# توصیف حالت در مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۶ مهر ۱۴۰۳

## ۱ مقدمه

در درس های مقدماتی مکانیک کوانتومی آموخته ایم که حالت یک سیستم فیزیکی با یک بردار در یک فضای هیلبرت توصیف می شود. به طور خاص وقتی در مورد ذرات اسپین ۱/۲ حرف می زنیم می گوییم که ذره مثلا در حالت $|z+\rangle$ است یا در حالت $|x+\rangle$ قرار دارد. در این بحث های مقدماتی به ندرت توجه کرده ایم که این حالت ها حالت های خالص و تقریبا ایده آل هستند. ما وقتی حالت یک ذره را می شناسیم که روی آن اندازه گیری کرده باشیم . در غیر این صورت اطلاع خیلی کمی از حالت ذره داریم و نمی توانیم آن را مشخص کنیم. به عنوان مثال باریکه فوتون هایی که از یک صفحه پولاروید خارج می شو ند در یک حالت قطبیده مشخص مثل $|H\rangle$ قرار دارد چرا که صفحه پولاروید تنها فوتونهایی را از خود عبورد داده که قطبش آنها در راستای افقی باشند. به این ترتیب صفحه پولاروید روی باریکه فوتون ها یک اندازه گیری انجام داده و فوتون های در حالت $|H\rangle$ را فیلتر کرده است. [۱]

اما باریکه فوتون هایی که به دستگاه پولاروید می تابد هیچ نوع حالت مشخصی ندارد. به عبارت بهتر در این باریکه ذراتی با هر نوع قطبشی یافت می شود . در غیاب هر نوع اندازه گیری تنها می توان به اطلاعات آماری در مورد توزیع این حالت ها بسنده کرد و گفت که در این باریکه $p_i$ درصد ذرات در حالت $|\psi_i\rangle$ هستند. در چنین حالتی هرگاه بخواهیم متوسط یک مشاهده پذیر مثل $O$ را که روی این باریکه از ذرات اندازه

[۱] به طور کلی هر نوع عمل اندازه گیری یک عمل فیلترینگ است.

گیری کنیم از این اطلاعات آماری استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\langle O\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|O|\psi_i\rangle. \quad (۱)$$

این عبارت را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\langle O\rangle = tr(O\rho) \quad (۲)$$

که در آن $\rho$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (۳)$$

ماتریس $\rho$ ماتریس چگالی خوانده می شود و همانطور که از رابطه بالا پیداست این ماتریس توصیف کننده ذرات باریکه است. می گوییم که ذرات باریکه در یک حالت خالص قرار ندارند بلکه در یک حالت مخلوط یا آمیخته قرار دارند. تمام اطلاعاتی که می توان در چارچوب مکانیک کوانتومی از این باریکه ذرات استخراج کرد در ماتریس چگالی آن نهفته است و به همین دلیل ماتریس چگالی را ماتریس حالت این ذرات می گوییم.

دراین جا توجه به یک مسئله مهم ضروری است. برای آنکه از ماتریس چگالی صحبت کنیم نیازی نیست که حتما یک باریکه از ذرات داشته باشیم. حتی برای یک ذره نیز می توان از ماتریس چگالی سخن گفت. فرض کنید که تنها یک ذره در آزمایشگاه به شما داده شده است و نه یک باریکه از ذرات و به شما گفته شده است که حالت این ذره مشخص نیست. تنها این معلوم است که این ذره با احتمال $p_1$ در حالت $\psi_1\rangle$ است و با احتمال $p_2$ در حالت $\psi_2$ و الی آخر. بازهم شما برای توصیف نتایج آزمایش های خود بر روی این ذره به ماتریس چگالی نیاز خواهید داشت.

ماتریس $\rho$ به شکلی که در بالا معرفی شده است خاصیت های معینی دارد که شما براحتی می توانید درستی آنها را بیازمایید: این خاصیت ها این ها هستند:

$$\begin{aligned} \rho^\dagger &= \rho, \\ tr\rho &= 1, \\ \rho &\geq 0. \end{aligned} \quad (۴)$$

خاصیت آخر که به آن مثبت بودن ماتریس گفته می شود به این معنی است که تمام ویژه مقدارهای $\rho$ بزرگتر یا مساوی با صفر هستند و یا اینکه

متوسط ماتریس $\rho$ روی هر برداری بزرگتر یا مساوی با صفر است ، یعنی

$$\langle v|\rho|v\rangle \geq 0 \qquad \forall v. \tag{۵}$$

هرگاه که در رابطه (۳) تنها یکی از احتمالات غیرصفر باشد خواهیم داشت

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{۶}$$

و در این حالت می گوییم که ذره در یک حالت خالص [۲] است.

■ تمرین: الف: نشان دهید که یک حالت خالص است اگر و فقط اگر در شرط زیر صدق کند:

$$\rho^2 = \rho \tag{۷}$$

ب: تست کردن شرط بالا ممکن است کمی وقت ببرد. بنابراین ثابت کنید که یک حالت خالص است اگر و فقط اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$tr(\rho^2) = 1. \tag{۸}$$

دقت کنید که ابهامی که ما در مورد حالت یک سیستم داریم ممکن است شامل همه درجات آزادی نباشد. به عنوان مثال ممکن است که در مورد یک ذره تکانه آن را به طور دقیق بدانیم ولی در مورد اسپین آن اطلاعات چندانی نداشته باشیم. در این صورت حالت این ذره به صورت $\rho = |p\rangle\langle p| \otimes \rho_{spin}$ خواهد بود.

آنچه که گفتیم تنها یک نحوه نگاه به ماتریس چگالی بود. این مفهوم را به طریق دیگری نیز می توانیم بفهمیم. تا اینجا آموختیم که وقتی اطلاعات مشخصی در باره یک ذره نداریم و نمی توانیم آن را با یک مجموعه از مشاهده پذیرهای کامل توصیف کنیم می بایست آن بخش از درجات آزادی را که در مورد آنها اطلاعات کافی نداریم با یک ماتریس چگالی توصیف کنیم. در بسیاری اوقات ما نه به کل یک سیستم کوانتومی بلکه به اجزای آن علاقمندیم. به عنوان مثال در یک تله یونیه که چندین یون را دریک حالت کوانتومی نگاه داشته است علاقمندیم که حالت یکی

[۲] pure

از یون ها را تعیین کنیم، و روی آن اندازه گیری کنیم . به عنوان یک مثال دیگر توجه می کنیم که امروزه در آزمایشگاه می توانیم حالت هایی از یک زوج فوتون تهیه کنیم مثل حالتِ زیر

$$|\psi\rangle_{A,B} = \alpha|H, V\rangle + \beta|V, H\rangle \qquad (۹)$$

که درآن $H$ و $V$ نشان دهنده قطبش فوتون ها در راستای افقی و عمودی است. می توانیم چنین فوتون هایی را ده ها کیلومتر از یک دیگر جدا کنیم بدون اینکه قطبش آنها دچار تغییر شود. فرض کنید که آلیس و باب چنین زوج فوتونی را تهیه کرده اند و فوتون اول در آزمایشگاه آلیس و فوتون دوم در آزمایش باب قرار دارد که بسیار از آزمایشگاه آلیس دور است. شاخص های $A$ و $B$ برای شناسایی فوتون های آلیس و باب بکار رفته است. در چنین حالتی وقتی که آلیس روی فوتونی که در آزمایشگاه اش قرار دارد آزمایش می کند می خواهد که نتایج آزمایش هایش را درچارچوب مکانیک کوانتومی با حالتی که به آن فوتون نسبت می دهد توصیف کند. سوالی که با آن روبرو است این است که فوتون اش در چه حالتی است؟ و چگونه می بایست آن را توصیف کند. مطمئنا این فوتون در حالت $|H\rangle$ یا $|V\rangle$ نیست.

- تمرین: آیا آلیس می تواند بگوید که فوتون اش در حالت

$$\sqrt{\alpha}|H\rangle + \sqrt{\beta}|V\rangle \qquad (۱۰)$$

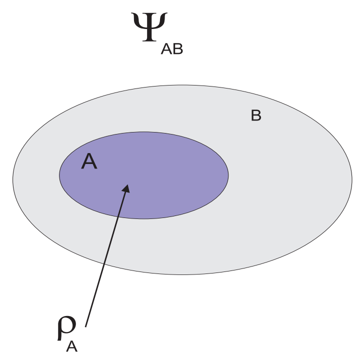
است؟ چرا؟

پاسخ این سوال این است که حالت فوتون آلیس با یک ماتریس چگالی توصیف می شود. پاسخ این سوال را به صورت کلی در زیر می آوریم .

سیستمی را در نظر بگیرید که از دو بخش $A$ و $B$ تشکیل شده است. بنا بر اصول مکانیک کوانتومی به این سیستم فضای هیلبرت $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ نسبت داده می شود. فرض کنید که $\{|i\rangle\}_{i=1}^{M}$ یک پایه برای $\mathcal{H}_A$ و $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^{N}$ یک پایه برای $\mathcal{H}_B$ باشد. دراین صورت یک حالت کلی از سیستم $AB$ توسط بردار حالت زیر داده می شود، شکل 1:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu}|i, \mu\rangle. \qquad (۱۱)$$

حال هر عملگر $M_A$ روی دستگاه $A$ چیزی نیست جز عملگری به شکل $M \otimes I$. درنتیجه خواهیم داشت :




شکل ۱: یک سیستم بسته با یک بردار حالت توصیف می شود، ولی اجزای آن با یک ماتریس چگالی مشخص خواهند شد.

$$\begin{aligned} \langle M\rangle_A &= \langle\psi|M\otimes I|\psi\rangle = tr_{AB}((M\otimes I)|\psi\rangle\langle\psi|) = tr_A\left(tr_B((M\otimes I)|\psi\rangle\langle\psi|)\right) \\ &= tr_A(M\rho_A) \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که درآن

$$\rho_A = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (۱۳)$$

ماتریس چگالی دستگاه $A$ نامیده می شود. به این ترتیب هر عنصر ماتریسی روی دستگاه $A$ را می توان به صورت $tr(M\rho)$ نوشت که درآن $\rho$ از رابطه بالا تعیین می شود و جانشین حالت کوانتومی دستگاه $A$ است. به طریق مشابه ماتریس چگالی دستگاه $B$ با رابطه $\rho_B = tr_A(|\psi\rangle\langle\psi|)$ داده می شود. می توان فرم صریح تر ماتریس چگالی را نیز بدست آورد. با توجه به رابطه (11) خواهیم داشت:

$$\rho_A = \sum_{i,j}\rho_{ij}|i\rangle\langle j| \quad (۱۴)$$

که درآن

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_{\mu}\psi_{i\mu}\psi^*_{j\mu}, \quad (۱۵)$$

و

$$\rho_B = \sum_{\mu;\nu}\rho_{\mu\nu}|\mu\rangle\langle\nu|, \quad (۱۶)$$

که درآن

$$(\rho_B)_{\mu\nu} = \sum_i \psi_{i\mu}\psi^*_{i\nu}. \quad (۱۷)$$

با توجه به این عبارت ها براحتی می توان خواص سه گانه ماتریس چگالی را تحقیق کرد یعنی این که $\rho$ یک ماتریس هرمیتی مثبت با رد برابر با واحد است.

■ تمرین: با استفاده از مفهوم ردّ جزیی نشان دهید که

$$\rho_A = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|). \quad (۱۸)$$

با توجه به آنچه که گفته شد حال می توانیم بگوییم که :

**حالت یک دستگاه فیزیکی با یک ماتریس چگالی $\rho$ ، که یک ماتریس هرمیتی، مثبت و با رد یک است داده می شود. ارزش انتظاری هر مشاهده پذیر که با عملگر هرمیتی $A$ داده می شود، به صورت زیر محاسبه می شود:**

$$\langle A\rangle_\rho = tr(A\rho). \quad (۱۹)$$

■ تمرین: ماتریس زیر داده شده است که روی فضای هیلبرت چهاربعدی $H_A \otimes H_B$ اثر می کند و هر دو فضا دوبعدی هستند.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad (۲۰)$$

مقادیر زیر را پیدا کنید:

$$tr_A(M), \qquad tr_B(M), \qquad tr(M).$$

نشان دهید که

$$tr_A(tr_B(M)) = tr_B(tr_A(M)). \tag{۲۱}$$

این خاصیت آخر را به صورت کلی ثابت کنید.

## ۲ حالت های یک کیوبیت

کیوبیت ساده ترین سیستم کوانتومی است که فضای هیلبرت اش دو بعد دارد. این فضای دوبعدی را با $C^2$ نشان می دهیم که فضای بردارهای دوبعدی مختلط است. حالت یک کیوبیت را معمولا به صورت

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \tag{۲۲}$$

می نویسیم که در آن $|0\rangle$ و $|1\rangle$ پایه محاسباتی خوانده می شود. هرگاه عملگرهای پاوولی را به صورت زیر بنویسیم:

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad , \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad , \quad Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{۲۳}$$

آنگاه پایه محاسباتی همان ویژه بردارهای عملگر $Z$ خواهد بود. ویژه بردارهای عملگر $X$ این ها هستند:

$$|x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \qquad |x,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \tag{۲۴}$$

معمولا این ویژه بردارها را به دلیل وفور استفاده از آنها با $|+\rangle$ و $|-\rangle$ نشان می دهیم. همانطور که از درس های مکانیک کوانتومی می دانیم می توان حالت یک کیوبیت را به صورت زیر پارامتریزه کرد

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \tag{۲۵}$$

که در آن $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le \phi < 2\pi$. چنین حالتی در واقع ویژه بردار عملگر پاوولی $\hat{n}\cdot\sigma$ است که در آن $\hat{n}$ بردار یکه ای است که در روی کره دو بعدی در جهت مشخص شده توسط زاویه $\theta$ و $\phi$ قرار گرفته است یعنی $\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ .

