حل مدل های لانداو-گینزبورگ به روش اختلال

وحید کریمی پور، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۱۳ دی ۱۳۹۲

۱ مقدمه

در درسهای گذشته دیدیم که برای مطالعه رفتار بحرانی یک سیستم می توان تابع پارش یک نظریه میدان را محاسبه کرد که به صورت زیر نوشته می شود:

$$Z = \int D\phi e^{-L[\phi} \qquad (۱)$$

مهمترین نقش را در این تابع پارش تابعی لانداو-گینزبورگ $L[\phi]$ ایفا می کند که محتوی میدان های آن و این که چه تقارن هایی دارد با توجه به خواص فیزیکی سیستم مورد نظر تعیین می شود. برای یک نظریه که شامل یک میدان اسکالر حقیقی با تقارن Z_2 است ، تابع پارش عبارت است از:

$$L[\phi] = \int d^D x\{a_0 + a_2\phi^2 + a_4\phi^4 + (\nabla\phi)^2\}. \qquad (۲)$$

هم چنین یاد گرفتیم که چگونه می توان تابع پارش مدل لانداو -گینزبورگ را به صورت تقریبی حل کرد. در تقریب صفرم که آن را تقریب لانداو می نامیم تابعی لانداو را با مقدار کمینه آن جایگزین می کنیم و می نویسیم

$$Z \approx e^{-L[\phi_0]} \qquad (۳)$$

که در آن ϕ_0 میدانی است که تابعی لانداو–گینزبورگ را کمینه می کند.

در این تقریب افت و خیزهای حول این مقدار کمینه به کلی نادیده گرفته می شوند. این همان تقریب نظریه میدان میانگین است که نتایج کیفی خوبی بدست می دهد ولی به دلیل نادیده گرفتن افت و خیزها نتایج کمی آن دقیق نیست. برای رفع این نقیصه درجه تقریب بعدی را که به آن تقریب گاووسی می گفتیم در نظر گرفتیم. در این تقریب تابعی لانداو را حول ϕ_0 تا مرتبه دوم بسط می دهیم . به عبارت دیگر افت و خیزهای حول میدان کمینه را تا مرتبه دوم در نظر می گیریم و چون تابع پارش یک انتگرال گاووسی است بازهم می توانیم آن را به صورت دقیق حساب کنیم. این کار باعث می شود که تصحیحی بر انرژی آزاد و در نتیجه تصحیحی بر نمای مربوط به ظرفیت گرمایی ویژه بدست آوریم. هم چنین در این تقریب می توانیم تابع همبستگی میدان ها و در نتیجه نماهای مربوط به آن را بدست آوریم. اما آیا می توانیم از تقریب گاووسی نیز فراتر برویم و یک روش سیستماتیک اختلالی را پی ریزی کنیم که بتوانیم با هر درجه دقتی که می خواهیم تابع پارش را حساب کنیم؟ هدف این درس معرفی چنین روشی است.

۲ روش اختلال و دیاگرام های فاینمن

برای آنکه روش اختلال را یاد بگیریم بهترین کار آن است که ساده ترین چارچوب ممکن را اختیار کنیم که پیچیدگی های غیرضروری نظریه میدان نظیر بی نهایت بودن درجات آزادی و یا مبهم بودن اندازه انتگرال $D\phi$ و نظایرآن را نداشته باشد. این پیچیدگی ها مانع فهمیدن ما می شود. به همین دلیل همه چیز را در قالب یک مثال ساده یاد خواهیم گرفت که درعین سادگی همه خواص حالت های پیچیده تری را که بعداً با آنها سروکار خواهیم داشت دربردارد. بنابراین به جای اینکه با میدان ها کار کنیم که درجات آزادی آنها بی نهایت است خود را محدود می کنیم که به سیستمی که تعداد N درجه آزادی دارد. این درجات آزادی را با $x_1, x_2, \cdots x_N$ نشان می دهیم که مقادیر خود را در حوزه اعداد حقیقی اختیار می کنند. در واقع به جای میدان های تصادفی با متغیرهای تصادفی ساده و حقیقی سروکار داریم . هدف ما پیدا کردن تابع پارش زیر است:

$$Z = \int DX e^{-\frac{1}{2}X^t A X + V(X)} \tag{۴}$$

که درآن A یک ماتریس مثبت و متقارن است، X یک ماتریس ستونی و X^t به معنای ترانهاده X است. ماتریس مثبت ماتریسی است که تمام ویژه مقدارهایش مثبت هستند و $V(X)$ نیز یک تابع دلخواه از متغیرهای x_i است. البته تابع $V(X)$ چنان است که انتگرال ها را واگرا نمی کند. منظور از $\int DX$ نیز این است:

$$\int DX = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_N. \tag{۵}$$

جمله $V(X)$ را پتانسیل یا جمله برهم‌کنش و جمله X^TAX را جمله آزاد یا جمله گاووسی می نامیم چرا که اگر $V(X)$ نبود می توانستیم تابع پارش را به طور دقیق حساب کنیم.

تمرین: نشان دهید که هرگاه ماتریس A مثبت باشد آنگاه به ازای هر بردار حقیقی دلخواه Y عبارت Y^tAY مثبت است.

تابع پارش بالا در واقع بیان می‌کند که چگالی احتمال این‌که متغیرهای تصادفی مقادیر معین $x_1, x_2, \cdots x_N$ را اختیار کنند برابر است با:

$$P(x_1, x_2, \cdots x_N) = \frac{e^{-\frac{1}{2}X^tAX+V(X)}}{Z} \tag{۶}$$

علاوه بر تابع پارش بالا علاقندیم که توابع همبستگی را نیز حساب کنیم. یک تابع همبستگی کلی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle = \int DX(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})P(x_1, x_2, \cdots x_N) \tag{۷}$$

بهترین راه برای آنکه توابع همبستگی را حساب کنیم آن است که علاوه بر تابع پارش Z یک تابع مولد که آن را با $Z[J]$ نشان می دهیم نیز تعریف و محاسبه کنیم. این تابع مولد به شکل زیر تعریف می شود:

$$Z[J] = \int DXP(x_1, x_2, \cdots x_N)e^{\sum_{i=1}^N JJ_ix_i} \equiv \int DXP(x_1, x_2, \cdots x_N)e^{J^tx}. \tag{۸}$$

دقت کنیم که

$$Z[J=0] = Z. \tag{۹}$$

خوبی تابع مولد این است که با داشتن آن می توانیم تمام توابع همبستگی را تنها با محاسبه مشتقات آن بدست آوریم. به راحتی معلوم می شود که :

$$\begin{aligned}
\langle x_i\rangle &= \frac{1}{Z}\frac{\partial Z[J]}{\partial J_i}\mid_{J=0}\\
\langle x_ix_j\rangle &= \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z[J]}{\partial J_i\partial J_j}\mid_{J=0}\\
\langle x_ix_jx_k\rangle &= \frac{1}{Z}\frac{\partial^3 Z[J]}{\partial J_i\partial J_j\partial J_k}\mid_{J=0}\\
\cdots &= \cdots.
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

دقت کنید که پارامتر های J_i پارامترهای کمکی هستند که آن ها را پارامترهای چشمه می خوانیم و در پایان محاسبه می بایست آن ها را مساوی با صفر قرار دهیم. هدف ما این است که یک روش سیستماتیک برای محاسبه رتبه به رتبه یعنی محاسبه اختلالی تابع پارش $Z[J]$ بدست بدهیم.

خوب است که برای وقتی که تابع پتانسیل صفر است نمادهای ساده ای نیز برای تابع پارش بنویسیم. بنابراین می نویسیم

$$Z_0 = \int Dx e^{-\frac{1}{2}x^t A x}, \qquad Z_0[J] = \int Dx e^{-\frac{1}{2}x^t A x + J^t x}, \tag{۱۱}$$

بنابراین اندیس 0 را برای نشان دادن همه کمیت های مربوط به تئوری آزاد یعنی تئوری ای که برهم کنش ندارد بکار می بریم. نخستین هدف ما این است که بتوانیم تابع پارش آزاد و توابع همبستگی مربوط به آن را به طور دقیق محاسبه کنیم. همانطور که در بالا گفتیم برای این کار می بایست بتوانیم تابع $Z_0[J]$ را حساب کنیم زیرا با مشتق گیری از آن می توانیم تمام توابع همبستگی تئوری آزاد را حساب کنیم.

