درس نهم: مدل لانداو گینزبورگ برای کلاس عمومیت آیزینگ

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۷ دی ۱۳۹۱

۱ مقدمه

در بررسي مدل هاي لانداو- گینزبورگ تا کنون بحث خود را به مدل هاي بسيار ساده که شامل یک یا دو درجه آزادي بودند محدود کرديم. سعي کرديم در اين مدل ها خصلت هاي اساسي نظريه نظير گذار فاز، شکست تقارن، چگونگي محاسبه نماهاي بحراني و روش فراتر رفتن از تقريب لانداو را ياد بگيريم. در اين درس آنچه را که در اين باره آموخته ايم براي نظريه اي که شامل یک ميدان اسکالر حقيقي است به کار مي بريم. اين نظريه که داراي تقارن Z_2 است، توصيف کننده گذار فاز در مدل آيزينگ است. به عبارت دقيق تر اين نظريه توصيف کننده کلاس عموميت آيزينگ است. تابعی لانداو برای این نظریه عبارت است از:

$$L[\phi] := \int d^D x[a_0 + a_2\phi(x)^2 + a_4\phi^4(x) + (\Delta\phi(x))^2] \quad (۱)$$

واضح است که این تابعی دارای تقارن $L[\phi] = L[-\phi]$ است. هر آنچه که در اين درس انجام مي دهيم کما بيش براي برای کلاس های های دیگر که با نظریه های میدان متفاوتی توصیف می شوند، نیز برقرار خواهد بود.

۲ تقریب صفرم یا تقریب لانداو

تابع پارش برای این مدل برابر است با:

$$Z = \int D\phi e^{-L[\phi]}. \tag{۲}$$

در تقریب لانداو قرار می دهیم

$$Z \approx e^{-L[\phi_0]}, \tag{۳}$$

که در آن $\Phi_0(x)$ میدانی است که $L[\phi]$ را کمینه می کند. برای این که ϕ_0 را پیدا کنیم دقت می کنیم که از تمام میدان ها، آن میدانی که تابعی لانداو را کمینه می کند که جمله مثبت $(\Delta\phi(x))^2$ برای آن برابر با صفر باشد. بنابراین میدان ϕ_0 می بایست یک میدان ثابت باشد. پس قرار می دهیم $\phi_0(x) = \phi_0$ و در نتیجه برای این میدان ثابت تابعی لانداو برابر خواهد شد با:

$$L[\phi_0] = (a_0 + a_2\phi_0^2 + a_4\phi_0^4)L^D, \tag{۴}$$

که در آن L^D حجم فضایی است که سیستم در آن تعریف شده است. با این جایگزینی تابعی لانداو به یک تابع معمولی از متغیر حقیقی ϕ_0 شده است. در این صورت مسئله ما تبدیل می شود به مسئله ساده ای که در درس هفتم به تفصیل آن را بررسی کرده ایم. بدین ترتیب مقدار متوسط ϕ که آن را با m نشان می دهیم از رابطه زیر بدست می آید:

$$2a_2m + 4a_4m^3 - h = 0. \tag{۵}$$

از درس هفتم می دانیم که در این صورت $a_2 = a_2'(T - T_c)$ که در آن a_2' تابعی است که می توان آن را در نزدیکی T_c ثابت در نظر گرفت. هم چنین این رابطه به معنای آن است که

$$m = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ (\frac{-a_2}{2a_4})^{\frac{1}{2}} & T < T_c \end{cases} \tag{۶}$$

به این ترتیب همانطور که در درس هفتم شرح داده ایم نماهای بحرانی β و δ برابر خواهند بود با:

$$\beta = \frac{1}{2}, \qquad \delta = 3. \tag{۷}$$

هم چنین از رابطه 5 پذیرفتاری مغناطیسی محاسبه می شود. از این رابطه بدست می آوریم:

$$2a_2\chi + 12a_4m^2\chi = 1, \tag{۸}$$

و در نتیجه

$$\chi = \begin{cases} \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{2a'_2(T-T_c)} & T > T_c \\ \frac{-1}{4a_2} = \frac{1}{4a'_2(T_c-T)} & T < T_c \end{cases} \tag{۹}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\gamma = \gamma' = 1. \tag{۱۰}$$