## ۳ کره بلوخ

در بخش قبلی حالت خالص یک کیوبیت را معرفی کردیم. کلی ترین حالت یک کیوبیت با یک ماتریس چگالی دو دردو داده می شود. این ماتریس را با $\rho$ نشان می دهیم. ازآنجا که ماتریس یک و ماتریس های پاوولی یک پایه برای فضای ماتریس های دو دردو تشکیل می دهند می توان این ماتریس را به شکل زیر نوشت:

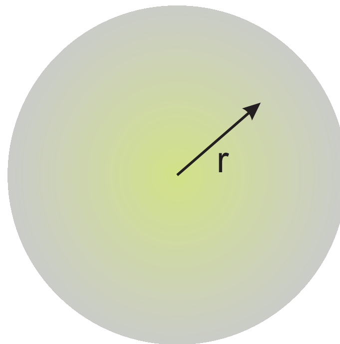
$$\rho = \frac{1}{2}(r_0 I + \overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_0+z & x-iy \\ x+iy & r_0-z \end{pmatrix} \tag{۲۶}$$

که درآن $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ،ماتریس های پاوولی هستند و ضریب $1/2$ برای راحتی بیرون کشیده شده است.

حال دقت می کنیم که:

الف : $\rho$ هرمیتی است. بنابراین ضرایب $r_0, \overrightarrow{r}$ حقیقی هستند.

ب : $tr(\rho) = 1$. بنابراین $r_0 = 1$.




شکل ۲: کره بلوخ. نقاط روی کره متناظر با حالت های خالص و نقاط درون کره متناظر با حالت های آمیخته هستند.

ج : $\rho \geq 0$. برای تامین این شرط می بایست ویژه مقدارهای $\rho$ را حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که ویژه مقدارهای $\rho$ عبارتند از:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm r) \tag{۲۷}$$

که درآن $r$ اندازه بردار $\vec{r}$ است.

بنابراین برای مثبت بودن کافی است که طول بردار $\vec{r}$ از یک کمتر باشد: یعنی $\vec{r} \leq 1$. به این ترتیب بین هرماتریس چگالی و یک نقطه از یک کره به شعاع واحد یک تناظر یک به یک برقرار می شود. این کره کره بلوخ نام دارد که درشکل 3 نشان داده شده است. نقاط روی سطح کره بلوخ نقاطی هستند که درآنها $r = 1$ و بنابراین ویژه مقادیر $\rho$ برابر با یک و صفر هستند. درنتیجه این نقاط متناظر با حالت های خالص هستند.

درواقع براحتی می توان نشان داد که هرگاه $r = 1$ باشد یعنی $\mathbf{r}$ برابر با یک بردار یکه $\mathbf{n}$ باشد آنگاه

$$\rho \equiv \frac{1}{2}(I + \mathbf{n} \cdot \sigma) = |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \tag{۲۸}$$

که درآن $|\mathbf{n}\rangle$ حالت یک ذره با اسپین درجهت بردار یکه $\mathbf{n}$ است. از طرف دیگر مرکز کره یعنی $r = 0$ متناظر با حالت کاملا مخلوط $\rho = \frac{1}{2}I$ است . هرچه از مرکز کره به طرف مرز پیش برویم به درجه خلوص حالت ها اضافه می شود.

■ تمرین: نشان دهید که حالت $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{n} \cdot \sigma)$ متناظر با حالت خالص $|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|$ است.

# ۴ حالت های چند کیوبیت

ماتریس چگالی دو کیوبیت، طبیعتا می بایست یک بسطی بر حسب ماتریس های پایه هرمیتی در فضای دو کیوبیت داشته باشد. بنابراین چنین ماتریسی به شکل زیر نوشته می شود:

$$\rho = \frac{1}{4}\big(I + \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}\otimes I + I\otimes \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\sigma} + t_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j\big) \tag{۲۹}$$

که در آن پارامترهای $r_i, s_i, t_{ij}$ همه حقیقی هستند و روی اندیس های تکراری جمع زده شده است. به این ترتیب این ماتریس دارای ۱۵ پارامتر پیوسته است. البته تحقیق شرط مثبت بودن این ماتریس آسان نیست. این شکل به همین ترتیب برای ماتریس های چگالی چند کیوبیت تعمیم پیدا می کند.

## ۱.۴ گیت های یک کیوبیتی

یک عملگر یکانی روی یک کیوبیت را یک گیت تک-کیوبیتی می خوانیم. بنابراین یک گیت تک-کیوبیتی به این صورت نوشته می شود:

$$U = e^{i\phi}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{۳۰}$$

که در آن $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. چنین گیتی را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$U = e^{i\phi I + i\theta\mathbf{n}\cdot\sigma} = e^{i\phi}(\cos\theta I + i\sin\theta\mathbf{n}\cdot\sigma). \tag{۳۱}$$

به این ترتیب یک گیت تک-کیوبیتی را چهار پارامتر $\theta$، $\phi$ و $\mathbf{n}$ پارامتریزه می شود. البته این فقط یکی از راه های پارامتریزه کردن است و خواننده در تمرین ها می تواند راه های دیگری غیر از این نیز یاد بگیرد. مشهورترین عملگرهای تک کیوبیتی همان عملگرهای پاوولی $X$، $Y$ و $Z$ هستند. عملگر $X$ را عملگر بیت-برگردان یا $bit - flip$ و عملگر $Z$ را عملگر فاز-برگردان یا $phase - flip$ می نامند. دلیل اش هم واضح است زیرا:

$$X(a|0\rangle + b|1\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle), \qquad Z(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle - b|1\rangle. \tag{۳۲}$$

عملگر $XZ$ نیز که منهای یک فاز $i$ همان عملگر $Y$ است هم فاز و هم بیت را برمی گرداند. عملگر دیگری که خیلی مهم است عملگر هادامارد است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{۳۳}$$

این عملگر ویژه بردارهای عملگرهای $X$ و $Z$ را به هم تبدیل می کند.

■ **تمرین:** نشان دهید که $H^2 = I$. هم چنین نشان دهید که عملگر هادامارد را می توان به صورت زیر نوشت:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r,s=0,1}(-1)^{rs}|r\rangle\langle s|. \tag{۳۴}$$

■ **تمرین:** حالتی را در نظر بگیرید مثل

$$|\phi\rangle := \sum_{r=0,1}\phi_r|r\rangle, \tag{۳۵}$$

نشان دهید که

$$H|\phi\rangle = |\tilde{\phi}\rangle = \sum_{r=0,1}\tilde{\phi}_r|r\rangle, \tag{۳۶}$$

که در آن

$$\tilde{\phi}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=0,1}(-1)^{rs}\phi_s. \tag{۳۷}$$

■ تمرین: حالت های زیر را که به حالت های Bell موسوم هستند در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
|\phi_+\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,1\rangle\right)\\
|\phi_-\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle - |1,1\rangle\right)\\
|\psi_+\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle + |1,0\rangle\right)\\
|\psi_-\rangle_{A,B} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle - |1,0\rangle\right).
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

نشان دهید که این حالت ها همه برهم عمودند و تشکیل یک پایه برای فضای دو کیوبیت یعنی فضای $C^2 \otimes C^2$ می دهند.
ماتریس های چگالی $\rho_A$ و $\rho_B$ را برای همه حالت ها بدست آورید.

■ تمرین: بین آلیس و باب یک حالت دو کیوبیتی $|\phi_+\rangle$ به اشتراک گذاشته شده است. ولی به دلایلی این حالت دچار خطا شده است. آنها حدس می زنند که این حالت با احتمال $p_1$ تبدیل به حالت $|\phi_-\rangle$ ، با احتمال $p_2$ تبدیل به حالت $|\psi_+\rangle$ ، با احتمال $p_3$ تبدیل به حالت $|\psi_+\rangle$ شده و با احتمال $1-p_1-p_2-p_3$ نیز دست نخورده است. حالت کیوبیت هایی که بین آنها به اشتراک گذاشته است چیست؟ ماتریس چگالی آلیس و باب را بدست آورید.

■ تمرین: حالت زیر یک حالت $GHZ$ نامیده می شود:

$$|GHZ\rangle_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle). \quad (۳۹)$$

الف: هفت حالت دیگر در فضای سه کیوبیت بسازید که همه برهم عمود باشند و به همراه حالت فوق یک پایه کامل برای فضای هیلبرت سه کیوبیت تشکیل دهند.
ب: ماتریس های چگالی $\rho_{A,}, \rho_{BC}$ را پیدا کنید.

■ تمرین: حالت زیر یک حالت $W$ نامیده می شود.

$$|W\rangle_{A,B,C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1,0,0\rangle + |0,1,0\rangle + |0,0,1\rangle). \quad (۴۰)$$

مراحل تمرین قبلی را برای این حالت نیز تکرار کنید.

■ تمرین: عملگر دوکیوبیتی زیر را در نظر بگیرید:

$$CNOT = \frac{1}{2}(I+\sigma_z)\otimes I + \frac{1}{2}(I-\sigma_z)\otimes \sigma_x. \quad (۴۱)$$

نشان دهید که این عملگر کار زیر را انجام می دهد:

$$CNOT|i,j\rangle = |i, i+j, \quad mod\, 2\,\rangle \tag{۴۲}$$

شکل ماتریسی این عملگر را بنویسید.

نشان دهید که عملگر زیر

$$(CNOT)(H\otimes I)$$

وقتی روی حالت های چهارگانه $|i,j\rangle$ اثر می کند حالت های چهارگانه بل را تولید می کند.

■ تمرین: عملگرهای $\sigma_y$ ,$\sigma_x$ و $\sigma_z$ را در نظر بگیرید. ویژه بردارهای هرکدام از این عملگرها یک پایه برای فضای هیلبرت یک کیوبیت می سازند. نشان دهید که همه این پایه ها نسبت به هم متوازن هستند. به طور کلی دو پایه $\{|\alpha_1\rangle,\ |\alpha_2\rangle,\ \cdots|\alpha_N\rangle\}$ و $\{|\beta_1\rangle,\ |\beta_2\rangle,\ \cdots|\beta_N\rangle\}$ نسبت به هم متوازن نامیده می شوند اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$|\langle\alpha_i|\beta_j\rangle|^2 = C, \qquad \forall\ |\alpha_i\rangle, \quad |\beta_j\rangle, \tag{۴۳}$$

که در آن $C$ یک عدد ثابت است. ثابت کنید که این عدد ثابت برابر است با $\frac{1}{N}$ .

## ۵ حالت های یک کیودیت

اگرچه طبیعی ترین کاندیدا برای ذخیره و پردازش یک واحد اطلاعات کوانتومی یک کیوبیت یعنی یک سیستم کوانتومی دوحالته است، ولی هم از نظر تئوری و هم تجربی می بایست امکان استفاده از سیستم های کوانتومی با تعداد بیشتر از دو حالت را نیز در نظر گرفت. ممکن است سرانجام یک سیستم کوانتومی $d$ حالته تمامی ملاک های مورد نیاز برای رایانش کوانتومی، مثل قابلیت کنترل دقیق، زمان وادوسی زیاد، و هم چنین مقیاس پذیری را برآورده کند. در این صورت می بایست رایانش کوانتومی را حتماً با استفاده از این حالت ها که به آن ها کیودیت $Qudit$ می گویند

انجام داد. از نظر تئوری نیز نشان داده شده است که مثلاً در رمزنگاری کوانتومی استفاده از کیودیت ها امنیت پروتکل را نسبت به کیوبیت ها بالاتر می برد. هم چنین صورت بندی آلگوریتم ها و فرایند های کوانتومی در بعد دلخواه باعث می شود که درک بهتر و عمیق تری از چگونگی کارکرد آنها بدست آوریم.

حالت خالص یک کیودیت (یک سیستم $d$ حالته) به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \cdots a_{d-1}|d-1\rangle. \quad (۴۴)$$

این حالت یک بردار $d$ مختلط را نشان می دهد. فضای برداری این بردارهای را با $C^d$ نشان می دهیم.

بنابراین یک حالت دلخواه از یک کیودیت با $2d-1$ پارامتر حقیقی مشخص می شود. برای آنکه حالت های آمیخته کیودیتی را نیز بفهمیم می بایست عملگرهای هرمیتی کیودیتی را مطالعه کنیم.

می توان برای این فضا یک پایه از عملگرهای هرمیتی نیز در نظر گرفت. چنین پایه ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$X_{kl} := E_{kl} + E_{lk}, \qquad Y_{kl} := -iE_{kl} + iE_{lk}, \qquad Z_k := E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots E_{k,k} - i\ E_{k+1,k+1}, \quad (۴۵)$$

که در آن $E_{kl} = |k\rangle\langle l|$ . دقت کنید که عملگرهای $X^r Z^s$ رابطه ضربی ساده ای باهم دارند ولی عملگرهای هرمیتی که در بالا تعریف کردیم رابطه جابجایی شان باهم ساده است.

■ **تمرین:** نشان دهید که تعداد این عملگرهای هرمیتی برابر است با $d^2-1$.

■ **تمرین:** اگر این عملگرها را به صورت کلی با $\Gamma_i$ نشان دهیم، با توجه به ضرب داخلی $\langle A, B\rangle = tr(AB^\dagger)$ که برای عملگرها تعریف می شود، نشان دهید که این عملگرها بر یکدیگر عمودند. سپس هرکدام از آنها را در ضریب مناسبی چنان ضرب کنید که به صورت زیر بهنجار باشند:

$$\langle \Gamma_i, \Gamma_j\rangle = (d^2-d)\delta_{ij}. \quad (۴۶)$$

## ۱.۵ آیا برای کیودیت ها کره بلوخ وجود دارد؟

ماتریس چگالی یک کیودیت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \frac{1}{d}(I + \mathbf{r}\cdot\Gamma), \tag{۴۷}$$

که در آن $\Gamma_i, \ \ i = 1, \cdots d^2-1$ یک پایه از عملگرهای هرمیتی و بدون رد در فضای یک کیودیت است و $\mathbf{r}$ نیز یک بردار $d^2-1$ مولفه ای است. بنابراین یک ماتریس چگالی کیودیتی با تعداد $d^2-1$ پارامتر مشخص می شود که حتی برای یک کیوتریت (یعنی یک سیستم سه حالته ) تعداد زیاد $8$ پارامتر است. به شکل فوق مطمئن هستیم که ماتریس $\rho$ هرمیتی و بدون رد است. اما $\rho$ هنوز یک ماتریس چگالی نیست زیرا الزاما مثبت نیست. ویژه مقدارهای چنین ماتریسی رابطه سادهای با پارامترهای مشخص کنندهی $\mathbf{r}$ ندارد. این رابطه هرچه که هست رابطهی ساده ای نیست که فضای ماتریس های چگالی کیودیتی را به صورت یک کره یا یک شکل هندسی ساده در بیاورد. دقت کنید که حتی در مورد $d=3$ نیز فضای ماتریس های چگالی یک زیرمجموعه از فضای $8$ بعدی $R^8$ است. بنابراین تصور چنین فضایی بسیار مشکل است. از نظر هندسی و جبری دراین مورد پژوهش های متعددی انجام شده و درحال انجام است.