کار خود را با بررسی انتگرال های گاووسی شروع می کنیم.

۱.۲ انتگرال های گاووسی و قضیه ویک

می دانیم که انتگرال های زیر که درآنها a یک عدد مثبت است به سادگی قابل محاسبه هستند:

$$\int dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \qquad \int dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + jx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{j^2}{2a}} \tag{۱۲}$$

با ضرب کردن تعداد N تا از این انتگرال ها برای مقادیر مختلف پارامترها می توان روابط زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned} \int DX e^{-\frac{1}{2}(a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2 + \cdots a_N{x_N}^2)} &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{a_1 a_2 \cdots a_N}} \\ \int DX e^{-\frac{1}{2}(a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2 + \cdots a_N{x_N}^2) + j_1x_1 + j_2x_2 + \cdots j_Nx_N} &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{a_1 a_2 \cdots a_N}} e^{\frac{j_1^2}{2a_1} + \frac{j_2^2}{2a_2} + \cdots \frac{j_N^2}{2a_N}} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که درآن $a_1, a_2, \cdots a_N$ همه مثبت هستند.

می توان این روابط را به فرم ماتریسی نیز نوشت :

$$\int DX e^{-\frac{1}{2}X^t A X} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} \qquad \int DX e^{-\frac{1}{2}(X^t A X) + J^t X} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J} \tag{۱۴}$$

حال حتی اگر ماتریس A قطری نیز نباشد (بلکه تنها یک ماتریس مثبت و متقارن باشد) باز هم این روابط صحیح هستند زیر می توان با یک ماتریس متعامد آن را قطری کرد و از روابط (13) استفاده کرد. لازم است ذکر کنیم که یک ماتریس متعامد اندازه انتگرال را تغییر نمی دهد زیرا

قدرمطلق دترمینان آن برابر با یک است.

به این ترتیب توانستیم برای تئوری آزاد هم تابع پارش و هم تابع پارش وابسته به چشمه یعنی تابع مولد را به طور دقیق حساب کنیم. یعنی پیدا کردیم که

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} \qquad Z_0[J] = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J} \tag{۱۵}$$

برای محاسبه توابع همبستگی آنچه که مورد نیاز ماست نسبت $\frac{Z_0[J]}{Z_0}$ است و این نسبت با توجه به رابطه بالا برابراست با:

$$\frac{Z_0[J]}{Z_0} = e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J} \tag{۱۶}$$

از این رابطه می توان با بامشتق گیری نسبت به J_k توابع همبستگی را حساب کرد. بسادگی بدست می آوریم:

$$\langle x_k \rangle_0, \qquad \langle x_i x_j \rangle_0 = (A^{-1})_{ij} =: \Delta_{ij} \tag{۱۷}$$

که در آن اندیس 0 را برای نشان دادن کمیت های مربوط به تئوری آزاد به کار برده ایم.

با کمی محاسبه بیشتر می توانیم تابع چهارنقطه ای را بدست بیاوریم :

$$\langle x_i x_j x_k x_l \rangle_0 = \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{ik}\Delta_{jl} + \Delta_{il}\Delta_{jk} \tag{۱۸}$$

که به معنای آن است که باداشتن تابع دونقطه ای می توان تابع چهارنقطه ای را بدست آورد. تنها کافی است که آن را به صورت مجموع چند جمله بنویسیم که هرکدام از این جملات حاصل ضرب دو تابع دو نقطه ای است که از یک انتخاب از شاخص هابه صورت جفت جفت مثل $(i,j),(k,l)$ بدست می آید. این عمل را ادغام شاخص (i,j) و (k,l) می نامیم. مجموع تمام جملات درواقع مجموع تمام امکاناتی است که برای ادغام شاخص ها داریم . آنچه که برای تابع چهارنقطه ای گفتیم برای تمام توابع $2n$ نقطه ای صحیح است. این خاصیت یک خاصیت اساسی از تابع توزیع گاووسی است و به قضیه ویک $Wick$ معروف است. خواننده خود می تواند با استفاده از فرم تابع پارش گاووسی این قضیه را ثابت کند.

تمرین: با استفاده از قضیه ویک متوسط کمیت های زیر را برای یک تابع توزیع گاووسی یک متغیره به صورت $P(x) = \frac{1}{Z}e^{-\frac{1}{2}ax^2}$ بدست آورید:

$$\langle x^{2n+1}\rangle_0, \qquad \langle x^{2n}\rangle_0, \qquad \langle (1+x^2)^n\rangle_0 \tag{۱۹}$$

تمرین: با استفاده از قضیه ویک متوسط کمیت های زیر را برای یک تابع توزیع گاووسی دو متغیره به صورت $P(x)=\frac{1}{Z}e^{-(2x^2+xy+2y^2)}$ بدست آورید:

$$\begin{aligned}&\langle (xy)^n\rangle_0, \qquad \langle x^n\rangle_0, \qquad \langle (1+x^2)^n(1+y^2)^n\rangle_0\\ &\langle e^{-xy}\rangle_0, \qquad \langle (x-y)^2\rangle_0, \qquad \langle \frac{x^2}{1+x^2}\rangle_0.\end{aligned} \tag{۲۰}$$

می توان آنچه را که تاکنون آموخته ایم با استفاده از دیاگرام ها به صورت خیلی ساده تری منظم کنیم. این روش دیاگراماتیک در بررسی تئوری هایی که دارای برهم‌کنش هستند اهمیت فوق العادی ای می یابند و مبنای آنچیزی است که به دیاگرام های فاینمن مشهور است. برای این کار قواعد زیر را به‌کار می بریم:

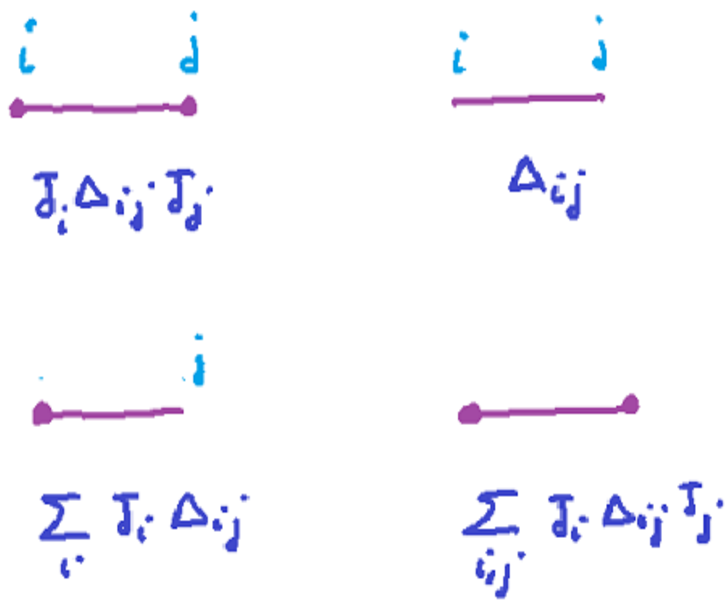
الف: به هر عبارت Δ_{ij} یک پاره خط ساده که در انتهای آن علامت های i و j نوشته شده است ، مطابق با شکل ۱.۲ نسبت می دهیم.

ب : به هر عبارت J_i یک نقطه توپر که روی آن علامت i نوشته شده است نسبت می دهیم.

به این ترتیب هر کمیت مثل $Q_{i,j,k,...}$ مطابق با دیاگرامی است که دارای تعدادی پای خارجی است که روی آنها علامت های i ، j و k نوشته شده است.

پ: به طور کلی وقتی که یک کمیت $Q_{i,...}$ در یک کمیت $S_{i...}$ ضرب شده و روی اندیس i جمع زده می شود این کار را با دیاگرام مطابق شکل ۱.۲ انجام می دهیم. به این کار ادغام می‌گویند. شکل ۱.۲ نشان می دهد که عبارت $\sum_{i,j} J_i\Delta ij J_j$ چگونه با پاره خط ساده که دو طرف آن نقاط تو پر دارد ولی روی آنها نام هیچ اندیسی نیست نشان داده شده است.