تمرین: ظرفیت گرمایی ویژه را برای $T > T_c$ و $T < T_c$ بدست آورده و نشان دهید که در نقطه بحرانی دارای یک ناپیوستگی است. مقدار ناپیوستگی را محاسبه کنید.

تمرین: مدل لانداو گینزبورگ با تقارن $O(n)$ را در تقریب لانداو بطور کامل مطالعه کنید.

۳ تقریب اول یا گاووسی

حال به مرتبه بعدی تقریب یعنی تقریب گاووسی می پردازیم که در آن افت و خیزهای حول مقدار $\phi_0 = m$ نیز تا جملات به توان دوم در نظر گرفته می شوند. این کار را می بایست جداگانه برای $T > T_c$ و $T < T_c$ انجام دهیم، ولی در هر دو حالت نحوه کلی محاسبه یکسان است به این معنا که قرار می دهیم:

$$Z = \int D\phi e^{-L[\phi_0+\psi]} = \int D\psi e^{-L[\phi_0]-\frac{1}{2}\int \psi(x)K(x,y)\psi(y)d^Dxd^Dy} \tag{۱۱}$$

در این رابطه $K(x,y)$ درایه یک عملگر بی نهایت بعدی است. به عبارت دیگر $K(x,y) = \langle x|\hat{K}|y\rangle$ که در آن $\hat{K}$ یک عملگر است که روی فضای توابع یا فضای میدان ها تعریف شده است. انتگرال طرف راست یک انتگرال گاووسی بی نهایت بعدی است که روش محاسبه آن را قبلا توضیح داده ایم. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z = e^{-L[\phi_0]}\frac{A}{\sqrt{det\hat{K}}}, \tag{۱۲}$$

که در آن A یک ضریب ثابت است که ناشی از انتگرال گاووسی است. برای یک انتگرال گاووسی شامل N متغیر این ضریب برابر است با $(2\pi)^{\frac{N}{2}}$. از آنجایی که این ضریب ثابت در محاسبه تابع حالت نقشی ایفا نمی کند لزومی ندارد که نگران

مقدار دقیق آن باشیم. این ضریب تنها در محاسبه انرژی آزاد موثر خواهد بود ولی ما در بخش های آینده راهی برای محاسبه ضرایب ثابت در انرژی آزاد پیدا خواهیم کرد. در باره این ضریب یک نکته دیگر نیز باقی مانده است که در همین درس به آن خواهیم پرداخت. با توجه به این که برای هر عملگر هرمیتی همواره می توان نوشت

$$\ln det\hat{K} = tr\ln(\hat{K}) \tag{۱۳}$$

می توان تابع پارش را نهایتا به صورت زیر نوشت:

$$Z = e^{-L[\phi_0]-\frac{1}{2}trln(\hat{K})+c} \tag{۱۴}$$

که در آن c یک مقدار ثابت است. بنابراین خواهیم داشت:

$$F = k_bT\left(L[\phi_0] + \frac{1}{2}Trln(\hat{K}) - c\right). \tag{۱۵}$$

هم چنین با توجه به آنچه که در باره انتگرال های گاووسی خوانده ایم تابع همبستگی برابر خواهد بود با:

$$\langle\psi(x)\psi(y)\rangle = K^{-1}(x,y) = \langle x|\hat{K}^{-1}|y\rangle. \tag{۱۶}$$