■ **تمرین:** نشان دهید که هر ماتریس چگالی به صورتِ نشان داده شده در رابطهی $47$ یک حالت خالص را نشان می دهد اگر و فقط اگر طول برادر $\mathbf{r}$ برابر با یک باشد.

عملگرهای هرمیتیای که در بالا ساختیم تعمیم طبیعی عملگرهای پاوولی به بعد $d$ بودند. به نحو دیگری هم می توان عملگرهای پاوولی را به بعد دلخواه تعمیم داد که برای منطور های دیگری مناسب است. اگر دقت کنیم عملگرهای پاوولی هم هرمیتی هستند و هم یکانی. حالا تعمیمی از این عملگرها در بعد دلخواه بدست می آوریم که یکانی باشند و نه هرمیتی. برای تعمیم آنها به عملگرهای یکانی کافی است که عملگرهای $X$ و $Z$ را به صورت زیر به کیودیت ها تعمیم دهیم:

$$X|k\rangle = |k+1\rangle, \qquad Z|k\rangle = \omega^k|k\rangle \tag{۴۸}$$

که در آن $\omega^d = 1$. یعنی $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$ و همه جمع ها به سنج $d$ انجام می شود. این عملگرها هرمیتی نیستند ولی یکانی اند. رابطه جابجایی

آنها به صورت زیر است:

$$ZX = \omega XZ. \quad (۴۹)$$

عمگرهای $X^r Z^s$ که در آن $r, s = 0,\ 1, \cdots d-1$ یک پایه از عملگرهای یکانی برای فضای هیلبرت یک کیودیت می سازند.

■ **تمرین:** رابطه جابجایی $X^r Z^s$ را با $X^a Z^b$ پیدا کنید.

■ **تمرین:** ویژه بردارهای عملگرهای $Z$ و $X$ را پیدا کنید.

■ **تمرین:** ویژه بردارهای عملگر $X^a Z^b$ را برای وقتی که $a, b$ دو عدد صحیح هستند بدست آورید.

■ **تمرین:** عملگر هادامارد را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=0}^{d-1} \omega^{ij} |i\rangle\langle j|. \quad (۵۰)$$

نشان دهید که این عملگر ویژه بردارهای $Z$ را به ویژه بردارهای $X$ تبدیل می کند. هم چنین نشان دهید که توان چهارم این عملگر برابر با عملگر واحد است یعنی $H^4 = I$.

■ تمرین: حالت های بل را در بعد دلخواه تعریف کنید. این حالت ها می بایست دارای خاصیت های زیر باشند:

الف: یک پایه برای فضای دو کیودیت باشند،

ب: همه آنها درهم تنیدگی ماکزیمال داشته باشند به این معنا که برای تمام آنها ماتریس چگالی کاهش یافته هر کدام از کیودیت ها متناسب با عملگر واحد باشد.

■ تمرین: عملگر تعمیم یافته $CNOT$ را به شکل زیر تعریف کنید:

$$CNOT|i,j\rangle = |i, i+j,\ mod\ d\rangle.$$

با استفاده از این عملگر و عملگر هادامارد مداری کوانتومی بسازید که حالت های ضربی را به حالت های بل تبدیل کند.

---

## ۶ تجزیه اشمیت

رابطه 11 کلی ترین حالتِ یک سیستم کوانتومی مرکب را نشان می دهد. این حالت برحسب $NM$ تا بردار پایه $|i,\mu\rangle$ بسط داده شده است. بااین وجود می توان نشان داد که این بردار حالت را به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha |\alpha\rangle|\tilde{\alpha}\rangle. \quad (۵۱)$$

که درآن $|\alpha\rangle$ ها و $|\tilde{\alpha}\rangle$ ها بردار های متعامد یکه هستند، $\lambda_\alpha$ ها اعداد مثبت و $n \leq min(M,N)$. این تجزیه، تجزیه اشمیت خوانده می شود و دارای کاربردهای بسیار مفید و مهم است. به دو روش می توان وجود این تجزیه را ثابت کرد.

**روش اول:** ماتریس $\Psi$ با درایه های $(\Psi)_{i\mu} = \psi_{i,\mu}$ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه تجزیه مقدار منفرد می توان نوشت

$$\Psi = UDV \quad (۵۲)$$

که درآن $U$ و $V$ ماتریس های یکانیِ و $D$ یک ماتریس مستطیلی قطری با درایه های مثبت است.

به عبارت دیگر

$$\psi_{i\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n} U_{i,\alpha}\lambda_\alpha V_{\alpha,\mu} \quad (۵۳)$$

که درآن $n$ تعداد مقادیر منفرد غیر صفر از $\Psi$ است. دقت کنید که $n\leq min(M,N)$. با جایگذاری این مقدار در حالت اولیه بدست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \sum_{i,\mu,\alpha} U_{i,\alpha}\lambda_\alpha V_{\alpha,\mu}|i,\mu\rangle = \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha(\sum_i U_{i\alpha}|i\rangle)(\sum_\mu V_{\alpha\mu}|\mu\rangle) \\
&=: \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha|\alpha\rangle|\tilde{\alpha}\rangle, \qquad (۵۴)
\end{aligned}
$$

که درآن

$$
|\alpha\rangle := \sum_i U_{i\alpha}|i\rangle, \qquad |\tilde{\alpha}\rangle = \sum_\mu V_{\alpha\mu}|\mu\rangle. \qquad (۵۵)
$$

یکانی بودن ماتریس های $U$ و $V$ این نتیجه را می دهد که بردارهای فوق، بردارهای متعامد یکه برای فضاهای هیلبرت سیستم های $A$ و $B$ خواهند بود، یعنی

$$
\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}, \qquad \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \delta_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}. \qquad (۵۶)
$$

■ تمرین: با استفاده از این روش تجزیه اشمیت حالت $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|0,0\rangle + |1,1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,+\rangle$ را بدست آورید.

■ تمرین: حالت زیر را که در فضای $C^2\otimes C^3$ تعریف شده است در نظر بگیرید.

$$
|\psi\rangle = A\left(|0,0\rangle + |1,1\rangle + |1,2\rangle + |+,1\rangle\right).
$$

ضریب $A$ را چنان حساب کنید که این حالت بهنجار باشد. سپس تجزیه اشمیت این حالت را پیدا کنید.

**روش دوم:** دراین روش از تجزیه مقدار منفرد استفاده نمی کنیم بلکه برای فضای هیلبرت $H_A$ پایه‌ای انتخاب می کنیم که درآن ماتریس $\rho_A$ قطری باشد. این پایه را با $\{|\alpha\rangle\}$ نشان می دهیم. درنتیجه بردار حالت به شکل زیر نوشته می شود:

$$
|\psi\rangle_{AB} = \sum_\alpha |\alpha\rangle|\phi_\alpha\rangle \qquad (۵۷)
$$

که درآن بردارهای $\{\phi_\alpha\}$ بردارهایی نه الزاماً متعامد ویا یکه درفضای هیلبرت $H_B$ هستند. حال دقت می کنیم که بنابرتعریف :

$$
\rho_A = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) = \sum_{\alpha,\beta}|\alpha\rangle\langle\beta|\langle\phi_\alpha|\phi_\beta\rangle. \qquad (۵۸)
$$

اماچون ماتریس چگالی $\rho_A$ درپایه انتخاب شده قطری است پس بدست می آوریم که :

$$\langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle = \lambda_\alpha^2 \delta_{\alpha,\beta} \tag{۵۹}$$

با تعریف $|\phi_\alpha\rangle = \lambda_\alpha |\hat{\alpha}\rangle$ به تجزیه اشمیت یعنی رابطه (51) می رسیم. یکی از نتایج تجزیه اشمیت این است که هر دو ماتریس چگالی $\rho_A$ و $\rho_B$ ویژه مقدارهای غیر صفر یکسان دارند، زیرا

$$\rho_A = \sum_\alpha \lambda_\alpha^2 |\alpha\rangle\langle\alpha|, \qquad \rho_B = \sum_\alpha \lambda_\alpha^2 |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|. \tag{۶۰}$$

دقت کنید که تجزیه اشمیت فقط برای حالت های دو قسمتی [۳] برقرار است و برای یک سیستم سه قسمتی [۴] یاچند قسمتی[۵] چنین تجزیه‌ای وجود ندارد.

■ تمرین: تجزیه اشمیت بردارهایی را که در با روش قبلی پیدا کردید با این روش پیدا کنید.

## ۱.۶ درهم تنیدگی و تجزیه اشمیت

یکی از مهمترین ویژگی های مکانیک کوانتومی وجود حالت های درهم تنیده [۶] است که در درس های آینده به تفصیل در باره آن سخن خواهیم گفت. اطلاعات ما در مورد درهم تنیدگی حالت های خالص خیلی بیشتر از درهم تنیدگی حالت های آمیخته است. یک حالت خالص درهم تنیده از یک سیستم دو قسمتی، حالتی است که نتوان آن را به صورت حاصل ضرب تانسوری حالت هایی از تک سیستم ها نوشت. بنابراین حالتی مثل $|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A |\psi\rangle_B$ یک حالت درهم تنیده نیست . چنین حالتی را یک حالت ضربی [۷] می نامیم. حالتی که عدد اشمیت آن بزرگتر از یک باشد، یک حالت درهم تنیده است. در یک حالتِ درهم ناتنیده [۸] حالتِ هرکدام از زیر سیستم های $A$ و $B$ یک حالت خالص است ولی در یک حالتِ درهم تنیده چنین نیست. فرض کنید که یک حالتِ درهم تنیده در دست آلیس و باب است که تنها می توانند اعمال یکانی موضعی [۹] روی

[۳] Bi-partite
[۴] tri-partite
[۵] Multi-partite
[۶] Entangled
[۷] Product State
[۸] disentangled
[۹] Local unitary

زیرسیستم های خود انجام دهند. آیا با این اعمال آلیس و باب می توانند درهم تنیدگی حالت ِ خود را از بین ببرند؟ پاسخ این سوال منفی است زیرا با این گونه اعمال آنها نمی توانند عدد اشمیت ِ حالت خود را تغییر دهند. فرض کنید که عدد اشمیت یک حالت ِ $|\psi\rangle_{AB}$ برابر با $k$ باشد. این امر به این معناست که

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{k} |i\rangle|\tilde{i}\rangle, \tag{۶۱}$$

که درآن $\{|i\rangle\}$ ها و $\{|\tilde{i}\rangle\}$ ها دو دسته حالت های متعامد هستند. (دقت کنید که ضرایب ِ $\sqrt{\lambda_i}$ را در حالت ها جذب کرده‌ایم و بنابراین حالت های فوق دیگر یکه نیستند.) حال اعمال یکانی روی حالت ِ $|\psi\rangle_{AB}$، حالت ِ

$$|\psi'\rangle_{AB} = U_A \otimes U_B|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{k}(U_A|i\rangle)(U_B|\tilde{i}\rangle) = \sum_{i=1}^{k} |i'\rangle|\tilde{i'}\rangle, \tag{۶۲}$$

که بازهم همان عدد ِ اشمیت را دارد.

همانطور که در ابتدا گفتیم درهم تنیدگی حالت های آمیخته پیچیده تر از حالت های خالص است. آنچه که می دانیم این است که اگر حالت دو سیستم $A$ و $B$ به صورت

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \tag{۶۳}$$

زیر باشد، این دو حالت در هم تنیده نیستند. در درسهای آینده خواهیم دید که حتی اگر حالت $\rho_{AB}$ به صورت زیر باشد

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}, \qquad \sum_i p_i = 1. \tag{۶۴}$$

این دو حالت درهم تنیدگی ندارند. چنین حالت هایی را حالت های جدایی پذیر [۱۰] می گوییم.

- تمرین: نشان دهید که هرگاه دو حالت جدایی پذیر باشند، می توانیم آن ها را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\rho_{AB} = \sum_{a,b} P_{a,b}|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b|, \qquad \sum_{a,b} P_{a,b} = 1, \tag{۶۵}$$

یعنی چنین حالتی به صورت ترکیبی محدبی از حالت های ضربی نوشته می شود.

[۱۰] Seperable

## ۷ خالص سازی

فرض کنید که دستگاه $A$ توسط یک ماتریس چگالی $\rho$ توصیف می شود. آیا می توان دستگاهی مثل $B$ و حالتی از دستگاه مرکب $AB$ مثل $|\psi\rangle_{AB}$ چنان یافت که :

$$\rho = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) \tag{۶۶}$$

باشد. اگر چنین حالتی پیدا کنیم حالت $|\psi\rangle_{AB}$ را حالت خالص شده ماتریس چگالی $\rho$ می خوانیم. این عمل را نیز خالص سازی [۱۱] می نامیم. برای اینکه خالص شده یک ماتریس چگالی $\rho_A$ باویژه مقدارهای $p_i$ را پیدا کنیم به ترتیب زیر عمل می کنیم. دستگاه $B$ را دستگاهی می گیریم که بعد فضای هیلبرت آن یعنی $H_B$ حداقل با بعد $H_A$ یکی باشد. هرگاه بردارهای $\{|i\rangle\}$ یک پایه متعامد برای دستگاه $A$ باشند قرارمی دهیم:

$$\psi_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}|i,\hat{i}\rangle \tag{۶۷}$$

که درآن $\{|\hat{i}\rangle\}$ یک مجموعه بردار متعامدیکه برای فضای $H_B$ هستند. دراین صورت $|\psi\rangle_{AB}$ یک خالص سازی $\rho_A$ است. دقت کنید که برای حالت های چند بعدی فضای ماتریس های چگالی شکل ساده‌ای ندارد. خواننده می تواند این موضوع را برای خود برای حالت های سه بعدی تحقیق کند. در واقع برای حالت های $n$ بعدی می دانیم که مولفه های جبر $su(n)$ که آنها را با $T_1, T_2, \cdots T_{n^2-1}$ نشان می دهیم، یک پایه برای فضای ماتریس های هرمیتی و بدون ردّ تشکیل می دهند. بنابراین یک ماتریس چگالی بسطی برحسب این ماتریس ها به شکل زیر دارد:

$$\rho_A = \frac{1}{d}\left(I + \sum_{i=1}^{n^2-1} \alpha_i T_i\right). \tag{۶۸}$$

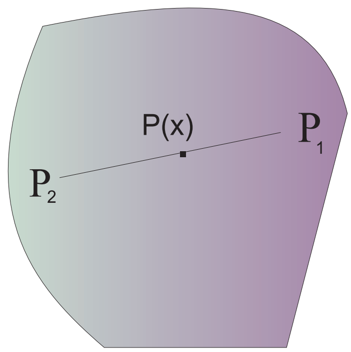
ولی آنچه که دشوار است این است که به ازای چه مقادیری از ضرایب بسط یعنی $\alpha_i$ ها، ویژه مقدارهای این ماتریس ها مثبت هستند.