ت: و بالاخره از قواعد بالا نتیجه می شود که مشتق‌گیری نسبت به J_i از یک کمیت چگونه با دیاگرام ها نشان داده می شود. این کار در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.



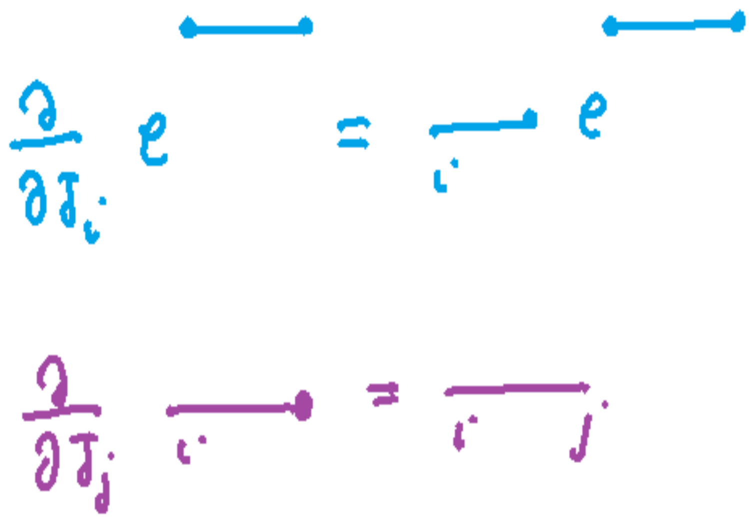
شکل ۱: نمونه هایی از قراردادهای الف تا ت برای دیاگرام ها

به این ترتیب قضیه ویک برای تابع چهار نقطه ای را می توان به شکل نشان داده شده در ۴.۲ نشان داد.

تمرین: قضیه ویک را به طور کلی ثابت کنید. یک راه آن است که از استقرا استفاده کنید.

۲.۲ اختلال و دیاگرام های فاینمن

حال فرض کنید که پتانسیل برهم کنش صفر نیست بلکه در مقایسه با جمله آزاد مقدار کوچکی است . می خواهیم از آنچه که در بخش قبلی آموخته ایم استفاده کنیم و یک روش اختلالی برای محاسبه تابع پارش و در نتیجه برای محاسبه توابع همبستگی بدست آوریم. تابع پارش به صورت زیر



شکل ۲: نمونه هایی از قراردادهای الف تا ت برای دیاگرام ها

است:

$$Z = \int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+V(X)} \tag{۲۱}$$

می توانیم این تابع پارش را به صورت زیر بنویسیم:

$$Z = \int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)} \frac{\int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+V(X)}}{\int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)}} = Z_0 \langle e^{V(X)} \rangle_0. \tag{۲۲}$$

به این ترتیب تابع پارش را به صورت متوسط تابع $e^{V(X)}$ روی تئوری آزاد نوشته ایم. اما این متوسط را می توانیم با استفاده از بسط توانی و سپس استفاده از قضیه ویک استفاده کنیم. یعنی این که می نویسیم

$$Z = Z_0\left(1+\langle V\rangle_0+\frac{1}{2}\langle V^2(X)\rangle+\frac{1}{3!}\langle V^3(X)\rangle_0+\cdots\right) \tag{۲۳}$$

تمرین: انتگرال یک متغیره زیر را تا رتبه 3 از λ حساب کنید.

$$Z=\int dxe^{-x^2-\lambda x^4} \tag{۲۴}$$

تمرین: انتگرال دو متغیره زیر را تا رتبه 3 از λ حساب کنید.

$$Z=\int dxdye^{-x^2-xy-y^2-\lambda(x^4+y^4)} \tag{۲۵}$$

تمرین: تابع پارش زیر را تا رتبه 3 از λ حساب کنید.

$$Z=\int Dxe^{-\frac{1}{2}X^tAX-\lambda(\sum_{i=1}^{N}x_i^4)} \tag{۲۶}$$

که در آن A ماتریس زیر است:

$$A=X^tX,\qquad X=\sum_{i=1}^{n}|i+1\rangle\langle i|. \tag{۲۷}$$

برای ماتریس ها شرط مرزی پریودیک در نظر بگیرید به این معنی که $|i+N\rangle\equiv|i\rangle$.

به این ترتیب می بینیم که قضیه ویک راه را برای محاسبه اختلالی تابع پارش Z باز می کند. تا هر رتبه ای که بخواهیم می توانیم تابع پارش را حساب کنیم. این کار به ما اجازه می دهد که تابع پارش وابسته به چشمه را نیز به همین ترتیب حساب کنیم. برای این کار به تساوی سمبلیک زیر دقت می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial J_i}\equiv x_i, \tag{۲۸}$$

که به این معناست که در زیر انتگرالی که شامل جمله چشمه است این تساوی برقرار است . دلیل آن هم خیلی ساده است زیر با مشتق گرفتن از جمله e^{J^tX} نسبت به J_i در واقع کل انتگرال ده را در x_i ضرب می کنیم. به عبارت دیگر برای هر تابع دلخواه $f(X)$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial J_i}\int DXf(X)e^{J^tX}\equiv\int DXf(X)\frac{\partial}{\partial J_i}e^{J^tX}=\int DXf(X)X_ie^{J^tX}. \tag{۲۹}$$

با این مقدمات می توانیم بفهمیم که چگونه تابع پارش وابسته به چشمه را در حضور برهم‌کنش حساب‌کنیم: با بسط دادن $e^{V(X)}$ و با فرض اینکه $V(X)$ یک بسط توانی دارد می توانیم بنویسیم

$$Z[J] = \int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+V(X)+J^tX} = e^{V(\frac{\partial}{\partial J})}\int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)}e^{J^tX} = e^{V(\frac{\partial}{\partial J})}Z_0(J) \tag{۳۰}$$

به این ترتیب به رابطه زیر می رسیم:

$$Z[J] = e^{V(\frac{\partial}{\partial J})}Z_0[J]. \tag{۳۱}$$

تمرین: انتگرال یک متغیره زیر را به عنوان تابعی از b تا رتبه 4از λ حساب‌کنید:

$$Z(b) = \int dxe^{-x^2+bx-\lambda x^4} \tag{۳۲}$$

تمرین: تابع پارش وابسته به چشمه زیر را تا رتبه 3 از λ حساب‌کنید:

$$Z(J) = \int DXe^{-\frac{1}{2}X^tAX-\lambda(\sum_{i=1}^N x_i^4)+J^tX} \tag{۳۳}$$

تاکنون نشان داده ایم‌که چگونه می توان تابع پارش و هم چنین تابع پارش وابسته به چشمه را به صورت اختلالی بدست آورد. به همین شیوه می توانیم نشان دهیم‌که توابع چند نقطه ای را نیز به صورت اختلالی می توان بدست آورد.

۳.۲ محاسبه توابع همبستگی به روش اختلالی

از قضیه ویک می توانیم استفاده‌کنیم و توابع همبستگی را نیز برای تئوری با پتانسیل به صورت اختلالی حساب‌کنیم. برای این‌کار از تعریف تابع همبستگی حساب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}\langle x_ix_j\cdots x_k\rangle &:= \frac{\int DXx_ix_j\cdots x_ke^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+V(X)}}{e^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+V(X)}}\\ &= \frac{\int DXx_ix_j\cdots x_ke^{V(X)}e^{-\frac{1}{2}(X^tAX)}}{e^{-\frac{1}{2}(X^tAX)}}\times\frac{\int DXe^{-\frac{1}{2}(X^tAX)}}{e^{-\frac{1}{2}(X^tAX)+V(X)}}\\ &= \frac{\langle x_ix_j\cdots x_ke^{V(X)}\rangle_0}{\langle e^{V(X)}\rangle_0}\end{aligned} \tag{۳۴}$$

به این ترتیب توانسته ایم تابع چند نقطه ای را در مدل غیرگاووسی برحسب نسبت توابع چند نقطه ای درمدل گاووسی بنویسیم. با بسط e^V برحسب توان های متوالی V و استفاده از قضیه ویک می توانیم توابع همبستگی را حساب کنیم. این کار را بهتر است در چارچوب یک مثال انجام دهیم . این مثال در واقع شکل گسسته پتانسیل ϕ^4 است که در بسیاری از مدل های لانداوگینزبورگ به کار می رود. به همین دلیل این مثال را مثال ϕ^4

می نامیم ، که نامی است که در نظریه میدان این نوع پتانسیل را با آن می شناسند اگر چه مثالی که ما مطالعه می کنیم شامل هیچ میدانی نیست.

