2a_2\chi+12a_4m^2\chi=1, \tag{۱۶}$$

که از آن نتیجه می شود:

$$\chi=\begin{cases} \frac{1}{2a_2}=\frac{1}{2a_2'(T-T_c)}\equiv\frac{A_+}{T-T_c} & T_c<T \\ \frac{-1}{4a_2}=\frac{1}{4a_2'(T_c-T)}\equiv\frac{A_-}{T_c-T} & T_c>T \end{cases} \tag{۱۷}$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$\gamma=1, \qquad \frac{A_+}{A_-}=2. \tag{۱۸}$$

نکته مهم این است که مقادیر نماهای β ، δ ، γ و $\frac{A_+}{A_-}$ کاملا مستقل از پارامترهای a_0 ، a_2 و a_4 یعنی مستقل از جزئیات مدل هستند.

تمرین: در تقریب لانداو، تابع انرژی آزاد را در بالای دمای بحرانی و پایین دمای بحرانی بدست آورید. نشان دهید که تابع انرژی آزاد پیوسته است ولی مشتق آن پیوسته نیست.

تمرین: ظرفیت گرمایی ویژه را در تقریب لانداو بدست آورید و نشان دهید که مقدار آن در نقطه بحرانی واگرا نیست ولی ناپیوسته است. مقدار این ناپیوستگی را بدست آورید.

۴ تقریب گاووسی

در تقریب گاووسی یک گام فراتر می رویم و افت و خیزهای اطراف نقطه $\tilde{q}$ را تا مرتبه دوم به حساب می آوریم. به این ترتیب تابع پارش برابرمی شود با:

$$Z \approx e^{-L(\tilde{q})} \int dq e^{-\frac{1}{2}L"(\tilde{q})}(q-\tilde{q})^2 \qquad (۱۹)$$

نام تقریب گاووسی از این گرفته شده است که انتگرال طرف راست یک انتگرال گاووسی است که می دانیم به راحتی قابل محاسبه هستند. بنابراین در این مرتبه از تقریب تابع پارش برابر است با:

$$Z \approx e^{-L(\tilde{q})} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{L"(\tilde{q})}} \sim e^{-L(\tilde{q}-\frac{1}{2}\ln L"(\tilde{q}))} \qquad (۲۰)$$

دقت کنید که در تساوی آخر از نماد$\sim$ استفاده کرده ایم که به این معناست که از ضریب عددی کلی در تابع پارش صرف نظر کرده ایم زیرا این ضریب هیچ تاثیری در محاسبه کمیت های ترمودینامیکی ندارد.

تابع انرژی آزاد برابر می شود با:

$$F = kT\left[L(\tilde{q}) + \frac{1}{2}\ln L"(\tilde{q})\right] \qquad (۲۱)$$

تمرین: نشان دهید که در تقریب گاووسی، معادله حالت یعنی معادله ۱۵ تغییر نمی کند یعنی همان معادله حالتی که در تقریب لانداو بدست آورده ایم در این تقریب نیز معتبر است

تمرین: نشان دهید که دمای گذار فاز نیز در تقریب گاووسی نسبت به تقریب لانداو تغییر نمی کند. بنابراین نشان دهید که نماهای بحرانی β ، γ و δ نیز در این تقریب نسبت به تقریب لانداو تغییری نمی کنند.

تمرین: در تقریب گاووسی تابع انرژی آزاد را در بالا و پایین دمای گذار بدست آورید. نشان دهید که اولا این توابع نسبت به تقریب لانداو تغییر کرده اند. نشان دهید که ظرفیت گرمایی ویژه در نقطه گذار فاز تنها یک ناپیوستگی ندارد بلکه دارای واگرایی است. نوع این واگرایی را حساب کنید و از روی آن نمای مربوط به ظرفیت گرمایی ویژه را بدست آورید.

دقت کنید که مقدار پارامتر q علاوه بر محتمل ترین مقدار یعنی $\tilde{q}$ مقادیر نزدیک به آن را نیز اختیار می کند، در واقع این مقادیر با یک احتمال گاووسی اختیار می شوند. بنابراین در این تقریب می توانیم از خود بپرسیم که مقدار متوسط پارامتر q یا مقدار واریانس آن چقدر است.

تمرین: الف : فرض کنید که $h=0$ است. مقدار کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle q\rangle, \qquad \langle q^2\rangle, \qquad \langle q^3\rangle, \qquad \langle q^4\rangle. \tag{۲۲}$$

ب: حال فرض کنید که $h\neq 0$ است. مقدار همان کمیت های فوق را حساب کنید.