- تمرین: ماتریس $\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x \\ x & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید که در آن $x$ یک عدد حقیقی است.

  الف: محدوده $x$ را چنان تعیین کنید که $\rho$ یک ماتریس چگالی باشد.

  ب: یک خالص سازی از$\rho$ بدست آورید.

[۱۱] Purification




شکل ۳: ماتریس های چگالی یک زیر مجموعه محدب از مجموعه تمام ماتریس های هرمیتی را تشکیل می دهند. مطابق شکل می توان هر ماتریس چگالی را به انواع مختلف به صورت جمع محدبی از ماتریس های چگالی دیگر نوشت. به عنوان $\rho(x) = x\rho_1 + (1-x)\rho_2$. نقاطی که نتوان آنها را به صورت مجموع محدب نقاط دیگر نوشت، نقاط اکسترمال نامیده می شوند. نقاط روی مرز ماتریس هایی هستند که یکی یا بیشتر از ویژه مقدارهای آنها برابر با صفر است.

## ۸ نکاتی در مورد توپولوژی مجموعه ماتریس های چگالی

می دانیم که ماتریس چگالی، ماتریسی است که دارای سه خاصیت هرمیتی بودن، مثبت بودن و رد واحد داشتن است. حال اگر $\rho_1$ و $\rho_2$ دو ماتریس چگالی باشند، نتیجه می گیریم که ماتریس

$$\rho(\lambda) = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2, \tag{۶۹}$$

که درآن $0 \leq \lambda \leq 1$، نیز یک ماتریس چگالی است زیرا هر سه خاصیت گفته شده در بالا را دارد. این موضوع نشان می دهد که مجموعه ماتریس های چگالی در فضای ماتریس های هرمیتی یک زیر مجموعه محدب را تشکیل می دهد زیرا خط واصل بین هر دو نقطه در این زیر مجموعه به تمامی داخل این مجموعه است، شکل 8. در نظریه اطلاعات کلاسیک و کوانتومی استدلال های ناشی از تحدب نقش بسیار مهمی را ایفا می کنند. در این جا ما با نخستین ویژگی از این نوع آشنا شده ایم.

**تعریف:** در یک زیر مجموعه محدب $C$ از یک فضای برداری، یک نقطه، نقطه اکسترمال خوانده می شود اگر نتوان آن را به صورت مجموع محدب دو نقطه از $C$ نوشت.

**قضیه:** در فضای ماتریس های چگالی یک نقطه، نقطه اکسترمال است اگر و فقط اگر آن نقطه یک حالت خالص باشد.

**اثبات:** نخست فرض کنید که $\rho$ یک نقطه اکسترمال باشد. تجزیه طیفیِ $\rho$ را می نویسیم که بر مبنای آن داریم $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ . از آنجا که گفته شده است $\rho$ یک نقطه اکسترمال است، این امر به این معناست که یکی از $\lambda$ ها برابر با $1$ و بقیه برابر با صفرند. اما این چیزی نیست جز بیان خالص بودنِ حالتِ $\rho$.

بر عکس، $\rho$ را یک حالت خالص مثل $|\psi\rangle\langle\psi|$ بگیرید. نشان می دهیم که نمی توان این حالت را به صورت مجموع محدب دو ماتریس چگالی دیگر نوشت و به همین معنا واقعاً این حالت یک حالت خالص است. از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید که بتوان نوشت

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2. \tag{۷۰}$$

حال برداری مثل $|\psi^\perp\rangle$ در نظر بگیرید. داریم

$$0 = \langle\psi^\perp|\psi\rangle\langle\psi|\psi^\perp\rangle = \lambda\langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle + (1-\lambda)\langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle. \tag{۷۱}$$

از آنجا که ماتریس های $\rho_1$ و $\rho_2$ هر دو مثبت هستند، طرف راست تنها وقتی می تواند برابر با صفر باشد که یا $\lambda = 0$ یا $\lambda = 1$ و یا

$$\langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle = \langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle = 0. \tag{۷۲}$$

در دو حالت اول مقصود حاصل شده است یعنی حالت $\rho$ جمع محدب نشده است. در حالت اخیر، از آنجا که این تساوی ها برای هر بردارِ $|\psi^\perp\rangle$ که بر $|\psi\rangle$ عمود است می بایست برقرار باشند نتیجه می گیریم که $\rho_1 = \rho_2 = |\psi\rangle\langle\psi|$ که بازهم به معنای آن است که $\rho$ به صورت یک جمع محدب نوشته نشده است.

حال به مرز مجموعه ماتریس های چگالی نگاه می کنیم. این مرز جایی است که یکی یا بیشتر از ویژه مقدارهای ماتریس چگالی صفر می شود، زیرا بیرون از این مرز، جایی است که ماتریس های هرمیتی ولی منفی قرار گرفته اند. دراین جا یک تفاوت مهم ماتریس های چگالی دو بعدی با ماتریس های چگالی با بعد بیشتر از ۲ آشکار می شود. در دو بعد نقاط روی مرز یکی از ویژه مقدارهایشان برابر با صفر و در نتیجه تنها ویژه مقدار دیگرشان حتماً برابر با ۱ است. این امر به این معناست که همه ماتریس های چگالی روی مرز در دو بعد، حالت های خالص هستند. این خاصیت را قبلا در کره بلوخ دیده‌ایم . در واقع دراین کره تمام نقاط روی مرز نقاط اکسترمال هستند و این خاصیت مختص دو بعد است به عنوان مثال در سه بعد یک ماتریس چگالی که تجزیه طیفی آن برابر با $\rho = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)$ است، روی مرز قرار دارد ولی یک حالت خالص نیست.

## ۹ تجزیه یک ماتریس چگالی به آنزامبل های مختلف

ازآنجا که یک حالت مخلوط با یک ماتریس هرمیتی داده می شود، می توانیم آن را قطری کنیم یا به اصطلاح تجزیه طیفی آن را بدست آوریم. درنتیجه می توان نوشت

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |i\rangle\langle i|, \tag{۷۳}$$

که درآن $\lambda_i$ ها ویژه مقدارهای $\rho$ و $|i\rangle$ ها ویژه بردارهای آن هستند. دراینجا $n$ بعد فضای هیلبرت یا بعد ماتریس $\rho$ است. هرگاه چنین کنیم می توانیم برای هر مشاهده پذیرِ $M$ بنویسیم

$$\langle M\rangle = tr(M\rho) = tr(M\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |i\rangle\langle i|) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle i|M|i\rangle. \tag{۷۴}$$

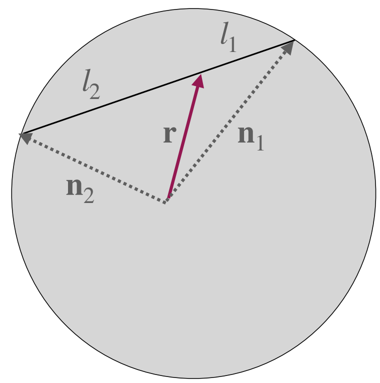
عبارت بالا را می توان به این ترتیب تفسیرکرد که حالتِ $\rho$ مخلوطی از حالت های $|i\rangle$ هرکدام با درصد $\lambda_i$ است و به همین مناسبت متوسط مشاهده پذیری مثل $M$ در دو مرحله حساب شده است: نخست یک متوسط کلاسیک روی حالت های $|i\rangle$ که هرکدام با وزن $\lambda_i$ دراین جمع آورده شده اند و سپس یک متوسط کوانتومی روی هر حالت ِ $|i\rangle$. این محاسبه وجه نامگذاری حالتِ مخلوط را نیز روشن می کند. دربسیاری اوقات ما نمی دانیم که سیستم ما دقیقاً درچه حالتی است بلکه می دانیم که مخلوطی است از حالت های متعامد با وزن های مشخص. مهمترین مثال از این نوع در مکانیک آماری پدیدار می شود. وقتی که یک سیستم در دمای $T$ به تعادل رسیده باشد، بنابر اصل موضوع بولتزمن می دانیم که با احتمالِ $P_i := \frac{1}{Z}e^{-\beta E_i}$ در ویژه حالت هامیلتونی یعنیِ $|i\rangle$ با انرژی $E_i$ است. بنابراین چنین سیستمی با یک ماتریس چگالی توصیف می شود که عبارت است از:

$$\rho = \sum_i \frac{1}{Z}e^{-\beta E_i}|i\rangle\langle i| = \sum_{i=1} \frac{1}{Z}e^{-\beta H}|i\rangle\langle i| = \frac{1}{Z}e^{-\beta H}. \tag{۷۵}$$

دراین عبارت $Z$ تابع پارش خوانده می شود و برابراست با:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i} = tr(e^{-\beta H}). \tag{۷۶}$$

باید توجه داشت که تجزیه 73 تنها یکی از انواع تجزیه هاست . هم ازنظر تجربی و هم نظری می توان تجزیه های گوناگونی از یک حالت تصور کرد. تجزیه طیفیِ 73 فقط ازاین نظر منحصر به فرد است که درآن ویژه بردارهای $\rho$ بکار رفته است وگرنه می توان بی نهایت تجزیه برای یک




شکل ۴: شیوه تجزیه یک ماتریس چگالی به حالت های خالص.

ماتریس چگالی نوشت. یعنی می توان نوشت

$$\rho = \sum_{j=1}^{N} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \tag{۷۷}$$

که درآن اولاً $N$ هیچ ربطی به بعد فضای هیلبرت یا همان بعد $\rho$ ندارد و ثانیاً حالت های $|\psi_j\rangle$ لزوماً برهم عمود نیستند. این نوع تجزیه نیز یک آنزامبل از همان ماتریس چگالی را توصیف می کند. بنابراین برای یک نوع ماتریس چگالی می توان انواع تجزیه ها و درنتیجه انواع تفسیرهای آنزامبلی را به کار برد. در واقع به بی نهایت طریق می توان یک ماتریس چگالی را به ماتریس های چگالی دیگر و یا به حالت های خالص تجزیه کرد.

برای درک این نکته که بی نهایت تجزیه برای یک حالت مخلوط امکان پذیراست بازهم کره بلوخ را درنظر بگیرید. چگونه می توان یک حالت مخلوط برای یک ذره اسپین یک دوم را تجزیه کرد؟ این تجزیه چگونه روی کره بلوخ نشان داده می شود؟ پاسخ این سوال ساده است. فرض کنید که یک حالت مخلوط متناظر با بردار $\mathbf{r}$ روی کره بلوخ داده شده است. می خواهیم این حالت را به صورت مجموع دوحالت خالص تجزیه کنیم. برای این کار از نوک بردار $\mathbf{r}$ وتری از کره را رسم می کنیم که سطح کره را دردو نقطه $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ قطع کند (شکل (۹) .

هرگاه طول دو پاره خط نشان داده شده درشکل را با $l_1$ و $l_2$ نشان دهیم آنگاه یک محاسبه ساده نشان می دهد که می توان حالت مخلوط $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma)$ را به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\rho = p_1|n_1\rangle\langle n_1| + p_2|n_2\rangle\langle n_2| \tag{۷۸}$$

که درآن $p_1 = \frac{l_2}{l_1+l_2}$ و $p_2 = \frac{l_1}{l_1+l_2}$. از آنجا که وتر مربوطه را به بی نهایت طریق می توان رسم کرد، پس بی نهایت تجزیه دوتایی برای حالت مخلوط وجود دارد. آیا تجزیه های بیش از دو تایی هم وجود دارد؟ پاسخ این سوال هم مثبت است. فرض کنید که نقاط $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots \mathbf{n}_N$

روی سطح کره داده شده اند. حال ضرایب $p_1, p_2, \cdots p_N, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1$ را چنان تعیین می کنیم که شرط زیر تحقق یابد :

$$\sum_{i=1}^N p_i \mathbf{n}_i = \mathbf{r} \tag{۷۹}$$

دراین صورت می توان نوشت :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{2}(I + \mathbf{n}_i \cdot \sigma) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i |n_i\rangle\langle n_i| \end{aligned} \tag{۸۰}$$

به این ترتیب حالت مخلوط $\rho$ را می توان به بی نهایت طریق به صورت مجموعی از حالت های خالص و یا حتی به صورت انتگرالی از حالت های خالص تجزیه کرد که درحالت اخیر خواهیم نوشت:

$$\rho = \int d\phi \, d\cos\theta \, p(\theta,\phi) |n(\theta,\phi)\rangle\langle n(\theta,\phi)| \tag{۸۱}$$

بااین شرط که $\int d\phi d\cos\theta p(\theta,\phi) = 1$.

## ۱.۹ طرز تهیه آنزامبل های مختلف

ماتریس چگالی $\rho B = \frac{1}{2} I_B$ را در نظر بگیرید. این ماتریس توصیف کننده حالت ذراتی است که در درست باب هستند. می دانیم که این حالت به شکل های زیر قابل تجزیه است:

$$\rho_B = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right) \tag{۸۲}$$

و یا

$$\rho_B = \frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\right). \tag{۸۳}$$

در حالت اول ماتریس چگالی به مخلوطی یکنواخت از حالت های $\langle 0|$ و $\langle 1|$ و در حالت دوم به مخلوطی یکنواخت از حالت های $\langle +|$، $\langle|$ تجزیه شده است. مسلم است که هر دو این آنزامبل ها یک ماتریس چگالی را نشان می دهند و با هیچ آزمایشی از یکدیگر قابل تشخیص نیستند.