۴.۲ دیاگرام های فاینمن برای پتانسیل $\sum_i x_i^4$

برای توضیح روش اختلال پتانسیل

$$V(X) = \lambda \sum_{i=1}^{N} x_k^4$$

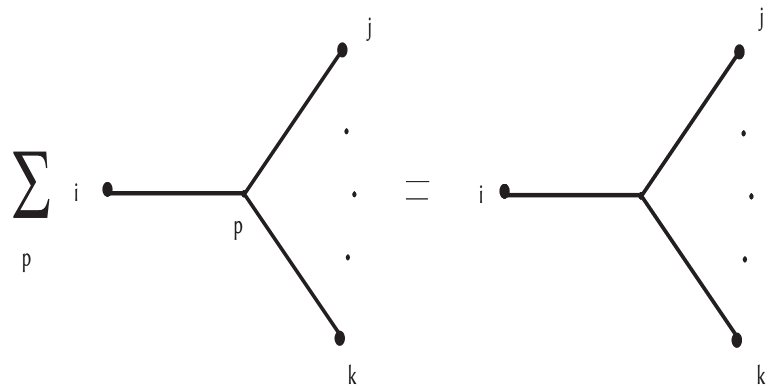
را به کار می بریم. فرض ما این است که پارامتر λ کوچک است و در هر نتیجه ای که بدست می آوریم قوای بالاتر این پارامتر تصحیحات کوچکی نسبت به قوای پایین تر آن هستند. به عنوان مثال تابع دو نقطه ا ی را دراین مدل حساب می کنیم. داریم:

$$\langle x_i x_j \rangle = \frac{\langle x_i x_j e^{\lambda \sum_{k=1} N x_k^4} \rangle_0}{\langle e^{\lambda \sum_{k=1} N x_k^4} \rangle_0} \equiv \frac{A}{B} \tag{۳۵}$$

که در آن A و B را برای نمایش صورت و مخرج کسر به کار برده ایم. با استفاده از قضیه ویک می توانیم صورت و مخرج کسر را تا مرتبه یک از λ حساب کنیم.

$$\begin{aligned} B &= \langle e^{\lambda \sum_{k=1} N x_k^4} \rangle_0 \approx \langle 1 + \frac{g}{4!} \sum_{k=1}^{N} x_k^4 \rangle_0 = 1 + \lambda \sum_{k=1}^{N} \langle x_k^4 \rangle_0 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N} \lambda (3\Delta_{kk}^2) = 1 + \sum_{k=1}^{N} 6\lambda \Delta_{kk}^2 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$$\begin{aligned} A &= \langle x_i x_j e^{\lambda \sum_{k=1} N x_k^4} \rangle_0 \approx \langle x_i x_j + x_i x_j \lambda \sum_{k=1}^{N} x_k^4 \rangle_0 = \Delta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^{N} \langle x_i x_j x_k^4 \rangle_0 \\ &= \Delta_{ij} + \sum_{k=1}^{N} \lambda (3\Delta_{kk}^2 \Delta_{ij} + 12 \Delta_{ik} \Delta_{jk} \Delta_{kk}) = \Delta_{ij} + \sum_{k=1}^{N} (6\lambda \Delta_{ij} \Delta_{kk}^2 + 12\lambda \Delta_{ik} \Delta_{jk} \Delta_{kk}) \end{aligned} \tag{۳۷}$$



شکل ۳: قرار داد دوم فاینمن : روی نقاط بدون شاخص جمع زده می شود.

با استفاده از بسط دو جمله ای برای مخرج و ساده‌کردن نتیجه نهایتاً بدست می آوریم:

$$\langle x_i x_j \rangle = \Delta_{ij} + 12\lambda \sum_{k=1}^{N} \Delta_{ik}\Delta_{jk}\Delta_{kk} + O(\lambda^2) \tag{۳۸}$$

این نتیجه تا مرتبه λ صحیح است.

هرکس‌که یک بار محاسبات بالا را انجام داده باشد بزودی می فهمد‌که درآن ها نظمی هست‌که به‌کمک آن می توان محاسبات گسترده را بصورت خیلی خلاصه تری انجام داد و به نتیجه رسید. این نظم چنان است‌که به ما اجازه می دهد با‌کمک نمودارهای ساده و قواعد ساده ای توابع چند نقطه ای را تا هرمرتبه به صورت سیستماتیک بدست بیاوریم.
تمام قواعد فاینمن برای هر پتانسیلی تنها متکی برقضیه ویک و قراردادهای دیاگرامی آن هستند. این قرار داد ها را یک بار دیگر یادآوری می‌کنیم:

یک – به هر جمله Δ_{ij} یک پاره خط‌کوتاه نسبت دهیم‌که دو سر آن با برچسب های i و j مشخص شده است.

دو : هرگاه‌که دریک عبارت روی یک شاخص مثلاً k جمع زده شد در شکل مربوطه آن شاخص را صراحتا نمی نویسیم زیرا دیگر شاخص بخصوصی مورد نظرنیست و روی تمام شاخص ها جمع زده شده است. این قرارداد درشکل ((4.2 نشان داده شده است:
سه– مطابق با قضیه ویک هر تابع n نقطه ای برابر است با مجموع تمام ادغام های ممکن از جفت نقاط.

با توجه به این سه قاعده می توان به جای $\sum_j x_j^4$ یک علامت ضرب در قرار داد که روی نقطه ضرب در آن هیچ شاخصی نوشته نشده است. این ضرب در چهار پا دارد که نشان دهنده چهار نقطهx_i است که همه روی هم قرار دارند و آماده ادغام شدن با یکدیگر و هم چنین با دیگر نقاطی هستند که در عبارت $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V$ هستند. به این ترتیب یک بار دیگر می توانیم صورت و مخرج کسری را که قبلا به صورت تحلیلی حساب کردیم ، این بار به صورت دیاگراماتیک حساب کنیم. نتیجه در شکل ؟؟ نشان داده شده است.

همانطورکه در محاسبه تحلیلی دیدیم دیاگرامی که هیچ گونه پای خارجی ندارد و اصطلاحا دیاگرام خلا به خلا[1] نامیده می شود از صورت و مخرج حذف شد. این یک خاصیت عمومی در دیاگرام های فاینمن است که بعدا آن را به صورت عمومی ثابت می کنیم.

با توجه به این مثال و این قرارداد ها و قضیه ویک می توان یک مجموعه قواعد گرافیکی برای محاسبه توابع همبستگی برای هر پتانسیلی بدست آورد. این قواعد گرافیکی قواعد فاینمن خوانده می شوند و کمی دقت نشان می دهد که فرم آنها برای پتانسیل $\frac{g}{4!}\sum_{i=1}^N x_i^4$: به شکل زیر هستند:

برای محاسبه یک تابع همبستگی به شکل $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle$ در رتبه k به ترتیب زیر عمل می کنیم :

الف : تمام دیاگرام هایی که شامل n نقطه خارجی $i_1, i_2, \cdots i_n$ و k تا راس چهارپایی هستند وازنظر توپولوژیک بایکدیگر متفاوتند را رسم می کنیم. دیاگرام هایی که جزء خلاء به خلاء دارند را درنظر نمی گیریم.

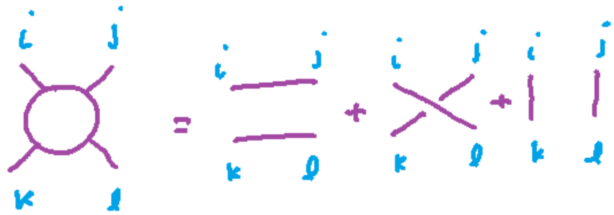
ب : برای هر دیاگرام یک ضریب ترکیبیاتی که ناشی از نحوه های مختلف ایجاد آن دیاگرام است درنظر می گیریم.

ج : به هر راس یک ضریب λ نسبت می دهیم.