۵ روش اختلال

تابع پارش این مدل را وقتی که پارامتر a_4 کوچک نیست، نمی توان به طور دقیق حساب کرد. طبیعتا نتایج فیزیکی ای نیز که از تابع پارش می گیریم نمی توانند دقیق باشند. دیدیم که نتایج تقریب گاووسی از تقریب لانداو که به کلی افت و خیزهای حول نقطه $\tilde{q}$ را نادیده می گرفت بهتر بودند. لااقل نتیجه ای که در مورد ظرفیت گرمایی ویژه حاصل می شد تطابق بیشتری با تجربه

داشت. (اگر چه این مدل یک مدل خیلی ساده است ولی بسیاری از عناصر مدل های جامع تر و کلی تر را که به درد مقایسه با نتایج تجربی می خورند در بر دارد.). به این ترتیب می توان امیدوار بود که یک بسط بر حسب قوای پارامتر a_4 بتواند به شیوه ای کاملا سیستماتیک نتایجی فیزیکی را به دست بدهد که در هر درجه از تقریب نسبت به درجه قبلی بهتر باشند. برای این کار به تابع پار ش توجه می کنیم. داریم:

$$Z = \int dq e^{-a_0 - a_2 q^2 - a_4 q^4} \qquad (۲۳)$$

نخست توجه می کنیم که نقش پارامتر a_0 تنها این است که تابع پارش را در یک عدد ثابت ضرب می کند. این عدد ثابت هیچ نقشی در کمیت های ترمودینامیکی و هم چنین در مقادیر متوسط کمیت ها ندارد. حتی در میزان ناپیوستگی مشتقات تابع انرژی ازاد نیز نقشی ندارد. بنابراین می توان این پارامتر را برابر با صفر در نظر گرفت و در آینده نیز از تمامی اعداد ثابتی که در تابع پارش ضرب می شوند صرف نظر کرد. هم چنین خوب است که برای سادگی نام پارامتر ها را تغییر دهیم و آنها را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$Z(\Delta, \lambda) = \int dq e^{-\frac{1}{2}\Delta q^2 - \lambda q^4}. \qquad (۲۴)$$

آنچه که می دانیم این است که پارامتر Δ در نقطه بحرانی به سمت صفر میل می کند. فرض هم می کنیم که پارامتر λ یک پارامتر کوچک است و می توان تابع پارش را بر حسب قوای متوالی آن بسط داد. برای این کار می نویسیم:

$$Z(\Delta, \lambda) = \int dq e^{-\frac{1}{2}\Delta q^2} e^{-\lambda q^4} = \int dq e^{-\frac{1}{2}\Delta q^2} \left[1 - \lambda q^4 + \frac{1}{2}\lambda^2 q^8 + \cdots\right] \qquad (۲۵)$$

تمرین: الف: انتگرال های زیر را به هر ترتیبی که می توانید حساب کنید:

$$\int dq e^{-\frac{1}{2}\Delta q^2}, \qquad \int dq e^{-\frac{1}{2}\Delta q^2} q^{2n}. \qquad (۲۶)$$

ب: با استفاده از قسمت الف تابع پارش $Z(\Delta, \lambda)$ را به صورت یک بسط توانی بنویسید. نشان دهید که پارامتر بسط توانی عبارت است از $\frac{\lambda}{\Delta^2}$ و در واقع نشان دهید که تابع پارش شکل زیر را دارد:

$$Z(\Delta, \lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} f(\frac{\lambda}{\Delta^2}). \qquad (۲۷)$$

بسط توانی تابع f را پیدا کنید.

تمرین: از این به بعد توجه خود را به تابع f محدود می کنیم. برای این تابع یک بسط توانی داریم که از طریق نظریه اختلال محاسبه می شود و همان بسطی است که در قسمت قبلی تمرین پیدا کرده اید و یک عبارت دقیق هم داریم که با توجه به رابطه بالا به شکل زیر نوشته می شود:

$$f(\frac{\lambda}{\Delta}) = \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} \int dq e^{-\frac{1}{2}\Delta q^2 - \lambda q^4}. \qquad (۲۸)$$

هدفِ این تمرین این است که ما را با مشکلات ساختاری نظریه اختلال آشنا کند. این دشواری ها نشان می دهد که چرا پدیده های بحرانی موضوعی است که تا به این حد از دسترس روش های متعارف ما به دور است.

الف : با استفاده از یک نرم افزار مثل $Mathematica$ یا $Maple$ تابع f را یک بار با استفاده از بسط توانی تا رتبه ۴ و یک بار هم با محاسبه عددی با استفاده از تعریف انتگرال اولیه حساب کنید. برای مقایسه این دو جواب بدست آمده نخست پارامتر Δ را مساوی یک قرار دهید. سپس در روی یک شکل هردو تابع را برای محدوده ی $\lambda = 0$ تا $\lambda = 0.008$ رسم کنید.