■ تمرین: چرا این گزاره درست است؟ یعنی چرا نمی توان با هیچ آزمایشی این دو حالت را ازهم تشخیص داد؟ برای پاسخ به این سوال به یک استدلال ریاضی اکتفا نکنید بلکه خود را در مقام یک آزمایش گر تصور کنید و سعی کنید که راهی بیابید که این دو آنزامبل را از هم تمیز بدهد.

حال سوال این است که این دو آنزامبل چگونه تهیه می شوند. مسلما راه های متفاوتی برای تهیه این دو آنزامبل وجود دارد. مثلا اگر با اسپین ها سرو کار داریم برای تهیه آنزامبل (۸۲) کافی است که یک دستگاه اشترن گرلاخ در راستای $z$ اسپین ها را از هم جدا کند و سپس ما باریکه های خروجی ذرات را کمی منحرف کرده و در یک راستا قرار دهیم ،

. هرگاه که راستای میدان مغناطیسی دستگاه اشترن گرلاخ را بجای $z$ در جهت $x$ بگیریم، آنزامبل (۸۳) تهیه خواهد شد.

.یک راه خیلی جالب دیگر این است. فرض کنید که حالت

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,1\rangle\right)$$

بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است. ماتریس چگالی الیس و باب هردو برابر با $\frac{I}{2}$ است. حال فرض کنید که آلیس اسپین خود را در راستای $z$ اندازه گیری کند. اگر او اسپین اش را در جهت $0$ اندازه بگیرد، حالت دو ذره به $|0,0\rangle$ و در نتیجه حالت ذره در دست باب نیز به $|0\rangle$ کاهش پیدا می کند. این کار با احتمال $1/2$ اتفاق می افتد. با احتمال $1/2$ نیز حالت دست باب در اثر اندازه گیری الیس به $|1\rangle$ تقلیل پیدا می کند. بنابراین ذره در دست باب در حالتی است که با احتمال ۱/۲ می تواند در هرکدام از حالت های خالص پیش گفته باشد یعنی

$$\rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \tag{۸۴}$$

به این ترتیب آلیس با اندازه گیری خود در دوردست ها بدون اینکه با باب رابطه علّی نیز داشته باشد این آنزامبل را برای باب فراهم می کند. البته این ناقض نسبیت نیست چرا که ماتریس چگالی باب قبل و بعد از اندازه گیری هیچ گونه تغییری نمی کند. در واقع نتایج آزمایش های باب پیش و پس از اندازه گیری انجام شده توسط آلیس یکی است.

حال فرض کنید که آلیس اسپین خود را در راستای $x$ اندازه گیری کند. حالت دوتایی ای که در دست آنهاست به صورت زیر نیز قابل نوشتن است:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,+\rangle + |-,-\rangle\right)$$

بنابراین اگر آلیس اسپین اش را در جهت + پیدا کند، حالت دو ذره به $|+,+\rangle$ و در نتیجه حالت ذره در دست باب نیز به $|+\rangle$ کاهش پیدا می کند. این کار با احتمال $1/2$ اتفاق می افتد. با احتمال $1/2$ نیز حالت دست باب در اثر اندازه گیری الیس به $|-\rangle$ تقلیل پیدا می کند. بنابراین ذره در دست باب در حالت ی است که با احتمال ۱/۲ می تواند در هرکدام از حالت های خالص پیش گفته باشد یعنی

$$\rho_B = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|). \quad (۸۵)$$

به این ترتیب آلیس با اندازه گیری خود در دوردست ها بدون اینکه با باب رابطه علّی نیز داشته باشد این آنزامبل را برای باب فراهم می کند. البته مثل حالت قبل نسبیت دراین جا نیز نقض نمی شود.

- تمرین: آیا باب هیچ راهی دارد که بتواند بفهمد آلیس آزمایش را در راستای $z$ انجام داده یا در راسای $x$ ؟ اگر چنین امکانی وجود داشته باشد آنگاه باب می تواند نوع آزمایش آلیس را به طور آنی بفهمد که این خود ناقض نسبیت خواهد بود.

- تمرین: حالت زیر را در نظر بگیرید که بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است:

$$|\Psi\rangle_{AB} = a|0,0\rangle + b|1,1\rangle. \quad (۸۶)$$

الف: ماتریس چگالی کیوبیتی که در دست باب است چیست؟

ب: آلیس روی کیوبیتی که در دست دارد در پایه $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ اندازه گیری انجام می دهد. بعد از اندازه گیری آلیس کیوبیت در دست باب به چه حالت هایی و با چه احتمالی تقلیل پیدا می کند. کیوبیتی که در درست باب است اکنون به صورت یک حالت مخلوط (یا یک تجزیه آنزامبلی) است. این تجزیه و ماتریس چگالی مربوط به آن را پس از این اندازه گیری پیدا کنید.

پ: حال فرض کنید که آلیس در پایه زیر اندازه گیری می کند:

$$\{|\phi\rangle, |\phi^\perp\rangle\}$$

انجام می دهد که در آن

$$|\phi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, \qquad |\phi^\perp\rangle = -\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle.$$

سوال قسمت ب را برای این قسمت پاسخ دهید.

مثال: فرض کنید که بین آلیس و باب یک حالت به صورت

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (۸۷)$$

به اشتراک گذاشته شده است. آیا آلیس می تواند برای این ماتریس چگالی یک تجزیه آنزامبلی به صورت زیر تهیه کند؟

$$\rho_B = \frac{1}{4}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) \quad (۸۸)$$

راه حل اول: یک راه این است که آلیس کیوبیت های خودش را به صورت تصادفی و با احتمال مساوی در پایه های $x$ و $z$ اندازه گیری کند. در این صورت آنزامبل بالا برای باب تهیه می شود.

راه دوم: برای اینکه راه حل دوم را بفهمیم به خالص سازی حالت $\rho_B$ توجه می کنیم. حالت خالص شده $\rho_B$ به شکل زیر است:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}\left(|a_0, 0\rangle + |a_1, 1\rangle + |a_2, +\rangle + |a_3, -\rangle\right) \quad (۸۹)$$

که در آن $|a_i\rangle$ ها چهارتا حالت متعامد هستند. اگر آلیس روی این چهارحالت اندازه گیری متعامد انجام دهد آنزامبلی که برای باب تهیه خواهد شد همان چیزی است که انتظار داریم. حال سوال این است که حالت های چهارگانه $|a_i\rangle$ را چگونه درست کرده و چگونه یک اندازه گیری در این پایه انجام دهیم. برای این کار آلیس یک کیوبیت کمکی را در اختیار می گیرید. وی می تواند این کیوبیت را در حالت $|0\rangle$ قرار دهد. در این صورت حالت این کیوبیت و حالت قبلی به صورت زیر خواهد بود:

$$|\Psi\rangle_{A',A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0,0\rangle + |0,1,1\rangle\right) \quad (۹۰)$$

که در آن $A'$ را برای نمایش کیوبیت کمکی آلیس به کار برده ایم. آلیس می تواند روی کیوبیت $A'$ یک عملگر هادامارد اعمال کند. عملگر هادامارد به صورت زیر عمل می کند:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (۹۱)$$

دراین صورت حالت بالا به شکل زیر در می آید:

$$|\Psi'\rangle_{A',A,B} = \frac{1}{2}\left(|0,0,0\rangle + |1,0,0\rangle + |0,1,1\rangle + |1,1,1\rangle\right) \tag{۹۲}$$

دو کیوبیت $A$ و $A'$ اکنون در چهار حالت متعامد هستند ولی اندازه گیری روی این کیوبیت ها توسط آلیس آنزامبل دلخواه را برای باب درست نمی کند، بلکه حالت درست شده برای باب همان آنزامبل $\rho_B = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ است. برای اینکه چنین آنزامبلی تهیه کند، آلیس نخست حالت را به شکل زیر بازنویسی می کند:

می تواند به صورت زیر نیز بنویسد:

$$|\Psi'\rangle_{A',A,B} = \frac{1}{2}\left(|0,0,0\rangle + |0,1,1\rangle + |1,0,0\rangle + |1,1,1\rangle\right) \tag{۹۳}$$

و سپس از تساوی

$$|00\rangle + |11\rangle = |++\rangle + |--\rangle \tag{۹۴}$$

استفاده می کند تا حالت را به شکل زیر در بیاورد:

$$|\Psi'\rangle_{A',A,B} = \frac{1}{2}\left(|0,+,+\rangle + |0,-,-\rangle + |1,0,0\rangle + |1,1,1\rangle\right). \tag{۹۵}$$

حال آلیس می تواند یک اندازه گیری دو کیوبیتی در پایه های متعامد

$$\{|0,+\rangle, |0,-\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$$

انجام دهد تا آنزامبل دلخواه برای باب تهیه شود. دقت کنید که تمام این اعمال توسط آلیس انجام شده و باب هیچ گونه دخالتی در این مورد نکرده است و هیچ گونه اطلاعی هم از اعمالی که انجام شده ندارد.

## ۲.۹ قضیه $GHJW$

در بخش قبلی با ذکر مثال هایی دیدیم که چگونه وقتی آلیس و باب یک حالت مشخص را به اشتراک گذارده اند ، آلیس می تواند با اندازه گیری کیوبیت خودش در پایه های مختلف آنزامبل های مختلفی را برای باب تهیه کند. البته باب هیچ گونه اطلاعی از عمل آلیس کسب نمی کند. حال

می خواهیم این قضیه را به طور کلی ثابت کنیم. این قضیه قضیه $GHJW$ نامیده می شود و بیان می کند تمام آنزامبل های مختلف را برای یک ماتریس چگالی $\rho_B$ می توان با اندازه گیری در پایه های مناسب توسط $A$ روی یک حالت $|\Psi\rangle_{AB}$ بدست آورد. در اینجا حالت $|\Psi\rangle_{AB}$ به طور یکتا تعیین نمی شود. نام این قضیه از نام کاشفان آن یعنی $Gisin,\ Hughston,\ Jozsa$ و $Wootters$ گرفته شده است. در واقع اثبات این قضیه خیلی خیلی ساده است.

برای اثبات این قضیه ماتریس چگالی $\rho_B$ و یک تجزیه آنزامبلی از آن را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\rho_B = \sum_{i=1}^{M} p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \tag{۹۶}$$

سوال این است که آیا یک حالت خالص مثل $|\Psi\rangle_{AB}$ وجود دارد که آلیس بتواند با اندازه گیری مناسبی روی ذره خودش این تجزیه آنزامبلی را برای باب تهیه کند؟ پاسخ این سوال به سادگی با یک خالص سازی برای ماتریس چگالی $\rho_B$ پیدا می شود. این خالص سازی به شکل زیر است:

$$|\Phi\rangle := \sum_{i=1}^{M} \sqrt{p_i} |\alpha_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle \tag{۹۷}$$

که در آن $\{|\alpha_i\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $M$ بعدی برای آلیس است. آلیس با اندازه گیری در این پایه آنزامبل $\{p_i, |\phi_i\rangle\}$ را برای باب تهیه می کند.

## ۱۰ حالت های پیوسته

یکی از راه های عملی کردن رایانش کوانتومی استفاده از اپتیک خطی و غیرخطی است. دست کم دو دلیل برای این امیدواری وجود دارد نخست اینکه تولید حالت های کوانتومی نور در آزمایشگاه ساده است و سابقه‌ای طولانی و موفق در اپتیک کوانتومی و اپتیک لیزر برای تولید و کنترل چنین حالت هایی وجود دارد. دوم اینکه زمان وادوسی فوتون عملاً بی نهایت است. البته این زمان وادوسی خیلی بالا یک جنبه منفی نیز دارد و آن اینکه برهم کنش فوتون ها با یکدیگر بسیار ضعیف است و به همین دلیل به دشواری می توان گیت های دو فوتونی عمومی روی فوتون ها ساخت. با این وجود استفاده از حالت های نور همچنان یک کاندیدای مهم برای رایانش کوانتومی باقی خواهد ماند. به همین دلیل شایسته است

که آشنایی مختصری با حالت های کوانتومی نور پیدا کنیم. خوشبختانه در درسهای مقدماتی مکانیک کوانتومی این آشنایی را تا حدود زیادی پیدا کرده ایم و تنها کافی است که کمی یافته‌های خود را با آنچه که در مورد فوتون ها باید بدانیم تطبیق دهیم. تصویر جدیدی که از نور داریم، یعنی تصویری که بعد از ابداع مکانیک کوانتومی پدیدار شده و با آزمایشها سازگار است، نور را به صورت بارانی از فوتون ها نشان می دهد. در بسیاری از شرایط شدت این بارش انقدر زیاد است که ما متوجه نمی شویم با بارانی از ذرات منفرد به نام فوتون سر و کار داریم. در چنین شرایطی تنها کافی است که خاصیت های ماکروسکوپی این بارش فوتونی را توصیف کنیم. اگر خواص جمعی و متوسط رفتار فوتون ها را در نظر بگیریم این رفتار با معادلات ماکسول توصیف می شوند که نور را به صورت امواج الکترومغناطیس نشان می دهند. خواننده ای که علاقمند به فهم دقیق تری از کوانتش میدان الکترومغناطیسی و فوتون به عنوان کوانتوم این میدان است می تواند به مرجع زیر [۱۲] مراجعه کند. این مقاله کوتاه و در واقع ۵ صفحه اول آن به آسانی نشان می دهد که چگونه کوانتش میدان الکترومغناطیس انجام می شود و فوتون به عنوان ذره نور پدیدار می شود. در شرایطی که بارش فوتون ها فوق العاده ضعیف باشد، رفتار ذره ای نور قابل مشاهده خواهد بود. در این صورت حالت های میدان الکترومغناطیسی در یک فضای هیلبرت بی نهایت بعدی با پایه های زیر توصیف می شود:

$$|n(\mathbf{k}_1,\epsilon_1),\ n(\mathbf{k}_2,\epsilon_2),\qquad \cdots n(\mathbf{k}_r,\epsilon_r),\cdots\rangle \tag{۹۸}$$