د : به هرپاره خط که دوسرآن نقاط i, j هستند عبارت Δ_{ij} را نسبت می دهیم.

ه : برای هردیاگرام تمام فاکتورهایی راکه درقسمت های قبلی نسبت داده ایم درهم ضرب می کنیم و روی هر نقطه داخلی مثل j جمع $\sum_{j=1}^N$

[1] Vaccum To Vaccum Diagram



شکل ۴: تابع چهارنقطه ای $\langle x_i x_j x_k x_l \rangle$ برای توزیع گاووسی بنابرقضیه ویک محاسبه می شود.

می زنیم.

باتوجه به این قواعد می توان تمام عبارت هایی راکه دربخش پیشین بدست آورده ایم بازنویسی کنیم. برای مثال رابطه (18) به صورت نمودار شکل ۴.۲ درمی آید، و یا روابط ۳۶ ، ۳۷ و ۳۸ به صورت نمودارهای شکل ۴.۲ در می آیند.

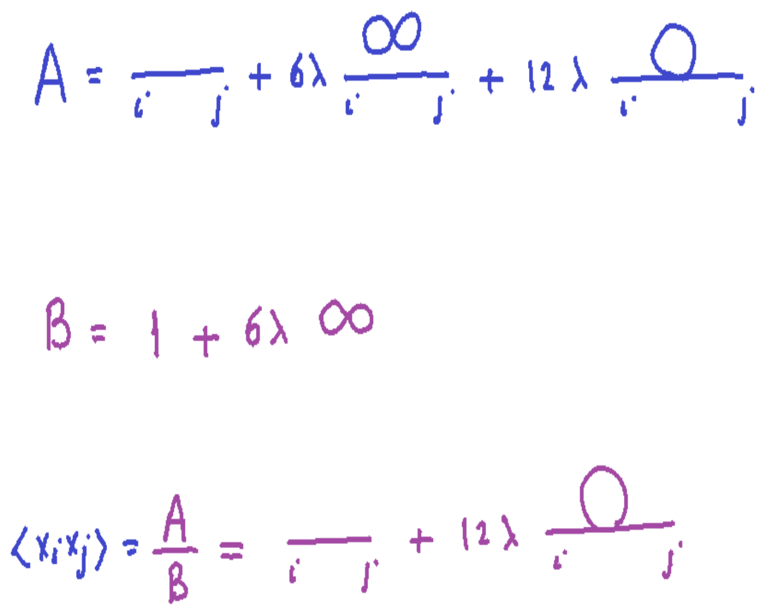
۳ دو خاصیت عمومی در دیاگرام های فاینمن

دراین قسمت می خواهیم دو خاصیت عمومی را در دیاگرام های فاینمن ثابت کنیم.

۱.۳ حذف دیاگرام های خلاء به خلاء

نخست باید دیاگرام خلاء به خلاء را تعریف کنیم. این نوع دیاگرام دیاگرامی است که هیچ نوع پای خارجی ندارد مثل شکل (؟؟) :

حال خاصیت مورد نظر را درقالب یک قضیه بیان می‌کنیم.



شکل ۵: معادل گرافیک عبارت B از رابطه ۱۴.

قضیه یک : در یک تابع چند نقطه ای مثل $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle$ دیاگرام های خلاء به خلاء حذف می شوند.

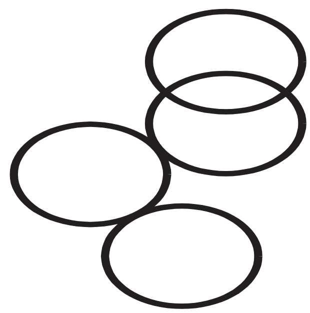
اثبات: می دانیم که

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle = \frac{\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0}{\langle e^V\rangle_0} \tag{۳۹}$$

که درآن V تابع پتانسیل است. حال صورت کسر را محاسبه می کنیم. داریم

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0 = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^N\rangle_0 \tag{۴۰}$$

حال عبارت $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^N\rangle_0$ متناظر با دیاگرامی است که درآن n نقطه خارجی معین با نام های $i_1, i_2, \cdots i_n$ به پاهای داخلی ناشی از V ها به انواع و اقسام حالات وصل شده اند . یادآوری می کنیم که هر V بسته به نوع پتانسیل را می توان به صورت یک نقطه بدون شاخص تصور کرد که از آن تعدادی خط یا پا خارج شده است. قرار است که این پاها به نقاط خارجی و یا پاهای V های دیگر وصل شوند و درآخر سر



شکل ۶: نمونه ای از دیاگرام خلاء به خلاء :

تنها پاهای خارجی $i_1, i_2, \cdot i_n$ باقی بمانند. حال دقت می‌کنیم‌که عبارت های خلاء به خلاء از به هم پیوستن پاهای تعدادی از V ها بدست می آیند. برای آنکه یک دیاگرام خلاء به خلاء درست‌کنیم می بایست تعدادی مثلاً q تا از این V ها را انتخاب‌کنیم و پاهای آنها را به هم وصل کنیم. مجموعه تمام دیاگرام های خلاءبه خلاء ای‌که به این ترتیب بدست می آید را با چیزی نیست جز $\langle V^q\rangle_0$. بقیه V ها آنهایی هستندکه به نحوی به یکدیگر و به پاهای خارجی وصل شده اند. مجموعه تمام این نوع دیاگرام ها را با $\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^{N-q}\rangle_0'$ نشان می دهیم‌که درآن علامت « پریم » به معنای آن است‌که این عبارت ها شامل هیچ نوع دیاگرام های خلاءبه خلاء ای نیستند. حال دقت می‌کنیم‌که برای انتخاب q تااز V ها $\frac{N!}{q!(N-q)!}$ تا انتخاب داریم. بنابراین می توانیم عبارت (40) را به صورت زیر بازنویسی‌کنیم:

$$\begin{aligned}\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0 &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{q=0}^{N}\frac{N!}{q!(N-q)!}\langle V^q\rangle_0\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^{N-q}\rangle_0' \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\langle V^q\rangle_0\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}V^{p}\rangle_0' \\ &= \langle e^V\rangle_0\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0'\end{aligned} \tag{۴۱}$$

باتوجه به رابطه (39) بدست می آوریم‌که

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\rangle = \langle x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}e^V\rangle_0' \tag{۴۲}$$

که درآن علامت « پریم » به معنای آن است‌که هیچ نوع دیاگرام خلاء به خلاء ای در بسط دیاگرام ها نمی بایست نگاه داشته شود.

۲.۳ تابع مولد دیاگرام های یکپارچه

۴ تعمیم روش اختلال به میدان ها

آنچه را که دربخش های پیشین گفتیم براحتی می توان به متغیرهای پیوسته و یا به میدان ها تعمیم داد. دراینجا خود را محدود به میدان های حقیقی می کنیم. بعد از میدان های اسکالر حقیقی خواننده را راهنمایی خواهیم کرد که چگونه آنچه را که در این بخش یاد می گیرد به موقعیت های پیچیده تر تعمیم دهد. اکنون تنهاکاری که باید انجام دهیم آن است که با دقت گذار از تعداد محدودی متغیر به تعداد بی نهایت پیوسته از متغیررا انجام دهیم.