دقت کنیم که عبارت اخیر در واقع افت و خیز میدان حول مقدار میانگین آن است. زیرا

$$\langle\psi(x)\psi(y)\rangle = \langle(\phi(x)-\phi_0(x))(\phi(y)-\phi_0(y))\rangle = \langle\phi(x)\phi(y)\rangle - \phi_0(x)\phi_0(y) \tag{۱۷}$$

و از آنجا که $\langle\phi_(x)\rangle = \phi_0(x)$ ، عبارت بالا به شکل زیر خواهد بود:

$$\langle\psi(x)\psi(y)\rangle = \langle\phi(x)\phi(y))\rangle - \langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle. \tag{۱۸}$$

آنچه که تا کنون گفتیم نشان می دهد که چگونه انرژی آزاد و هم چنین تابع همبستگی در اثر در نظر گرفتن افت و خیزها در اولین مرتبه تصحیح می شوند. برای محاسبه دقیق این تصحیحات می بایست دماهای بالاتر و پایین تر از دمای بحرانی را به طور جداگانه بررسی کنیم.

۱.۳ تقریب گاووسی برای $T > T_c$

دراین حالت داریم $\phi_0(x) = 0$. بنابراین

$$L[\phi] = \int d^Dx[a_0 + a_2\phi^2 + a_4\phi^4 + (\nabla\phi)^2] = a_0L^D + \int d^Dx\psi(x)(a_2 - \nabla^2)\psi(x). \tag{۱۹}$$

به این ترتیب عملگر $\hat{K}$ برابر است با $\hat{K} = 2(a_2 - \nabla^2)$ و در نتیجه:

$$F = T\left[a_0 L^D + \frac{1}{2} Tr \ln 2(a_2 - \nabla^2)\right], \qquad (۲۰)$$

و

$$\langle\psi(x)\psi(y)\rangle = \langle x|\frac{1}{2(a_2-\nabla^2)}|y\rangle. \qquad (۲۱)$$

در عبارت اخیر منظور از $\frac{1}{2(a_2-\nabla^2)}$ معکوس عملگر $2(a_2-\nabla^2)$ است. برای محاسبه رد عملگر به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$(\ln 2(a_2-\nabla^2)) = \int d^D k\langle k|\ln 2(a_2-\nabla^2)|k\rangle = \int_{|k|\le\Lambda} d^D k \ln 2(a_2+k^2). \qquad (۲۲)$$

دقت کنید که در محاسبه انتگرال حد بالای تاندازه کانه را محدود کرده ایم به Λ ، زیرا از درس های قبلی می دانیم که تابعی لانداو یک مدل موثر برای توصیف کننده افت و خیزهای بزرگتر از یک مقیاس Λ^{-1} است. بنابراین انرژی آزاد برابر می شود با:

$$F = T\left[a_0 L^D + \frac{1}{2}\int_{|k|\le\Lambda} d^D k \ln 2(a_2+k^2).\right] \qquad (۲۳)$$

هم چنین داریم

$$\begin{aligned}\langle x|\frac{1}{2(a_2-\nabla^2)}|y\rangle &= \int_{|k|\le\Lambda} d^D k\langle x|\frac{1}{2(a_2-\nabla^2)}|k\rangle\langle k|y\rangle \\ &= \int_{|k|\le\Lambda} d^D k\langle x|k\rangle\frac{1}{2(a_2+k^2)}\langle k|y\rangle = \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k e^{ik.(x-y)} 2(a_2+k^2).\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

از عبارت انرژی آزاد می خواهیم ظرفیت گرمایی ویژه و از عبارت تابع همبستگی می خواهیم نمادهای η و γ را بدست آوریم. نخست به تابع همبستگی توجه می کنیم. می دانیم که رابطه زیر بین تابع همبستگی و نفوذ پذیری مغناطیسی برقرار است:

$$\int d^D x G(x) = k_b T\chi, \qquad (۲۵)$$

بر حسب تبدیل فوریه یعنی رابطه $\hat{G}(k) = \int d^D k e^{-ik.x} G(x)$ این رابطه به شکل زیر نوشته می شود:

$$\hat{G}(k=0) = k_b T\chi. \qquad (۲۶)$$

بنابراین اگر دقت کنیم که $\hat{G}(k) = \frac{1}{2(a_2+k^2)}$ آنگاه معلوم می شود که

$$k_b T\chi = \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{2a_2'(T-T_c)}. \qquad (۲۷)$$