که به این معناست که این حالت (یعنی حالت نوری که مثلا در یک کاواک الکترومغناطیسی یا هر جای دیگر قرار دارد) چه تعداد فوتون با تکانه $k_i$ و قطبش $\epsilon_i$ وجود دارد. دقت کنید که تکانه $k_i$ یک بردار سه بعدی است که جهت حرکت فوتون و فرکانس آن را از طریق رابطه $\omega_i=|k_i|$ تعیین می کند و $\epsilon_i$ نیز یک بردار دوبعدی مختلط عمود بر این بردار سه بعدی است که جهت قطبش آن را نشان می دهد. به عنوان مثال اگر جهت حرکت فوتون در راستای مثبت $z$ باشد، آنگاه بردارهای قطبش می توانند به صورت زیر باشند:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=:|x\rangle\qquad \text{Polarization in the x}-\text{direction}, \tag{۹۹}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=:|y\rangle\qquad \text{Polarization in the y}-\text{direction}, \tag{۱۰۰}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=:\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle+i|y\rangle)\qquad \text{circular(left}-\text{handed polarization)},\ \ etc. \tag{۱۰۱}$$

[۱۲] https://www.phys.ksu.edu/personal/wysin/notes/quantumEM.pdf

نوع فوتون با فرکانس و قطبش آن مشخص می شود و به آن یک ]مود [13] یا وجه یا رنگ می گوییم. از این به بعد ما از همان اصطلاح رنگ استفاده می کنیم. [14]

اگر چه رنگ با فرکانس تطابق دارد و از این جهت نامگذاری خوبی است، ولی رنگ در اینجا به کلیه پارامترهایی که یک فوتون را توصیف می کند، یعنی اندازه فرکانس، جهت تکانه آن و هم چنین قطبش آن اشاره دارد. به این ترتیب در این نامگذاری فوتون هایی با یک فرکانس معین که دارای دو قطبش عمودی و افقی هستند، فوتون هایی با دو رنگ تلقی خواهند شد. اگر توجه خود را تنها به یک رنگ معطوف کنیم حالت های یک رنگ نور با یک عدد صحیح مشخص می شود یعنی اینکه چه تعداد فوتون با این فرکانس و قطبش مشخص داریم. بنابراین نقطه شروع ما این خواهد بود که یک فضای هیلبرت داریم با پایه بهنجار زیر

$$\mathcal{B} = \{|0\rangle, |1\rangle, \cdots |n\rangle, |n+1\rangle, \cdots\} \tag{۱۰۲}$$

در این فضا می توان عملگرهای زیر را تعریف کرد:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \tag{۱۰۳}$$

■ تمرین: نشان دهید که این دو عملگر واقعا الحاقی یکدیگر هستند. سپس نشان دهید که $[a, a^\dagger] = 1$.

و بالاخره نشان دهید که اگر عملگر شمارش را به صورت زیر تعریف کنیم: $N|n\rangle = n|n\rangle$، آنگاه

$$aa^\dagger = N + 1, \qquad a^\dagger a = N.$$

عملگرهای $a$ و $a^\dagger$ که به آن ها عملگرهای فنا و خلق فوتون می گوییم، عملگرهای هرمیتی نیستند. می توان عملگرهای هرمیتی زیر را تعریف کرد:

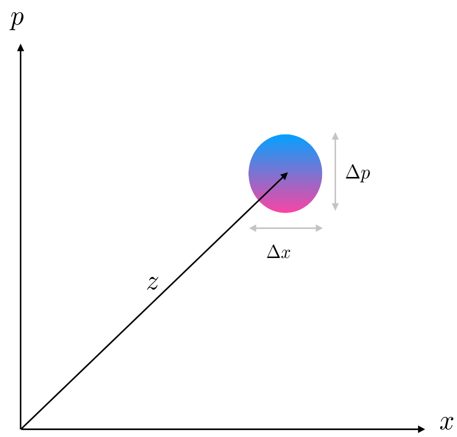
$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \qquad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger), \tag{۱۰۴}$$

این عملگرها در رابطه $[\hat{X}, \hat{P}] = i$ صدق می کنند که نشان دهنده یک رابطه عدم قطعیت بین مقادیر این دو کمیت است. این دو کمیت به ترتیب به شدت میدان الکتریکی نور و فاز آن مرتبط هستند. یک حالت دلخواه نور (مثلا درون کاواک) به صورت

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle \tag{۱۰۵}$$

[13] mode

[14] هر چه باشد اصطلاح رنگ از اصطلاح مود یا وجه بهتر است.




شکل ۵: یک حالت همدوس، با یک عدد مختلط در صفحه مختلط مشخص می شود. عدم قطعیت مکان و تکانه در همه جهات با هم برابر و حاصل ضرب آنها برابر است با $\frac{\hbar}{2}$.

توصیف می شود. در ادامه به توصیف بعضی از حالت های مهم فوتونی می پردازیم. این حالت ها نه تنها از نظر فیزیکی و تولید آزمایشگاهی اهمیت دارند بلکه از نظر ریاضی و از نظر کاربرد در نظریه اطلاعات کوانتومی نیز مهم هستند.

۱:

## ۱.۱۰ حالت های همدوس

از نظر فیزیکی حالت های پایه $|n\rangle$ ، هرکدام معنای فیزیکی خاصی دارند. پایه دیگری که معنای فیزیکی خیلی جالبی دارد پایه حالت های همدوس است. این حالت ها به ترتیبی که خواهیم دید، نزدیک ترین حالت ها به حالت های کلاسیک هستند. بهترین تعریف برای این حالت ها به صورت زیر است. عملگر $\hat{a}$ را در نظر بگیرید. این عملگر یک عملگر هرمیتی نیست بنابراین اگر ویژه مقداری داشته باشد حتما یک عدد مختلط است. این ویژه مقدار را با عدد مختلط $z$ و ویژه بردار مربوطه را با $|z\rangle$ نشان دهید. بنابراین داریم

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle. \qquad (۱۰۶)$$

با بسط $|z\rangle$ برحسب بردارهای پایه $|n\rangle$ می توان نشان داد که این حالت به صورت زیر است:

$$|z\rangle = \sum_{n=0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{۱۰۷}$$

البته این حالت بهنجار نیست. در واقع یک محاسبه ساده نشان می دهد که:

$$\langle z|w\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{z}w)^n}{n!} = e^{\overline{z}w}. \tag{۱۰۸}$$

در نتیجه حالت همدوس بهنجار به شکل زیر است:

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{۱۰۹}$$

حال می توانیم از لم هاسدورف یعنی

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{۱۱۰}$$

برای عملگرهایی که جابجاگر آنها متناسب با عملگر واحداست استفاده کنیم و بنویسیم:

$$e^{za^\dagger - z^* a} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} e^{-z^* a} \tag{۱۱۱}$$

در نتیجه یک حالت همدوس بهنجار را می توان به شکل زیر نوشت:

$$|z\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger - z^* \hat{a}}|0\rangle \tag{۱۱۲}$$

عملگر $D(z, z^*) := e^{z\hat{a}^\dagger - z^* \hat{a}}$ عملگر جابجایی [۱۵] نامیده می شود.

$$D(z, z^*) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^* \hat{a}} = e^{i(x\hat{P} - p\hat{X})} = D(x, p) \tag{۱۱۳}$$

به این ترتیب می توانیم بهتر بفهمیم که چرا به این عملگر، عملگر جابجایی گفته می شود. روی یک حالت $|y\rangle$ که ویژه حالت عملگر $\hat{X}$ است، این عملگر به صورت زیر عمل می کند:

$$D(x, p)|y\rangle \propto |x + y\rangle$$

و روی یک حالت $|q\rangle$ که ویژه حالت عملگر $\hat{P}$ است، اثر آن چنین است:

$$D(x, p)|q\rangle \propto |p + q\rangle.$$

[۱۵] Displacement Operator

■ **تمرین:** نشان دهید که رابطه زیر برقرار است:

$$D(z,z^*)D(w,w^*)=AD(z+z^*,w+w^*), \tag{۱۱۴}$$

که در آن $A$ یک عدد مختلط و تابعی از $z$ و $w$ است. این عدد را محاسبه کنید.

■ تمرین: در یک حالت همدوس احتمال این را که تعداد فوتون ها برابر با $n$ باشد را حساب کنید. تعبیر این احتمال چیست؟

$z$ را به شکل زیر به قسمت های حقیقی و موهومی اش تجزیه کنید. ضریب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برای راحتی بعدی و زیبایی بصری بعضی از نتایج در نظر گرفته شده است. معنای عمیقی ندارد.

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+ip) \qquad z^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-ip) \tag{۱۱۵}$$

که از ان نتیجه می گیریم:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(z+z^*) \qquad p=\frac{1}{i\sqrt{2}}(z-z^*) \tag{۱۱۶}$$

حال با یک محاسبه ساده می توانیم نشان دهیم:

$$\langle z|\hat{X}|z\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle z|a+a^\dagger|z\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(z+z^*)=x. \tag{۱۱۷}$$

و

$$\langle z|\hat{P}|z\rangle=\frac{1}{i\sqrt{2}}(\langle z|a-a^\dagger|z\rangle)=\frac{1}{i\sqrt{2}}(z-z^*)=p. \tag{۱۱۸}$$

■ **تمرین:** الف: نشان دهید که برای هر حالت همدوس میزان عدم قطعیت هایزنبرگ مساوی با مقدار کمینه یعنی $\frac{\hbar}{2}$ است. البته در دستگاه واحدهایی که به کار برده ایم مقدار $\hbar$ برابر با یک است.

ب: سپس مشاهده پذیر های زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{X}' \quad := \quad \cos\theta\hat{X}+\sin\theta\hat{P},$$

$$\hat{P}' \quad := \quad -\sin\theta\hat{X} + \cos\theta\hat{P}. \tag{۱۱۹}$$

نشان دهید که برای این مشاهده پذیرها نیز میزان عدم قطعیت هایزنبرگ مساوی با مقدار کمینه یعنی $\frac{\hbar}{2}$ است. بنابراین می توان یک حالت همدوس را با کمی تسامح به صورت نشان داده شده در شکل 10 نشان داد.

حال فرض کنید که در لحظه صفر حالت کوانتومی به صورت $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$ است. می خواهیم تحول این حالت را در زمان محاسبه کنیم. بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = e^{-i\omega t a^\dagger a}|z\rangle = e^{-i\omega t a^\dagger a}\sum_{n=0}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= \sum_{n=0}\frac{(ze^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = |ze^{-i\omega t}\rangle, \end{aligned} \tag{۱۲۰}$$

که به این معناست که حالت همدوس با فرکانس $\omega$ روی یک مدار دایره ای در صفحه مختلط می چرخد. به عبارت دیگر $x$ و $p$ با فرکانس $\omega$ نوسان می کنند.

■ **تمرین:** نشان دهید که رابطه تمامیت زیر برای حالت های بهنجار همدوس برقرار است: (راهنمایی: $z$ را به صورت $z = re^{i\theta}$ بنویسید و نخست روی $\theta$ انتگرال بگیرید. )

$$\frac{1}{\pi}\int dzdz^*|z\rangle\langle z| = I. \tag{۱۲۱}$$

یک حالت مخلوط فوتون تک مد را می توان به صورت کلی به صورت زیر نشان داد

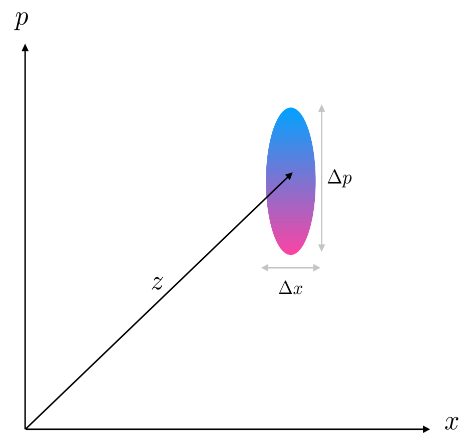
$$\rho = \sum_{n,m}\rho_{n,m}|n\rangle\langle m|, \tag{۱۲۲}$$

و یا

$$\rho = \frac{1}{\pi^2}\int d^2z d^2w \rho(z,w)|z\rangle\langle w|. \tag{۱۲۳}$$

## ۲.۱۰ حالت های چگالیده یا فشرده

حالت های فشرده حالت هایی هستند که درآنها عدم قطعیت دریکی از مختصه ها مثلا در مکان کم شده و در مختصه دیگر مثلا در تکانه زیاد شده است به نحوی که بازهم حاصل ضرب عدم یقین در دو مختصه مقدار کمینه‌ی $\frac{\hbar}{2}$ باقی مانده است. چنین حالت هایی را برای نور و فوتون ها می




شکل ۶: یک حالت فشرده که در جهت $x$ فشرده شده است.

توان براحتی در آزمایشگاه ساخت. از نظر ریاضی این حالت ها با اثر یک عملگر چگالنده [۱۶] روی حالت همدوس بدست می آیند. یک عملگر فشارنده برای یک رنگ به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(\xi) := e^{\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2}}, \qquad (۱۲۴)$$

که در آن $\xi := r\, e^{i\phi}$ یک عدد مختلط است. بنابراین یک حالت فشرده به صورت زیر است:

$$|z, \xi\rangle := S(\xi)|z\rangle, \qquad (۱۲۵)$$

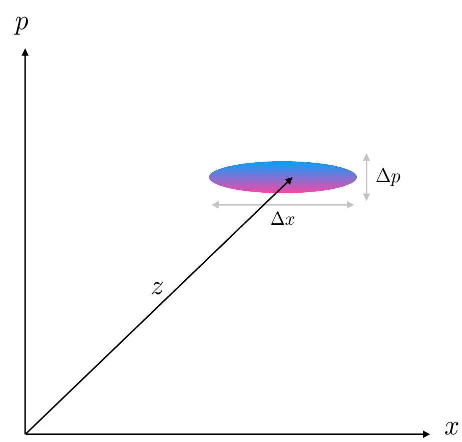
که در آن $|z\rangle$ یک حالت همدوس است. برای این که خواص حالت های چگالیده یا فشرده را بررسی کنیم، روابط و تمرین های زیر لازم هستند.

■ **تمرین:** نشان دهید که

$$e^{i\hat{N}\phi}\, a\, e^{-i\phi\hat{N}} = e^{-i\phi} a, \qquad e^{iN\phi} a^\dagger e^{-i\phi N} = e^{i\phi} a^\dagger \qquad (۱۲۶)$$

که در آن $\hat{N} = a^\dagger a$ عملگر شمارش است. راهنمایی: از لم هاسدورف استفاده کنید. با استفاده از این رابطه نشان دهید که عملگر فشارنده با پارامتر $\xi$ با پارامتر مختلط $\xi = r^{i\phi}$ را می توان با یک تبدیل یکانی از عملگر فشارنده با پارامتر حقیقی $r$ بدست آورد.