این کار به شکل زیر انجام می شود:

$$\begin{aligned} i &\longrightarrow x \\ x_i &\longrightarrow \phi(x) \\ A_{ij} &\longrightarrow A(x-y) \\ J_i &\longrightarrow J(x) \\ \sum_i &\longrightarrow \int dx. \end{aligned} \tag{۴۳}$$

با این جایگزینی تمام روابطی که قبلا برای متغیرهای گسسته بدست آورده ایم برای حالت پیوسته و میدان ها تعمیم می یابد. فرض کنید که هدف ما محاسبه انتگرال زیراست :

$$Z[J] = \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int dx \int dy \phi(x) A(x-y)\phi(y) + V(\phi) + \int dx J(x)\phi(x)} \tag{۴۴}$$

چنین انتگرالی نمونه کلی تابع پارش برای یک مدل لانداو-گینزبورگ است، ممکن است که انتگرال دوگانه روی نقاط فضا و حضور جمله $A(x-y)$ شما را در یکی دانستن این تابع پارش با تابع پارش مدل لانداو-گینزبورگ دچار تردید کند، زیرا شرط اساسی تابعی لانداو این بود که این تابعی یک انتگرال از جملات موضعی باشد. تابع $A(x-y)$ را هسته [۲] این انتگرال می نامند و در حقیقت تابعی لانداو در انتگرال بالا نیز برای دسته وسیعی از هسته ها یک تابعی موضعی است. برای این که این موضوع را بدرستی درک کنیم یک بار دیگر به تعریف تابعی موضعی [۳]

[۲] Kernel

[۳] Local

نگاه می‌کنیم: تابعی لانداو می بایست به صورت زیر نوشته شود:

$$L[\phi] = \int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_i\phi, \partial_i\partial_j\phi, \cdots) \tag{۴۵}$$

که در آن درجه مشتقات از میدان تا یک مقدار محدود بالا می رود. چنین تابعی از میدان ها را یک تابعی موضعی می خوانیم. می توان شکل کلی آن را به صورت زیر نوشت:

$$L[\phi] = \int dx \phi(x)\mathcal{D}\phi(x) + V(\phi) \tag{۴۶}$$

که در آن $\mathcal{D}$ یک عملگر کلی خطی است که هم شامل جملات ثابت و هم شامل عملگرهای مشتق تا یک رتبه متناهی است. به عنوان مثال این عملگر می تواند به شکل های زیر باشد:

$$\mathcal{D} = a + b\nabla^2, \qquad \mathcal{D} = a + b\nabla^2 + c(\nabla^2)^2. \tag{۴۷}$$

همواره می توان چنین تابعی هایی را به صورت یک انتگرال دوگانه مطابق با فرم کلی ۴۴ نوشت. برای این کار کافی است که از روی عملگر D ماتریس A را بدست آورد. درواقع $A(x-y)$ چیزی نیست جز هسته عملگردیفرانسیل D که مطابق با رابطه زیر تعریف می شود:

$$D_x\phi(x) =: \int A(x-y)\phi(y)dy \tag{۴۸}$$

و با توجه به تعریف فوق واضح است که

$$D_x\phi(x) = D_x \int \delta(x-y)\phi(y)dy = \int (D_x\delta(x-y))\phi(y) \tag{۴۹}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$A(x-y) := D_x\delta(x-y). \tag{۵۰}$$

تمرین: هسته عملگرهای دیفرانسیل نوشته شده در رابطه ۴۷ را بدست آورید.

به این ترتیب می بینیم که تابع پارش یک مدل لانداو گینزبورگ چیزی نیست جز نمونه ای از انتگرال هایی که تا کنون حساب کرده ایم تنها تفاوت اش این است که تعداد متغیرهای آن بسیار زیاد است. بنابراین می توان با تعمیم مناسبی از آنچه که در بخش های پیشین این درس یادگرفتیم تابع پارش مدل لانداو –گینزبورگ را درحالت کلی حساب کنیم. مسلما در این جا هم نخست می بایست تقریب گاووسی را به کار ببریم به این معنی که از جمله برهم کنش یعنی $V(\phi)$ صرف نظر کنیم. در این حالت تابع پارش را با $Z_0[J]$ نشان می دهیم. چنین تابع پارشی را به طور دقیق می توان حساب کرد. توابع همبستگی نیز برای چنین مدلی بنا بر قضیه ویک به طور دقیق قابل محاسبه هستند. سپس می توانیم جمله برهم کنش را در نظر بگیریم و از روش اختلال استفاده کرده و تمام توابع همبستگی و دیگر کمیت ها را به صورت اختلالی حساب کنیم. بعد از این مقدمه به محاسبه تابع پارش گاووسی می پردازیم.

۱.۴ محاسبه تابع پارش لانداو-گینزبورگ در تقریب گاووسی

همانطور که در مقدمه این بخش گفتیم توجه خود را به یک میدان اسکالر حقیقی معطوف می کنیم. تابع پارش این مدل در تقریب گاووسی عبارت است از:

$$Z_0[J] = \int D\phi e^{-\int dxdy \frac{1}{2}\phi(x)A(x-y)\phi(y)+\int dx J(x)\phi(x)}. \qquad (۵۱)$$

که در آن انتگرال dx می تواند انتگرال روی یک فضای D بعدی باشد. دراین صورت با مراجعه به روابط مربوط به انتگرال های گاووسی دربخش اول خواهیم داشت :

$$Z_0[J] = Ce^{\frac{1}{2}\int dx \int dy J(x)\Delta(x-y)J(y)} \qquad (۵۲)$$

که درآن C یک ثابت است که درتوابع همبستگی دخالت نمی کند و Δ معکوس ماتریس A است یعنی :

$$\int A(x-y)\Delta(y-z)dy = \delta(x-z) \qquad (۵۳)$$

تحت این شرایط خواهیم داشت :

$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle = \Delta(x-y) \qquad (۵۴)$$

نکته اول: :

تبدیل فوریه $A(x-y)$ را به شکل زیر می نویسیم :

$$A(x-y) = \int dk A(k) e^{ik(x-y)}, \qquad A(k) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int dx A(x-y) e^{-ik(x-y)} \tag{۵۵}$$

دراین صورت خواننده می تواند براحتی ثابت کند که :

$$\Delta(x-y) = \int \frac{1}{A(k)} e^{ik(x-y)}. \tag{۵۶}$$

تمرین: توضیح دهید که چرا $A(k)$ صفر نیست و بنابراین بودن آن در مخرج کسر اشکالی ندارد.

به عنوان مثال اگر درفضای توابع حقیقی یک متغیره داشته باشیم $D = -\frac{d^2}{dx^2} + m$ آنگاه

$$A(x-y) = (-\frac{d^2}{dx^2} + m) \frac{1}{(2\pi)^D} \int dk e^{ik(x-y)} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int dk (m+k^2) e^{ik(x-y} \tag{۵۷}$$

که از آن می توان براحتی نتیجه گرفت :

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int dq \frac{1}{(m+k^2)} e^{ik(x-y} \tag{۵۸}$$

۵ قواعد فاینمن در فضای مختصات

مدل لانداو –گینزبورگ برای مدل آیزینگ با یک میدان اسکالر حقیقی و پتانسیل ϕ^4 توصیف می شود. تابعی لانداو برای این مدل به صورت زیر نوشته می شود:

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2} \phi(x) (m - \nabla^2) \phi(x) + \lambda \phi^4(x) \right]. \tag{۵۹}$$

دقت کنید که در این جا برای سادگی نمادهای a_2 و a_4 را به ترتیب با m و λ جایگزین کرده ایم. بنابراین می دانیم که در نزدیکی نقطه بحرانی m به سمت صفر میل می کند و پارامتر λ نیز یک پارامتر همواره مثبت است. بنابراین مطابق با آنچه که در بخش های قبلی آموختیم توابع همبستگی را برحسب رتبه های λ حساب کنیم.

با توجه به این رابطه می توانیم قواعد فاینمن را برای محاسبه توابع همبستگی این نظریه میدان در فضای مختصات بنویسیم. این قواعد به شکل زیر هستند.

برای محاسبه یک تابع همبستگی به شکل $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle$ در رتبه k به ترتیب زیر عمل کنید:

الف : تمام دیاگرام هایی که شامل n نقطه خارجی $x_1, x_2, \cdots x_n$ و k تا راس چهارپایی هستند وازنظر توپولوژیک بایکدیگر متفاوتند را رسم کنید. دیاگرام هایی که جزء خلاء به خلاء دارند را درنظر نگیرید.

ب : برای هر دیاگرام یک ضریب ترکیبیاتی که ناشی از نحوه های مختلف ایجاد آن دیاگرام است درنظر بگیرید.

ج : به هر راس یک ضریب λ نسبت دهید.

د : به هرپاره خط که دوسرآن نقاط x, y هستند عبارت $\Delta(x-y)$ را نسبت دهید.

ه : برای هردیاگرام تمام فاکتورهایی راکه درقسمت های قبلی نسبت داده اید درهم ضرب کنید و روی هر نقطه داخلی مثل x انتگرال $\int d^Dx$ بگیرید.

تمرین: تابع همبستگی $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$' را تا رتبه یک برحسب λ بنویسید. انتگرال های نهایی را لازم نیست محاسبه کنید.