که از ان نمای γ را برابر با 1 بدست می آوریم. حال به سراغ ظرفیت گرمایی ویژه می رویم. از رابطه (۲۳) و اینکه

$$C = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \tag{۲۸}$$

بدست می آوریم

$$C = -T\left[\int_{|k|\leq\Lambda} d^D k \frac{a_2'}{a_2+k^2} - \frac{1}{2}\int_{|k|\leq\Lambda} d^D k \frac{{a_2'}^2}{(a_2+k^2)^2}\right] \tag{۲۹}$$

نخستین مسئله ای که می بایست مورد توجه قرار دهیم این است که این انتگرال ها واگرایی فوق بنفش ندارند زیرا اندازه تکانه ی k از بالا محدود است. بنابراین اگر این انتگرال ها واگرایی داشته باشند از نوع فروسرخ یا $Infra-Red$ خواهد بود. این واگرایی در حد $T \longrightarrow T_c$ رخ می دهد زیرا در آن حد $a_2 \longrightarrow 0$. در این حد واگرایی این دو انتگرال به بعد فضا یعنی D بستگی دارد. اگر انتگرال های بالا را به ترتیب با I_1 و I_2 نشان دهیم آنگاه رابطه بالا را به شکل زیر می توانیم بنویسیم:

$$C = -T\left(a_2' I_1 - \frac{1}{2}{a_2'}^2 T I_2\right) \tag{۳۰}$$

که در آن

$$I_1 := \int d^D k \frac{1}{\xi^{-2}+k^2} \quad , \quad I_2 := \int d^D k \frac{1}{(\xi^{-2}+k^2)^2}. \tag{۳۱}$$

در نوشتن این روابط از این موضوع استفاده کرده ایم که $a_2 \sim (T-T_c)$ و $\xi \sim (T-T_c)^{\frac{-1}{2}}$. برای مطالعه واگرایی این انتگرال ها حالت های مختلف را جداگانه بررسی می کنیم:

حالت اول: $D > 4$. در این صورت I_1 و I_2 هر دو محدود هستند و تقریب گاووسی نتیجه تقریب صفرم یعنی تقریب لانداو را تغییر نمی دهد. بازهم ظرفیت گرمایی فقط ناپیوستگی دارد و میزان ناپیوستگی نیز همانی است که در تقریب صفرم بدست آمده است.

حالت دوم: $D = 4$. در این صورت I_1 محدود است ولی I_2 واگرایی لگاریتمی دارد. برای این که نحوه دقیق این واگرایی را مشخص کنیم، در انتگرال دوم تغییر متغیر $x = k\xi$ را انجام می دهیم که در آن x یک متغیر بدون دیمانسیون است. در نتیجه

$$I_2(D=4) = \int_{|x|\leq\Lambda\xi} \frac{d^4 x}{(1+x^2)^2} \sim \log \Lambda\xi. \tag{۳۲}$$

بنابراین در این حالت تقریب گاووسی ناپیوستگی C را در نزدیکی نقطه بحرانی تبدیل به واگرایی لگاریتمی می کند.