[۱۶] Squeezing Operator




شکل ۷: یک حالت فشرده که در جهت $p$ فشرده شده است.

■ **تمرین:** با استفاده از لم بیکر ـ هاسدورف نشان دهید که

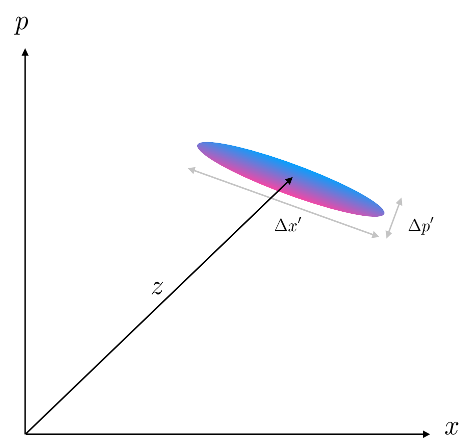
$$S(r)aS(-r) = \cosh r\ a + \sinh r\ a^\dagger, \qquad S(r)a^\dagger S(-r) = \sinh r\ a + \cosh r\ a^\dagger. \tag{۱۲۷}$$

■ **تمرین:** با استفاده از تمرین قبلی عدم یقین $\Delta x$ و $\Delta p$ را برای یک حالت فشرده‌ی $|z,r\rangle$ حساب کنید. نشان دهید که نسبت به یک حالت همدوس، اگرچه عدم یقین دریکی از این مشاهده پذیرها افزایش و در دیگری کاهش یافته ولی هم چنان حاصلضرب آنها مقدار ثابت $\frac{\hbar}{2}$ است.

■ **تمرین:** عدم یقین را برای حالت فشرده شده خلاء یعنی $|0,r\rangle = S(r)|0\rangle$ بدست آورید.

■ **تمرین:** بسط یک حالت فشرده دلخواه را برحسب حالت های پایه $|n\rangle$ بدست آورید.

هرگاه $\xi = r^{i\phi}$ حقیقی باشد، بسته به این که $r$ کوچک تر یا بزرگتر از یک باشد، حالت همدوس در جهت $x$ یا $p$ فشرده شده و در جهت عمود بر آن کشیده می شود. هرگاه که $\xi$ یک عدد مختلط باشد، نقش $\phi$ این است که این فشردگی را در جهت های دلخواه قرار می دهد. مطابق با شکل (۲.۱۰).




شکل ۸: یک حالت فشرده که در یک جهت دلخواه فشرده شده است.

## ۱۱ حالت های گرمایی

اگر یک کاواک الکترومغناطیسی در دمای ثابت $T$ قرار بگیرد، با فرض این که نور درون آن تک رنگ باشد، هر تعداد فوتونی با احتمال بولتزمن می تواند درون کاواک قرار داشته باشد. در این صو رت حالت کاواک به صورت یک حالت آمیخته خواهد بود:

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H} = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n}|n\rangle\langle n|. \qquad (۱۲۸)$$

در این جا $\beta = \frac{1}{T}$ است و $T$ دماست و ثابت بولتزمن هم برابر با یک گرفته شده است. هم چنین $Z$ برابر است با:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n} = \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}. \qquad (۱۲۹)$$

■ **تمرین:** برای این حالت، نشان دهید که:

$$\langle \hat{X}\rangle_\rho = \langle \hat{P}\rangle_\rho = 0, \qquad \Delta X \Delta P = \coth\frac{\beta\omega}{2}. \qquad (۱۳۰)$$

نشان دهید که در حد های $T \longrightarrow 0$ و $T \longrightarrow \infty$ به نتیجه ای می رسید که از نظر فیزیکی انتظار دارید.

## ۱.۱۱ تابع مشخصه

بسط یک حالت برحسب بردارهای پایه آنچنانکه تا کنون نشان دادیم اگرچه کاملترین توصیف از یک حالت است ولی برای بسیاری اوقات به چنین توصیف کاملی نه نیاز داریم و نه به آن دسترسی داریم. معمولاً می خواهیم از یک حالت کوانتومی متوسط مشاهده پذیرها را بدست آوریم. معمولاً می خواهیم متوسط عملگرهایی مثل $a^m a^{\dagger n}$ را که در آن $m$ و $n$ اعداد صحیح مثبتی هستند بدست آوریم. بجای آنکه هر بار چنین متوسط هایی را حساب کنیم یک بار برای همیشه تابع مولدی را حساب می کنیم که چنین متوسط هایی را در دل خود دارد. به چنین تابع مولدی تابع مشخصه [۱۷] مربوط به آن حالت کوانتومی می گوییم. این تابع مشخصه به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi(z, z^*) := \langle D(z, z^*)\rangle = tr(D(z, z^*)\rho) = tr(e^{za^\dagger - z^* a}\rho). \qquad (۱۳۱)$$

واضح است که؛

$$\chi(0, 0) = 1.$$

براحتی می توان فهمید که با مشتق گیری از تابع مشخصه می توان همه متوسط ها را حساب کرد. به عنوان مثال

$$\frac{\partial\chi}{\partial z}|_{z,\overline{z}=0} = Tr(a^\dagger\rho) = \langle a\rangle_\rho, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial z^*}\|_{z,\overline{z}=0} = Tr(a^\dagger\rho) = -\langle a\rangle_\rho, \qquad (۱۳۲)$$

و به طور کلی

$$\frac{\partial^{m+n}\chi}{\partial^m z\partial^n z^*}|_{z,\overline{z}=0} = \langle a^m(-a^\dagger)^n\rangle_\rho. \qquad (۱۳۳)$$

به عنوان مثال برای حالت خلاء تابع مشخصه به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\chi(z, z^*)_0 = Tr(e^{za^\dagger - z^* a}|0\rangle\langle 0|) = \langle 0|e^{za^\dagger - z^* a}|0\rangle = \langle 0|e^{\frac{1}{2}zz^*}e^{za^\dagger}e^{-z^* a}|0\rangle = e^{\frac{1}{2}zz^*}. \qquad (۱۳۴)$$

■ **تمرین:** تمرین قبلی را برای حالت پایه نوسانگر هارمونیک یعنی $|0\rangle$ تکرار کنید.

■ **تمرین:** تابع مشخصه‌ی یک حالت همدوس را بدست آورید. از روی آن متوسط کمیت های $X,\ P,\ X^2,\ P^2$ را بدست آورید.

---

[۱۷] Characteristic Function

■ **تمرین:** تمرین قبلی را برای یک حالت فشرده‌ی $|z,\xi\rangle$ تکرار کنید.

■ تابع مشخصه را برای یک حالت گرمایی در دمای $T$ بدست آورید. رفتار آن را در دماهای خیلی زیاد و خیلی کم مطالعه کنید.

## ۲.۱۱ حالت های گاووسی تک رنگ

حالت های گاووسی به حالت هایی گفته می شود که تابع مشخصه آنها یک تابع گاووسی باشد. به عبارت بهتر $\rho$ یک حالت گاووسی است هرگاه تابع مشخصه آن به شکل زیر باشد:

$$\chi(z,z*)_\rho = e^{\beta zz^*+\gamma^* z+\gamma z^*}. \tag{۱۳۵}$$

توابع گاووسی دارای این ویژگی هستند که تمام ممان های بالاتر آنها تابعی از ممان های درجه یک و دوی آنهاست. کسانی که متخصص اپتیک کوانتومی هستند ادعا می کنند که حالت های گاووسی را می توان براحتی در آزمایشگاه تولید کرد. همین آسانی تولید و اندازه گیری و عمل کردن روی حالت های گاووسی است که باعث می شود مطالعه آنها در چارچوب اطلاعات کوانتومی حائز اهمیت باشد.

## ۳.۱۱ حالت های گاووسی چند رنگ

در یک آزمایش اپتیکی نور همیشه تک رنگ باقی نمی ماند. ممکن است یک فوتون با فرکانس $\omega$ به یک بلور غیرخطی بتابد و تبدیل به دو فوتون با فرکانس های $\omega_1$ و $\omega_2$ شود. و این کار می تواند تکرار شود. از آن هم ساده تر و متداول تر، ممکن است فوتونی که یک فرکانس دارد، به یک المان اپتیکی به اسم شکافنده [۱۸] بتابد و با احتمالات معین به فوتون هایی با همان فرکانس ولی با تکانه هایی در جهات متفاوت تبدیل شود. یا ممکن است فوتونی به یک دستگاه شکافنده قطبش [۱۹] بتابد که با احتمالات معین به فوتون هایی با قطبش های متفاوت تبدیل شود. بنابراین به طور طبیعی ناگزیریم که حالت های چندرنگی نور را نیز در نظر بگیریم . بعنوان مثال کلی ترین حالت های دو رنگی نور، اگر خالص باشند، به صورت $\sum_{n_1,n_2}\psi_{n_1,n_2}|n_1,n_2\rangle$ توصیف می شود. به این ترتیب می توانیم حالت های همدوس دوتایی یا فشرده دوتایی داشته باشیم و حتی آنها را به صورتی درهم تنیده کنیم، مثل حالت های زیر:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}(|\alpha\rangle|-\alpha\rangle+|-\alpha\rangle|\alpha\rangle) \tag{۱۳۶}$$

[۱۸] Beam Splitter

[۱۹] Polarizer Beam Splitter

که شبیه یک حالت بل است و یا

$$\frac{1}{\sqrt{M}}(|\alpha\rangle|\alpha\rangle\cdots|\alpha\rangle+|-\alpha\rangle|-\alpha\rangle\cdots|-\alpha\rangle) \quad (۱۳۷)$$

که شبیه یک حالت $n$ تایی از $GHZ$ است.

■ تمرین: ضرایب $N$ و $M$

را چنان پیدا کنید که این حالت ها بهنجار باشند.

در بین این حالت ها نیز حالت های چندرنگی گاووسی، بازهم به دلیل آسانی تولید در آزمایشگاه، اهمیت خاصی دارند. بنابراین، این بخش کوچک را به یک مرور کلی از حالت های گاووسی اختصاص می دهیم. فضای هیلبرت ما در اینجا با حالت های $|n_1,n_2,\cdots n_K\rangle$ جاروب می شود که در آن $K$ تعداد رنگ هاست و $n_i$ تعداد فوتون های با رنگ $i$ است. عملگرهای خلق و فنا همچنان در روابط زیر صدق می کنند:

$$[a_i,a_j^\dagger]=\delta_{i,j} \qquad a_i|\cdots n_i\cdots\rangle=\sqrt{n_i}|\cdots n_i-1\cdots\rangle, \qquad a_i^\dagger|\cdots n_i\cdots\rangle=\sqrt{n_i+1}|\cdots n_i+1\cdots\rangle. \quad (۱۳۸)$$

هم چنین عملگر های $\hat{X}_i$ و $\hat{P}_i$ به شکل قبل تعریف می شوند، یعنی

$$\hat{X}_k=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_k+a_k^\dagger) \qquad \hat{P}_k=\frac{1}{i\sqrt{2}}(a_k-a_k^\dagger). \quad (۱۳۹)$$

روابط جابجایی بین این مشاهده پذیرها به شکل زیر است:

$$[\hat{X}_k,\hat{X}_l]=0 \qquad [\hat{P}_k,\hat{P}_l]=0 \qquad [\hat{X}_k,\hat{P}_l]=\delta_{k,l}. \quad (۱۴۰)$$

می توان این روابط را به صورت موثرتری نشان داد. برای این منظور بردار زیر را تعریف می کنیم:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} X_1\\ P_1\\ X_2\\ P_2\\ \cdots\\ X_K\\ P_K \end{pmatrix} \quad (۱۴۱)$$

و

$$\mathbf{R}^{\dagger} = \begin{pmatrix} X_1 & P_1 & X_2 & P_2 & \cdots & X_K & P_K \end{pmatrix} \quad (۱۴۲)$$

در این صورت می توان نوشت:

$$[R_i, R_j] = i\Omega_{ij} \quad (۱۴۳)$$

که در آن

$$\Omega = \sigma \oplus \sigma \oplus \cdots \oplus \sigma$$

و

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

عملگر جابجایی در این حالت به صورت زیر تعریف می شود:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = e^{i(\mathbf{x}\cdot\hat{P} - \mathbf{p}\cdot\hat{X})} \quad (۱۴۴)$$

که در آن

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_K), \qquad \mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots p_K).$$

■ **تمرین:** نشان دهید که عملگر جابجایی را می توانید به صورت زیر بنویسید:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = e^{i\mathbf{r}^T\Omega\hat{R}}$$

که در آن

$$\mathbf{r}^T = (x_1, p_1, x_2, p_2, \cdots x_K, p_K).$$

ماتریسِ همبستگی [20] ماتریسی است که درایه های آن همبستگی مولفه های مختلف را نشان می دهد. در حالت کلی برای حالت های چند رنگ، این ماتریس به شکل زیر تعریف می شود:

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{2}\langle R_k R_l + R_l R_k\rangle - \langle R_k\rangle\langle R_l\rangle. \tag{۱۴۵}$$

برای وقتی که $K = 1$ است، این ماتریس به شکل ساده زیر در می آید:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 & \frac{1}{2}\langle XP + PX\rangle - \langle X\rangle\langle P\rangle \\ \frac{1}{2}\langle XP + PX\rangle - \langle X\rangle\langle P\rangle & \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2 \end{pmatrix}, \tag{۱۴۶}$$

که در آن

$$\langle A\rangle := Tr(A\rho). \tag{۱۴۷}$$

در حالت کلی ماتریس همبستگی در رابطه زیر صدق می کند:

$$\Gamma + \frac{i}{2}\Omega \geq 0. \tag{۱۴۸}$$

برای اثبات این رابطه کافی است که یک بردار دلخواه $|v\rangle$ را در نظر بگیریم و عنصر ماتریسی $\langle v|\Gamma + \frac{i}{2}\Omega|v\rangle$ را حساب کنیم. کافی است به تعریف $\Omega$ توجه کنیم که از روی آن متوجه می شویم:

$$\Gamma_{kl} + \frac{i}{2}\Omega_{kl} = \langle R_k R_l\rangle - \langle R_k\rangle\langle R_l\rangle. \tag{۱۴۹}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle v|\Gamma + \frac{i}{2}\Omega|v\rangle = \sum_{k,l} v*_k \langle R_k R_l\rangle - \langle R_k\rangle\langle R_l\rangle v_l = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2. \tag{۱۵۰}$$

که در آن $A$ عملگر زیر است:

$$A = \sum_i v_i R_i.$$

اما می دانیم که برای هر عملگر دلخواه رابطه زیر برقرار است:

$$\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle \geq 0.$$

به این ترتیب رابطه (۱۴۸) ثابت می شود.