تمرین: تابع همبستگی $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$' را تا رتبه دو برحسب λ بنویسید. انتگرال های نهایی را لازم نیست محاسبه کنید.

۱.۵ قواعد فاینمن در فضای تکانه

می توانیم تابعی لانداو–گینزبورگ را به جای اینکه برحسب میدان $\phi(x)$ و مشتقات آن بنویسیم برحسب تبدیل فوریه آن یعنی $\tilde{\phi}(k)$ بنویسیم. در این صورت تابع پارش به صورت زیر نوشته می شود:

$$Z[J] = \int D\tilde{\phi}(k)e^{-L[\tilde{\phi}]}. \qquad (۶۰)$$

به عنوان مثال برای مدل لانداو–گینزبورگ زیر

$$L[\phi] = \int d^Dx \left[\phi(x)(m - \nabla^2)\phi(x) + \lambda\phi^4(x)\right] \qquad (۶۱)$$

داریم

$$L[\tilde{\phi}] = \int d\overline{k} \left[\phi(-k)(m + k^2)\phi(k)\right] + \lambda \int d\overline{k_1}d\overline{k_2}d\overline{k_3}\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\tilde{\phi}(k_3)\tilde{\phi}(-k_1 - k_2 - k_3) \qquad (۶۲)$$

که در آن از نماد خلاصه زیر استفاده‌کرده ایم و در روابط آینده نیز استفاده خواهیم‌کرد

$$\overline{dk} \equiv \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}. \qquad (۶۳)$$

بنابراین بجای این‌که میدان تصادفی را $\phi(x)$ بگیریم می توانیم میدان تصادفی را مود فوریه آن یعنی $\tilde{\phi}(k)$بگیریم. توابع همبستگی و دیگر کمیت های فیزیکی و مشاهده پذیر های آزمایشگاهی را نیز می توانیم بر حسب $\tilde{\phi}(k)$ بنویسیم. وقتی‌که این‌کار را می‌کنیم می توانیم برای محاسبه این‌کمیت ها قواعد فاینمن را پیداکنیم. به این قواعد، قواعد فاینمن در فضای تکانه می‌گوییم. علاوه بر این روش یک روش دیگر برای بدست آوردن قواعد فاینمن در فضای تکانه وجود داردکه ما این راه را دنبال می‌کنیم.

تابع همبستگی $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle$ را درنظر بگیرید. می توانیم تک تک میدان ها را برحسب مود های فوریه آنها بنویسیم. از آنجاکه اندازه انتگرال $\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}$ مکرراً درروابط آینده ظاهر می شود بهتر است‌که بجای آن نماد خلاصه $\overline{dk}$ را بکار ببریم. برای سادگی مراجعه این قرارداد را به طور صریح و به صورت یک رابطه جداگانه می نویسیم:

$$\phi(x) = \int \overline{dk}e^{ikx}\hat{\phi}(k) \qquad \hat{\phi}(k) = \int d^Dxe^{-ikx}\phi(x) \qquad (۶۴)$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle = \int \overline{dk_1 dk_2}\cdots\overline{dk_n} e^{i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots k_nx_n)}\langle\hat{\phi}(k_1)\hat{\phi}(k_2)\cdots\hat{\phi}(k_n)\rangle \quad (۶۵)$$

تابع $\langle\hat{\phi}(k_1)\hat{\phi}(k_2)\cdots\hat{\phi}(k_n)\rangle$ را تابع همبستگی n نقطه ای در فضای تکانه می خوانیم.
رابطه بالا به ما نشان می دهد که چگونه از روی تابع همبستگی در فضای تکانه تابع همبستگی در فضای مختصات را بدست آوریم. هم چنین می توانیم با دردست داشتن تابع همبستگی در فضای مختصات تابع همبستگی در فضای تکانه را به ترتیب زیر بدست آوریم :

$$\langle\hat{\phi}(k_1)\hat{\phi}(k_2)\cdots\hat{\phi}(k_n)\rangle = \int d^Dx_1 d^Dx_2\cdots d^Dx_n e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots k_nx_n)}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \quad (۶۶)$$

دراین قسمت می خواهیم قواعد فاینمن برای توابع همبستگی درفضای تکانه را بدست آوریم. نخست باید توجه کنیم که هرگاه میدان $\phi(x)$ حقیقی باشد تابع $\hat{\phi}(k)$ دارای خاصیت زیراست :

$$\hat{\phi}(-k) = \hat{\phi}^*(k) \quad (۶۷)$$

هم چنین توجه می کنیم که هرتابع همبستگی درفضای تکانه مساوی با صفراست مگراینکه مجموع چهارتکانه های درون آن مساوی با صفر باشد. برای اثبات این نکته به رابطه (65) توجه می کنیم. فرض برآن است که نظریه میدان ما دارای تقارن انتقالی است که با کنش داده شده این امر واضح است. درنتیجه خواهیم داشت :

$$\langle\phi(x_1+a)\phi(x_2+a)\cdots\phi(x_n+a)\rangle = \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \qquad \forall a \quad (۶۸)$$

بااستفاده از این خاصیت و رابطه (66) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\langle\hat{\phi}(k_1)\hat{\phi}(k_2)\cdots\hat{\phi}(k_n)\rangle = \int d^Dx_1 d^Dx_2\cdots d^Dx_n e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots k_nx_n)}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \\
=& \int d^Dx_1 d^Dx_2\cdots d^Dx_n e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots k_nx_n)}\langle\phi(x_1+a)\phi(x_2+a)\cdots\phi(x_n+a)\rangle \\
=& \int d^Dx'_1 d^Dx'_2\cdots d^Dx'_n e^{-i(k_1(x'_1-a)+k_2(x'_2-a)+\cdots k_n(x'_n-a))}\langle\phi(x'_1)\phi(x'_2)\cdots\phi(x'_n)\rangle \\
=& \langle\hat{\phi}(k_1)\hat{\phi}(k_2)\cdots\hat{\phi}(k_n)\rangle e^{i(k_1+k_2+\cdots k_n)a}
\end{aligned} \quad (۶۹)$$

شکل ۷: شکل مربوط به مثال ۱.

بنابراین بدست آورده ایم:

$$\langle\hat{\phi}(k_1)\hat{\phi}(k_2)\cdots\hat{\phi}(k_n)\rangle(1-e^{i(k_1+k_2+\cdots k_n)a})=0 \qquad (۷۰)$$

که به معنای آن است که تابع همبستگی درفضای تکانه فقط وقتی غیر صفراست که مجموعه تکانه های آن برابر باصفرباشد.
بهترین راه برای یافتن قواعد فاینمن درفضای تکانه آن است که چند مثال مشخص از توابع همبستگی را درفضای مختصات درنظر بگیریم و با استفاده از رابطه (66) توابع همبستگی متناظر را درفضای تکانه بدست بیاوریم. درمثال های زیر مدل لانداو گینزبورگ با میدان اسکالر حقیقی را در نظر می گیریم و انتشارگر آن را در فضای حقیقی با $\Delta(x-y)$ و درفضای تکانه با $\Delta(k)$ نشان می دهیم . برای این میدان داریم $\Delta(k)=\frac{1}{m+k^2}$. یادآوری می کنیم که :

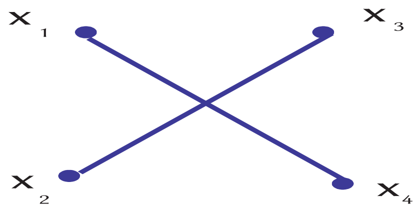
$$\Delta(x)=\int\overline{dk}e^{ikx}\Delta(k) \qquad \Delta(k)=\int d^Dxe^{-ikx}\Delta(x) \qquad (۷۱)$$

البته شکل کلی قوانین فاینمن مستقل از نوع انتشارگری است که با آن آغازکرده ایم.
با استفاده از این روابط حالا می توانیم قواعد فاینمن را در فضای تکانه بدست بیاوریم. بهترین کار این است که از چند مثال ساده شروع کنیم و قواعد کلی را بدست بیاوریم.