حالت سوم: $2 < D < 4$: در این حالت I_1 بازهم محدود است ولی I_2 واگرایی دارد. نوع واگرایی I_2 را می توان به این روش تعیین کرد که با تغییر متغیر گفته شده قبیل بدست بیاوریم

$$I_2 = \int_{|x|\leq\Lambda\xi} \xi^{4-D}\frac{d^Dx}{(1+x^2)^2} \tag{۳۳}$$

حال دقت می کنیم که در انتگرال طرف راست، اگر $|x|$ را تا بی نهایت هم انتگرال بگیریم بازهم نتیجه انتگرال محدود خواهد بود زیرا D از 4 کمتر است. بنابراین واگرایی تنها ناشی از ضریب ξ^{4-D} است. بنابراین در این بعد، تقریب گاووسی، ناپیوستگی در C را تبدیل به یک واگرایی توانی از نوع ξ^{4-D} یا $t^{\frac{4-D}{2}}$ می کند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\alpha = 2 - \frac{D}{2}. \tag{۳۴}$$

۲.۳ تقریب گاووسی برای $T < T_c$

برای $T < T_c$ داریم، $\phi_0^2 \equiv m^2 = \frac{-a_2}{2a_4}$.

بنابراین با نوشتن $\phi(x)$ به صورت $\phi(x) = m + \psi(x)$ و بسط تابعی لانداو تا مرتبه دوم برحسب $\psi(x)$ بدست می آوریم:

$$L[\phi] = (a_0 + a_2m^2 + a_4m^4)L^D + \int d^Dx\left[-2a_2\psi^2(x) + (\nabla\psi(x))^2\right] \tag{۳۵}$$

و در نتیجه تابع پارش برابر خواهد بود با

$$Z = e^{-(a_0+a_2m^2+a_4m^4)L^D}\int D\phi e^{-\int d^Dx\psi(x)(-2a_2-\nabla^2)\psi(x)}. \tag{۳۶}$$

به این ترتیب تمام تجزیه تحلیلی که برای حالت $T > T_c$ انجام دادیم برای این حالت نیز تکرار می شود با این تفاوت که در همه جا می بایست به جای $a_2'(T-T_c)$ ، مقدار $-2a_2'(T_c-T)$ قرار دهیم. از آنجا که هیچ کدام از نماهای بحرانی بستگی به مقدار a_2، a_4 ندارند، نماهای بحرانی مربوط به نفوذپذیری مغناطیسی مثل قبل خواهد بود، یعنی بدست می آوریم که $\gamma = \gamma'$. آنچه که در مورد چگونگی واگرایی ظرفیت گرمایی ویژه و رابطه آن با بعد گفتیم نیز در این حالت برقرار خواهد بود. البته باید به خاطر داشته باشیم که علاوه بر نماهای بحرانی بعضی از کمیت های دیگر مثل نسبت ضرایب مربوط به ظرفیت گرمایی یا نفوذ پذیری مغناطیسی نیز کمیت های عمومی هستند و این نسبت ها نیز در نظریه لانداو قابل محاسبه هستند.

۴ محدوده اعتبار تقریب گاووسی

تا کنون نظریه لاندوا را در تقریب میدان متوسط (تقریب صفرم یا تقریب لانداو) و هم چنین تقریب گاووسی (تقریب اول) مطالعه کرده ایم. حال از خود می پرسیم که چه موقع همان تقریب لانداو خوب است و نیازی به در نظر گرفتن افت و خیز ها نیست. برای پاسخ به این سوال باید معیاری برای اندازه افت و خیز ها تعریف کنیم. هرگاه اندازه افت و خیز ها که با این معیار سنجیده می شود کوچک باشد، آنگاه نتایج بدست آمده از تقریب لانداو کافی هستند و در غیر این صورت می بایست فراتر از تقریب لانداو رفت و افت و خیزها را با استفاده از تقریب گاووسی و رتبه های بالاتر از آن در نظر گرفت. انتظار داریم که وقتی به نقطه بحرانی نزدیک و نزدیک تر می شویم اندازه افت و خیز ها بیشتر شود و در نتیجه دقت تقریب لانداو کمتر شود و ناگزیر شویم برای بدست آوردن نتایج دقیق تر رتبه های بالاتری از تقریب را نگاه داریم. ملاکی که برای اندازه افت و خیز ها به کار می بریم نخستین بار توسط گینزبورگ $Ginzburg$ تعریف شده است. این ملاک که یک عدد بدون دیمانسیون است، به شکل زیر تعریف می شود:

$$E_{LG} = \frac{\int_\xi d^D x G(x)}{\int_\xi d^D x \langle \phi^2(x) \rangle}. \tag{۳۷}$$