ب: حال محدوده مقایسه خود را بزرگتر کنید و حد بالای مقایسه را به ترتیب مساوی با $\lambda = 0.009$ ، $\lambda = 0.01$ ، $\lambda = 0.011$ ، $\lambda = 0.012$ ، $\lambda = 0.13$ $\lambda = 0.15$ قرار دهید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟ آیا از روی جوابهایی که بدست آورده اید می توانید راجع به دقت روش اختلال و محدوده اعتبار آن قضاوت کنید؟ قضاوت شما چیست؟

اگر خوب دقت کرده باشید ، وقتی که در تمرین قبلی مقدار λ را مثلا برابر با 0.012 اختیار می کنیم به این معناست که در واقع نسبت $\frac{\lambda}{\Delta^2}$ برابر با 0.012 است. بنابراین اگر به مسئله اصلی پدیده های بحرانی برگردیم متوجه می شویم که با نزدیک شدن به نقطه بحرانی پارامتر Δ کوچک و کوچک تر می شود و این به این معناست که پارامتر بسط اختلالی نیز بزرگ و بزرگ تر می شود. به این معنا بسط اختلالی که در پدیده های بحرانی داریم یک تفاوت اساسی با بسط اختلالی که در نظریه های کوانتمی مثل الکترودینامیک داریم متفاوت است زیرا در الکترودینامیک پارامتر اختلال یعنی ثابت برهم کنش الکترودینامیک مقدار کوچک و ثابت $\alpha = \frac{1}{137}$ است و حال آنکه در پدیده های بحرانی پارامتر اختلال با نزدیک شدن به نقطه بحرانی بزرگ می شود. نقش Δ را در الکترودینامیک کوانتومی جم الکترون بازی می کند که مقدار ثابتی است.

پ: نسبت دو جمله متوالی یعنی جمله $n+1$ ام و جمله n ام از بسط توانی تابع پارش را بنویسید. این نسبت تابعی است

از n و مقدار پارامتر $\frac{\lambda}{\Delta^2}$. اولا نشان دهید که پارامتر بسط تابع واقعا λ نیست بلکه $\frac{\lambda}{\Delta^2}$ است، اگر چه ما در زیر انتگرال تابع $e^{\lambda q^4}$ بسط داده ایم. ثانیا نشان دهید که بسط توانی به ازای هر مقدار غیر صفر از $\frac{\lambda}{\Delta^2}$ واگراست. به عبارت دیگر این بسط شعاع هم گرایی اش برابر با صفر است. این حرف به این معناست که اگر تمام جملات سری توانی را باهم جمع کنیم همواره به مقدار بی نهایت می رسیم و هیچ گاه حاصل جمع این جملات با مقدار دقیق انتگرال برابر نیست. در این مرحله می توانیم از خود بپرسیم که پس بسط توانی به چه دردی می خورد؟ برای این که پاسخ این سوال را بهتر بفهمیم به یک تمرین دیگر نیاز داریم.

تمرین: هم چنان Δ را برابر با 1 قرار دهید و λ را برابر با 0.01 . با استفاده از یک نرم افزار مقدار عددی انتگرال را حساب کنید. حال از بسط توانی استفاده کنید. وقتی که بسط توانی را تا رتبه N جمع می زنیم اسم تابع را با f_N نمایش می دهیم. حال بسط توانی تابع پارش را برای مقادیر مختلف N بدست آورید. به ازای کدام N ها بسط توانی تقریب خوبی از مقدار دقیق تابع پارش است؟ سعی کنید که مقدارهای متفاوتی از N را امتحان کنید.

۶ تمرین ها

مسئله اول: مدلی را که در این جا بررسی می کنیم یک مدل دارای تقارن $U(1)$ است. تابع لانداو برای این مدل به شکل زیر تعریف می شود:

$$L = a_0 + a_2|q|^2 + a_4|q|^4 - hq^* - h^*q. \qquad (۲۹)$$

در این جا q یک عدد مختلط است که می توان آن را به شکل های مختلف نشان داد:

$$q = q_1 + iq_2, \qquad q = (q_1, q_2), \qquad q = |q|e^{i\theta}. \qquad (۳۰)$$

تابع پارش نیز برابر است با:

$$Z = \int dq dq^* e^{-L(q,q^*)} = \int dq_1 dq_2 e^{-L(q_1,q_2)}. \qquad (۳۱)$$

نقطه کمینه L را پیدا کنید و از روی آن نشان دهید که این سیستم از خود گذار فاز نشان می دهد. نشان دهید که مجموعه نقاطی که L را کمینه می کنند یک پیوستار تشکیل می دهند. هم چنین نشان دهید که نقاط کمینه مختلف با عمل گروه تقارنی یعنی $U(1)$ به یکدیگر تبدیل می شوند. هم چنین نماهای β و δ را بدست آورید. بالاخره نشان دهید که برای این سیستم نیز ظرفیت گرمایی ویژه در نقطه $T=T_c$ دارای ناپیوستگی است. مقدار ناپیوستگی را مشخص کنید.

تمرین: تمام مراحل قبلی را برای مدل زیر تکرار کنید:

$$L = a_0 + a_2(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) + a_4(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})^2 - \mathbf{h}\cdot\mathbf{q}. \qquad (۳۲)$$

دراین جا $\mathbf{q}=(q_1,q_2,q_3,\cdots q_N)$ یک بردار حقیقی N بعدی است.

تمرین: تمام مراحل قبلی را برای مدل زیر تکرار کنید:

$$L = a_0 + a_2(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}) + a_4(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q})^2 - \mathbf{h}\cdot\mathbf{q}. + b(q_1^4+q_2^4+\cdots q_N^4) \qquad (۳۳)$$