مثال ۱: تابع دونقطه ای درمرتبه صفرم ، شکل (؟؟):
از تابع دو نقطه ای در مرتبه صفرم شروع می کنیم یعنی وقتی که برهم کنش را در نظر نگرفته ایم و با تئوری گاووسی سروکار داریم.
داریم

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_0=\Delta(x_1-x_2) \qquad (۷۲)$$

درنتیجه



شکل ۸: تابع چهارنقطه ای متصل در رتبه اول .

$$\langle\phi(k_1)\phi(k_2)\rangle_0 = \int d^Dx_1d^Dx_2e^{-i(k_1x_1+k_2x_2)}\Delta(x_1-x_2)$$
$$= \int d^Dx_1d^Dx_2e^{-i(k_1x_1+k_2x_2)}\int \overline{dk}e^{ik(x_1-x_2)}\Delta(k) \quad (۷۳)$$

با انتگرال‌گیری روی x_1 و x_2 بدست می آوریم:

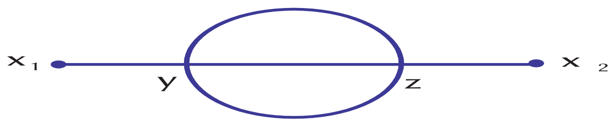
$$\langle\phi(k_1)\phi(k_2)\rangle_0 = \int \overline{dk}(2\pi)^D\delta(k-k_1)(2\pi)^D\delta(k+k_2)\Delta(k)$$
$$= (2\pi)^D\delta(k_1+k_2)\Delta(k_1) \quad (۷۴)$$

به این ترتیب می بینیم که تابع دو نقطه ای در فضای تکانه شکل خیلی ساده ای دارد. نخست اینکه مجموع تکانه های دو میدان درون آن می بایست صفر باشد. این به این معنی است که می توانیم آن را با یک خط جهت دار که روی آن تکانه ی k نوشته شده است ، نشان دهیم. این موضوع در شکل ؟؟ نشان داده شده است.

مثال ۲ : تابع چهارنقطه ای متصل درمرتبه اول ، شکل (؟؟) :

این عبارت در فضای مختصات با شکل ۸۵ نشان داده شده است. تابع چهارنقطه ای متصل در رتبه اول برابراست با:

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle_c^{(1)} = \lambda\int d^Dy\Delta(x_1-y)\Delta(x_2-y)\Delta(x_3-y)\Delta(x_4-y) \quad (۷۵)$$



شکل ۹: تابع دو نقطه ای متصل دررتبه دوم برای پتانسیل $\lambda\phi^4$.

دراینجا منظوراز شاخص (1) تاکید براین است که این تابع همبستگی فقط مربوط به رتبه اول است نه تا رتبه اول و منظور از زیرنویس c متصل بودن این تابع همبستگی است.

با توجه به این رابطه و رابطه (66) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\tilde{\phi}(k_3)\tilde{\phi}(k_4)\rangle_c^{(1)} &= \lambda\int d^Dx_1d^Dx_2d^Dx_3d^Dx_4e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4)}\\ &\times \quad d^Dy\Delta(x_1-y)\Delta(x_2-y)\Delta(x_3-y)\Delta(x_4-y)\end{aligned} \qquad (۷۶)$$

با تغییر متغیر های $z_i \longrightarrow x_i - y$ و $y \longrightarrow y$ انتگرال فوق را به شکل زیر می نویسیم :

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\tilde{\phi}(k_3)\tilde{\phi}(k_4)\rangle_c^{(1)} &= \lambda\int d^Dz_1d^Dz_2d^Dz_3d^Dz_4d^Dye^{i(k_1z_1+k_2z_2+k_3z_3+k_4z_4)}\\ &\times \quad e^{-iy(k_1+k_2+k_3+k_4)}\Delta(z_1)\Delta(z_2)\Delta(z_3)\Delta(z_4)\\ &= (2\pi)^D\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\lambda\Delta(k_1)\Delta(k_2)\Delta(k_3)\Delta(k_4)\end{aligned} \qquad (۷۷)$$

مثال ۳ : تابع دو نقطه ای متصل در مرتبه دوم ، شکل (؟؟) :

برای سادگی فقط یکی از دیاگرام هایی راکه در این مرتبه وجود دارد در نظر می‌گیریم. این دیاگرام در شکل () نشان داده شده است.

عبارت تحلیلی مربوط به این دیاگرام برابر است با:

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle^{(2)} = \lambda^2\int d^Dyd^Dz\Delta(x_1-y)\Delta(x_2-z)\Delta^3(y-z) \qquad (۷۸)$$

با قراردادن این رابطه در رابطه (66) خواهیم داشت:

$$\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\rangle^{(2)} = \lambda^2 \int d^D x_1 d^D x_2 e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \int d^D y d^D z \Delta(x_1-y)\Delta(x_2-z)\Delta^3(y-z) \quad (۷۹)$$

با تغییر متغیر های $x'_1 = x_1 - y$ و $x'_2 = x_2 - z$ خواهیم داشت :

$$\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\rangle^{(2)} = \lambda^2 \int d^D x'_1 d^D x'_2 d^D y d^D z e^{ik_1(x'_1+y)+ik_2(x'_2+z)} \Delta(x'_1)\Delta(x'_2)\Delta^3(y-z) \quad (۸۰)$$

باانتگرال‌گیری روی x' ها خواهیم داشت :

$$\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\rangle^{(2)} = \lambda^2 \Delta(k_1)\Delta(k_2) \int d^D y d^D z e^{ik_1y+ik_2z} \Delta^3(y-z) \quad (۸۱)$$

اما

$$\int d^D y d^D z e^{ik_1y+ik_2z} \Delta^3(y-z) = \int d^D y d^D z e^{ik_1y+ik_2z} \int \overline{dkdk'dk"} e^{i(k+k'+k")(y-z)} \Delta(k)\Delta(k')\Delta(k"). \quad (۸۲)$$

حال روی متغیرهای y و z انتگرال می‌گیریم. نتیجه این انتگرال ها تولید دو تابع دلتای دیراک است: بنابراین طرف راست عبارت بالا برابر خواهد بود با

$$= \int \overline{dkdk'dk"} (2\pi)^D \delta(k_1+k+k'+k")(2\pi)^D \delta(k_2-k-k'-k")\Delta(k)\Delta(k')\Delta(k"). \quad (۸۳)$$

حال روی تکانه $k"$ انتگرال می‌گیریم که با توجه به این‌که $\overline{dk"} = \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$ است، باعث‌کم شدن یکی از توان های $(2\pi)^D$ می شود. در نتیجه عبارت بالا برابر می شود با:

$$= (2\pi)^D \delta(k_1+k_2) \int \overline{dkdk'} \Delta(k)\Delta(k')\Delta(k_2-k-k') \quad (۸۴)$$

باترکیب این دورابطه یعنی روابط (81) و (82) به نتیجه زیر می رسیم:

$$\langle\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\rangle^{(2)} = \lambda^2 \left[(2\pi)^D \delta(k_1+k_2)\right] \Delta(k_1)\Delta(k_2) \times \left[\int \overline{dkdk'} \Delta(k)\Delta(k')\Delta(k_2-k-k')\right] \quad (۸۵)$$

با توجه به مثال های یک ، دو و سه به قاعده های کلی فاینمن در فضای تکانه می رسیم: که بنابرآن تمام دیاگرام های متفاوت را رسم می کنیم و بعد از اختصاص ضرایب ترکیبیاتی مربوط به هر دیاگرام مراحل زیر را طی می‌کنیم:

نخست آنکه به هر پاره خط که روی آن تکانه k نوشته شده است فاکتور $\Delta(k)$ را نسبت می دهیم .

دوم آنکه قاعده بقای تکانه را در همه راس ها رعایت می‌کنیم.

سوم آنکه روی هر تکانه آزاد انتگرال می‌گیریم. دقت کنید که هر حلقه متناظر با یک تکانه آزاد است. بنابراین اگر در یک دیاگرام دو حلقه مستقل وجود داشته باشد به این معناست که دو تکانه آزاد وجود دارد که می بایست روی آنها انتگرال گرفت.

چهارم: به هر راس یک ضریب λ نسبت می دهیم،

و بالاخره اینکه :

پنجم: دست آخر هر آنچه را که بدست آورده ایم در فاکتور

$$(2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + \cdots k_N)$$

که در آن k_i ها تکانه های خارجی هستند ضرب می‌کنیم.