در این عبارت $G(x) := \langle \phi(x)\phi(0) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(0) \rangle$ و $\langle \phi(x) \rangle$ میدان متوسط است. ناحیه ای که افت و خیزها روی آن انتگرال گرفته می شود نیز ناحیه ای است با ابعاد ξ که طول همبستگی میدان هاست. اگر داشته باشیم $E_{LG} << 1$ معنایش این است که اندازه افت و خیز ها کوچک است و تقریب لانداو کافی است اما اگر داشته باشیم $E_{LG} \sim 1$ معنایش این است که اندازه افت و خیز ها قابل صرف نظر کردن نیست و در نتیجه تقریب لانداو کافی نیست. حال می توانیم ملاک گینزبورگ را تخمین بزنیم. برای تخمین صورت کسر از رابطه $\int d^D x G(x) = k_B T \chi$ استفاده می کنیم. در مخرج کسر نیز بجای $\langle \phi(x) \rangle$ قرار می دهیم m و در نتیجه می نویسیم:

$$E_{LG} \sim \frac{k_B T \chi}{m^2 \xi^D} \tag{۳۸}$$

حال از بستگی m، χ و ξ به دمای کاهش یافته که قبلا بدست آورده ایم استفاده می کنیم و بدست می آوریم

$$E_{LG} \sim \frac{t^{-\gamma}}{t^{2\beta} t^{-\nu D}} \sim t^{-\gamma - 2\beta + D\nu}, \tag{۳۹}$$

که در نوشتن آن از ضرایب غیر عمومی صرف نظر کرده ایم. اگر مقدار نماهایی را که در تقریب لانداو بدست می آوریم در

رابطه بالا قرار دهیم یعنی قرار دهیم $\gamma = 1, \beta = \frac{1}{2}, \nu = \frac{1}{2}$ بدست می آوریم

$$E_{LG} \sim t^{-2+\frac{D}{2}} = t^{\frac{D-4}{2}}. \qquad (۴۰)$$

از این رابطه یک نتیجه مهم بدست می آید و آن اینکه اگر $D > 4$ ، آنگاه هر چه که به نقطه بحرانی نزدیک تر می شویم اثرات افت و خیز ها کمتر می شود و نتایج تقریب لانداو بهتر می شود. هم چنین هرچه که بعد از D بیشتر باشد تقریب لانداو بهتر می شود. اما اگر $D < 4$ باشد، درست عکس این اتفاق می افتد و افت و خیزها بزرگ تر شده و در نتیجه تقریب لانداو با نزدیک شدن به نقطه بحرانی بیشتر و بیشتر اعتبار خود را از دست می دهد و می بایست برای بدست آوردن نتایج بهتر مرتبه های بالاتر تقریب را در نظر گرفت. حال دو سوال مهم پیش می آید.

سوال اول: آیا می توان با در نظر گرفتن هرچه بیشتر مرتبه های بالاتر به نتایج دقیق تری دست یافت؟

سوال دوم: آیا با توجه به رابطه (۴۰) می توان با یک تخمین دقیق تر ناحیه ای در اطراف دمای بحرانی را بدست آورد که تقریب لانداو در خارج از آن هنوز معتبر باشد؟

پاسخ سوال اول: برای اینکه پاسخ این سوال را پیدا کنیم می بایست نگاهی به تابعی لانداو بیندازیم و ببینیم آیا می توان ثابت جفتیدگی این نظریه میدان یک عدد کوچک هست یا نیست؟ اگر ثابت جفتیدگی کوچک باشد می توان مثل نظریه الکترودینامیک کوانتومی که ثابت جفتیدگی آن $\alpha = \frac{1}{137}$ کوچک است، امیدوار بود که مرتبه های متوالی اختلال مقادیر هرچه دقیق تری از کمیت های فیزیکی بدست می دهند. برای برآورد ثابت جفتیدگی به بعد طولی کمیت های مختلف در تابعی لانداو نگاه می کنیم: می دانیم که بعد طولی این کمیت ها به شکل زیراست:

$$[\nabla] = -1, \quad , \quad [a_2] = -2, \quad , \quad [\phi] = 1 - \frac{D}{2}, \quad , \quad [a_4] = D - 4. \qquad (۴۱)$$

بنابراین اگر l یک کمیت با بعد طول باشد، آنگاه کمیت های زیر بدون بعد خواهند بود:

$$\overline{x} := \frac{x}{l}, \quad , \quad ,\overline{\phi} := \frac{\phi}{l^{1-\frac{D}{2}}}, \quad , \quad \overline{a_2} := a_2 l^2, \quad , \quad \overline{a_4} := \frac{a_4}{l^{D-4}}, \qquad (۴۲)$$

و برحسب این کمیت های بدون بعد، تابعی لانداو به شکل زیر نوشته می شود:

$$L = \int d^D\overline{x} \left[\overline{a_2}\overline{\phi}^2 + \overline{a_4}\overline{\phi}^4 + (\overline{\nabla\phi})^2\right] \qquad (۴۳)$$

حال دقت می کنیم $a_2 \sim \xi^{-2}$. بنابراین اگر l را همان ξ بگیریم، آنگاه $\overline{a_2}$ از مرتبه یک خواهد شد اما $\overline{a_4}$ برابر خواهد بود با:

$$\overline{a_4} = \frac{a_4}{l^{D-4}} \sim \frac{a_4}{\xi^{D-4}} \sim \frac{a_4}{t^{\frac{D-4}{2}}}. \tag{۴۴}$$

بنابراین ضریب جفتیدگی که همان ضریب برهم کنش است با کوچک تر شدن t در ابعاد $D < 4$ بزرگ تر می شود که به این معناست که مرتبه های بالاتر تقریب در نزدیکی نقطه بحرانی بدتر می شوند و هر مرتبه از مرتبه پیشین آن بزرگ تر است. البته این به این معنا نیست که تابع پارش واگرا می شود بلکه به این معناست که روش اختلال برحسب مرتبه های ثابت جفتیدگی $\overline{a_4}$ روش خوبی نیست. یک مثال ساده این موضوع را روشن می کند. تابع $f(t) = e^{-\alpha t}$ را در نظر بگیرید. این تابع را می توان برحسب توان های ثابت α بسط داد:

$$e^{-\alpha t} = 1 - \alpha t + \alpha^2 \frac{t^2}{2} - \alpha^3 \frac{t^3}{6} + \cdots. \tag{۴۵}$$

برای یک مقدار معین از α حتی اگر α خیلی کوچکتر از یک باشد، هرکدام از این جملات واگرا هستند و واگرایی هر رتبه از رتبه پیشین بدتر است، اگر چه کل تابع به ازای همه مقادیر t و α واگرا ست. بنابراین در این مثال می بینیم که برای بسط پارامتر نادرستی انتخاب کرده ایم. اگر پارامتر بسط را αt انتخاب کنیم آنگاه می توانیم بگوییم که برای پارامتر $at < 1$ هر جمله از بسط بالا از جمله قبلی کوچک تر است. این در واقع کاری است که نهایتا در نظریه بازبهنجارش می بایست انجام شود.

پاسخ سوال دوم: برای پاسخ به این سوال می بایست طرف راست عبارت (39) را به صورت دقیق تری تخمین بزنیم. برای این کار دقت می کنیم که m و χ هر دو از رابطه $L'[m] = 0$ بدست می آیند که بنا بر آن

$$2a_2 m + 4a_4 m^3 - h = 0. \tag{۴۶}$$

قبلا از این رابطه بدست آورده ایم

$$m^2 = \frac{-a_2}{2a_4} = \frac{a_2'(T_c - T)}{2a_4} \quad , \quad \chi = \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{2a_2'(T - T_c)}. \tag{۴۷}$$

بنابراین با جایگذاری این مقادیر در رابطه (39) بدست می آوریم:

$$E_{LG} \approx \frac{k_B T \frac{1}{2a_2'(T-T_c)}}{\frac{a_2'}{2a_4}(T - T_c)\xi^D} \tag{۴۸}$$

می توانیم $k_B T$ را با $k_B T_c$ جایگزین کنیم. هم چنین چون $\xi(t) = At^{\frac{-1}{2}}$ می توانیم قرار دهیم $\xi(t) = \xi(1) t^{\frac{-1}{2}}$ که در آن $\xi(1)$ مقدار ξ در $t = 1$ است یعنی وقتی که $\frac{T-T_c}{T_c} = 1$. بنابر این با جمع و جور کردن همه جزئیات بدست می آوریم:

$$E_{LG} \approx (\frac{a_4}{{a_2'}^2}) \frac{k_B}{T_c} \frac{1}{\xi(1)^D} \frac{1}{t^{2-\frac{D}{2}}}. \tag{۴۹}$$

ولی این رابطه هنوز مفید نیست زیرا شامل پارامترهای a_4 و a'_2 است که مستقیما به کمیت های فیزیکی و قابل اندازه گیری مربوط نیستند. برای این که این کمیت را به یک کمیت مفید تبدیل کنیم می بایست a_4 و a'_2 را برحسب پارامترهای فیزیکی بیان کنیم. برای این کار توجه می کنیم که $\frac{a_4}{a'_2}$ دقیقا کمیتی است که در ΔC یعنی ناپیوستگی ظرفیت گرمایی ویژه به کار می رود. در زیر این ناپیوستگی را حساب می کنیم.

تمرین: در تقریب لانداو، مقدار ناپیوستگی در ظرفیت گرمایی ویژه را در دمای بحرانی بدست آورید.

حل: در این تقریب داریم:

$$F = k_B T\left(a_0 + a_2 m^2 + a_4 m^4\right) L^D \tag{۵۰}$$

که در نتیجه آن

$$f \equiv \frac{F}{L^D} = \begin{cases} k_B T a_0 & T > T_c \\ k_B T\left(a_0 - \frac{a_2^2}{4a_4}\right) & T < T_c \end{cases} \tag{۵۱}$$

با توجه به این که $C = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ بدست می آوریم:

$$\Delta C = (C^- - C^+)_{T\longrightarrow T_c} = T_c\frac{\partial^2}{\partial T^2}(k_B T\frac{a_2^2}{4a_4})_{T\longrightarrow T_c}. \tag{۵۲}$$

با توجه به این که $a_2 = a'_2(T-T_c)$ و این که a_4 همواره مثبت است و در $T = T_c$ نیز هموار است می توان آن را در نزدیکی دمای بحرانی مقدار ثابتی در نظر گرفت و در نتیجه

$$\Delta C = k_B T\frac{1}{2}\frac{{a'_2}^2}{a_4} \tag{۵۳}$$

حال بااستفاده از این تمرین و ترکیب رابطه ۴۹ و ۵۳ بدست می آوریم:

$$E_{LG} \approx \frac{1}{2}\frac{k_B}{C}(k_B T_c)\frac{1}{\xi(1)^D}\frac{1}{t^{2-\frac{D}{2}}}. \tag{۵۴}$$

رابطه ۵۴ به ما می گوید تا چه حدی می توانیم به دمای بحرانی نزدیک شویم بدون اینکه اعتبار تقریب لانداو از بین برود.