---
[20] Covariance Matrix

## ۴.۱۱ تابع ویگنر

ویژگی های یک حالت پیوسته را می توان به زیبایی توسط تابع ویگنر [۲۱] مربوط به آن نشان داد. تابع ویگنر در حالت کلی و برای حالت های چند رنگ به شکل زیر تعریف می شود:

$$W(\mathbf{r}) = W(\mathbf{x},\mathbf{p}) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\langle \mathbf{x}-\frac{1}{2}\mathbf{q}|\rho|\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{q}\rangle e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}d\mathbf{q} \tag{۱۵۱}$$

تابع ویگنر بر خلاف تابع موج $\Psi(x)$ یا $\Psi(p)$ تابعی است در فضای فاز یعنی بر حسب متغیرهای تکانه و مکان (هر دو) تعریف می شود. چنانچه خواهیم دید، متوسط همه مشاهده پذیر ها را می توان بر حسب تابع ویگنر نیز نوشت، بنابراین به نظر می رسد که تابع ویگنر یک تابع توزیع احتمال در فضای فاز است، یعنی بیان می کند که یک سیستم کوانتومی با احتمال $W(\mathbf{x},\mathbf{p})$ در نقطه $(\mathbf{x},\mathbf{p})$ از فضای فاز است. این تصویر تا حدود زیادی درست است با این تفاوت که می توان نشان داد تابع ویگنر همواره مثبت نیست، و در نتیجه نمی توان آن را به عنوان یک تابع توزیع احتمال در نظر گرفت. علاوه بر این، برای بسیاری از درجات آزادی دیگر (مثلا اسپین) تابع ویگنر قابل تعریف نیست.

### ۱.۴.۱۱ ویژگی های تابع ویگنر

خواننده براحتی می تواند ویژگی ها زیر را برای حالت ویگنر ثابت کند. بهترین کار هم این است که این خواص را برای حالت های تک رنگ ثابت کرد، زیرا ایده های اصلی در همین حالت ساده براحتی قابل پی گیری و اثبات هستند. در همه موارد استفاده از اتحاد $\frac{1}{2\pi}\int dpe^{ipq}=\delta(q)$ و هم چنین روابطی مثل

$$X|x\rangle = x|x\rangle, \qquad P|x\rangle = i(\frac{\partial}{\partial x}|x\rangle) \qquad \langle x|P = -i(\frac{\partial}{\partial x}\langle x|) \tag{۱۵۲}$$

به اثبات ویژگی ها کمک می کند. چندتا از مهم ترین ویژگی های تابع ویگنر این ها هستند:

- بهنجارش:

$$\int_{R^{2n}} d\mathbf{r}W(\mathbf{r}) = 1. \tag{۱۵۳}$$

- محاسبه متوسط مشاهده پذیرها:

$$\langle X_i\rangle = \int x_i W(\mathbf{x},\mathbf{p})d\mathbf{x}d\mathbf{p} \tag{۱۵۴}$$

[۲۱] Wigner Function

$$\langle P_i\rangle = \int p_i W(\mathbf{x},\mathbf{p})d\mathbf{x}d\mathbf{p} \tag{۱۵۵}$$

خواننده از این جا می تواند رابطه ای برای محاسبه متوسط مشاهده پذیرهای دلخواه را پیدا کند.

- توابع توزیع احتمال برای مکان و تکانه به تنهایی:

$$\mathcal{P}(x) := \langle \mathbf{x}|\rho|\mathbf{x}\rangle = \int dp W(\mathbf{x},\mathbf{p}) \qquad \mathcal{P}(p) := \langle \mathbf{p}|\rho|\mathbf{p}\rangle = \int d\mathbf{x} W(\mathbf{x},\mathbf{p}) \tag{۱۵۶}$$

- محاسبه همپوشانی دو حالت:

$$Tr(\rho\rho') = (2\pi)^n \int d\mathbf{x}d\mathbf{p}W_\rho(\mathbf{x},\mathbf{p})W_{\rho'}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \tag{۱۵۷}$$

## ۵.۱۱ مثالهایی از تابع ویگنر

تابع ویگنر را می توان برای حالت های مختلف حساب کرد. در این قسمت تابع ویگنر را برای یک حالت همدوس حساب می کنیم. نخست توجه می کنیم که عملگر انتقال را می توان به صورت های مختلف نوشت. یکبار دیگر یادآوری می کنیم که مولفه های حقیقی و موهومی $z$ چگونه تعریف می شوند:

$$z = \frac{x+ip}{\sqrt{2}} \qquad z^* = \frac{x-ip}{\sqrt{2}}.$$

با استفاده از لم هاسدورف می توان نوشت:

$$D(z,z^*) = D(x,p) = e^{ixP}e^{-ipX}e^{\frac{i}{2}xp} = e^{-ipX}e^{ixP}e^{\frac{-i}{2}xp}. \tag{۱۵۸}$$

با در نظر گرفتن این که $|z\rangle = D(z,z^*)|0\rangle$ و سپس اثر دادن $D(z,z^*)$ به شکلی که در رابطه (۱۵۸) نوشته ایم روی $\langle x-\frac{q}{2}|$ به روابط زیر می رسیم:

$$\begin{aligned}\langle x-\frac{q}{2}|z\rangle &= \langle x+x'-\frac{q}{2}|0\rangle e^{-ip'(x-\frac{q}{2})-i\frac{i}{2}x'p'}\\ \langle z|x+\frac{q}{2}\rangle &= \langle 0|x+x'+\frac{q}{2}\rangle e^{ip'(x+\frac{q}{2})+i\frac{i}{2}x'p'}\end{aligned} \tag{۱۵۹}$$

و در نتیجه

$$\langle x-\frac{q}{2}|z\rangle\langle z|x+\frac{q}{2}\rangle = \langle x+x'-\frac{q}{2}|0\rangle\langle 0|x+x'+\frac{q}{2}\rangle e^{ip'q} \tag{۱۶۰}$$

در این رابطه $|0\rangle$ حالت پایه نوسانگر است. در نتیجه این رابطه به شکل زیر نوشته می شود:

$$W(x,p)=\frac{1}{2\pi}\int dq\psi_0(x+x'-\frac{q}{2})\psi_0^*(x+x'+\frac{q}{2})e^{iq(p+p')} \tag{۱۶۱}$$

که در آن $\psi_0(x)$ حالت پایه نوسانگر و برابر است با:

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{۱۶۲}$$

با محاسبه انتگرال های گاووسی پدید آمده به نتیجه نهایی زیر می رسیم.

$$W(x,p)=\frac{1}{\pi}e^{-(x+x')^2-(p+p')^2} \tag{۱۶۳}$$

برای آنکه تاکید کنیم این عبارت، تابع ویگنر با متغیرهای $(z,z^*)$ برای حالت همدوس $|\omega\rangle$ است، آن را به شکل زیر می نویسیم.

$$W_z(\omega))=\frac{1}{\pi}e^{-2|z+\omega|^2}. \tag{۱۶۴}$$

همانطور که دیده می شود، این تابع ویگنر یک تابع گاووسی است. هرگاه $w$ را مساوی صفر قرار دهیم، تابع ویگنر برای حالت پایه نوسانگر بدست می آید.

---

## ۱۲ مسئله ها:

- مسئله اول: الف: با یک مثال نشان دهید که یک ماتریس چگالی می تواند تجزیه ای به صورت

$$\sum_{i=1}^{N}p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{۱۶۵}$$

داشته باشد که در آن $\sum_i p_i=1$ است ولی همه $p_i$ ها مثبت نیستند.

ب: ثابت کنید که اگر این بردارها مستقل خطی باشند چنین چیزی ممکن نیست.

■ مسئله دوم: نشان دهید که هر ماتریس چگالی دو کیوبیتی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho = (U \otimes V)\rho_0(U^\dagger \otimes V^\dagger) \tag{۱۶۶}$$

که در آن

$$\rho_0 = \frac{1}{4}\big(I + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}\otimes I + I\otimes \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha\sigma_\alpha\otimes\sigma_\alpha\big). \tag{۱۶۷}$$

■ مسئله سوم:الف: نشان دهید که حالت های بل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\phi_{m,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{1}(-1)^{ni}|i, i+m\rangle \tag{۱۶۸}$$

ب: سپس یک حالت آمیخته به صورت

$$\rho_{A,B} = \sum_{m,n} p_{m,n}|\phi_{m,n}\rangle\langle\phi_{m,n}| \tag{۱۶۹}$$

در نظر بگیرید که در آن $p_{m,n}$ احتمالات مثبت هستند و مجموع آنها یک است. این حالت را بر حسب ماتریس های پاوولی بنویسید. از جمله نشان دهید که در این حالت ماتریس چگالی هر کدام از کیوبیت ها به صورت جداگانه یک ماتریس آمیخته ماکزیمال است یعنی $\rho_A = \rho_B = \frac{I}{2}$.

■ مسئله چهارم: حالت $|W\rangle$ به شکل زیر توصیف می شود:

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\big(|100\cdots0\rangle + |010\cdots0\rangle + \cdots|000\cdots1\rangle\big). \tag{۱۷۰}$$

سعی کنید که این حالت را بر حسب ماتریس چگالی کاهش یافته برای $k$ تا کیوبیت اول را بدست آورید. (راهنمایی: این حالت را بر حسب $|W_k\rangle$ بسط دهید. )

■ مسئله پنجم: یک ماتریس چگالی به صورت $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma})$ داده شده است. ماتریس $\rho^{\frac{1}{2}}$ را برحسب ماتریس های پاوولی بنویسید.

■ مسئله ششم: ماتریس چگالی یک ذره (به بیان دقیق تر آنزامبلی از ذرات) به صورت زیر داده شده است:

$$\rho = A\int_{-\infty}^{\infty} dxdx' e^{-a(x+x'-b)^2}|x\rangle\langle x'| \qquad (۱۷۱)$$

الف: مقدار $A$ را تعیین کنید.

ب: اگر روی این ذرات اندازه گیری مکان انجام دهیم، احتمال بدست آوردن نتیجه‌ی $x$ چقدراست. به عبارت بهتر تابع احتمال $P(x)$ چقدراست؟

ج: اگر روی این ذرات اندازه گیری تکانه انجام دهیم، احتمال بدست آوردن نتیجه‌ی $p$ چقدراست. به عبارت بهتر تابع احتمال $P(p)$ چقدراست؟

د: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle X\rangle, \qquad \langle X^2\rangle, \qquad \langle P\rangle, \qquad \langle P^2\rangle. \qquad (۱۷۲)$$

■ مسئله هفتم: یک حالت دلخواه $\rho$ در کره بلوخ در نظر بگیرید. کدام حالت های خالص مثل $|\phi\rangle$ هستند که در رابطه‌ی $\langle\phi\rho|\phi\rangle = 0$ صدق می کنند؟ کدام حالت ها هستند که در رابطه $\langle\phi\rho|\phi\rangle = \frac{1}{2}$ صدق می کنند.

■ مسئله هشتم: یک حالت دلخواه $\rho$ در کره بلوخ در نظر بگیرید. کدام حالت های مخلوط مثل $\sigma$ هستند که در رابطه‌ی $tr(\rho\sigma) = 0$ صدق می کنند؟

■ مسئله نهم: یک باریکه ذرات مخلوطی است از ذراتی که در حالت های زیرهستند:

$$\begin{aligned} &|z+\rangle, && 10\ \ pecent \\ &|z-\rangle, && 40\ \ pecent \\ &|x+\rangle, && 50\ \ pecent. \end{aligned} \qquad (۱۷۳)$$

روی این باریکه اندازه گیری اسپین انجام می دهیم. کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle S_x \rangle, \qquad \langle S_z \rangle. \tag{۱۷۴}$$

■ مسئله دهم: دو ذره در حالت $|\phi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$ هستند. ذره اول دست آلیس و ذره دوم دست باب است.

الف: ماتریس چگالی باب چیست؟

ب: فرض کنید که آلیس روی ذره خود یک اندازه گیری در راستای $z\cos\theta + x\sin\theta$ انجام می دهد. این اندازه گیری باعث می شود که ما بتوانیم یک تجزیه از ماتریس چگالی باب بدست آوریم. این تجزیه را مشخص کنید.

■ مسئله یازدهم: دو ذره در حالت کاملاً درهم تنیده‌ی $|\phi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)$ هستند. ذره اول دست آلیس و ذره دوم دست باب است. آلیس و باب ذرات خود را در راستاهای $\hat{m}$ و $\hat{n}$ اندازه می گیرند.

الف: احتمال اینکه هردو نتیجه‌ی $+1$ بدست آورند، یعنی $P(+1,+1)$ چقدراست. $P(+1,-1)$ $P(-1,-1)$ و $P(-1,+1)$ را محاسبه کنید.

ب: مقدار متوسط $\langle \hat{S}^1_m \hat{S}^2_n \rangle$ را حساب کنید.

■ مسئله دوازدهم: این گزاره را نقد کنید و با یک مثال ساده نشان دهید که همواره درست نیست: هر ماتریسی مثل $A$ که ویژه مقدارهایش مثبت یا صفر باشند حتما در شرط زیر صدق می کند:

$$\langle v|A|v\rangle \geq 0, \qquad \forall v. \tag{۱۷۵}$$

ماتریس $A$ چه شرط اضافه ای باید داشته باشد تا این گزاره برایش درست باشد.

■ مسئله سیزدهم: یک ذره اسپین ۱/۲ را در نظر بگیرید. ویژه بردارهای عملگرهای پاوولی را به ترتیب زیر می نویسیم:

$$|x\pm\rangle, \qquad |y\pm\rangle, \qquad |z\pm\rangle. \tag{۱۷۶}$$

نشان دهید که ویژه بردارهای مربوط به عملگرهای مختلف در روابط زیر صدق می کنند:

$$|\langle x\pm|y\pm\rangle|^2 = |\langle x\pm|z\pm\rangle|^2 = |\langle y\pm|z\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \tag{۱۷۷}$$

به این ترتیب سه پایه مختلف برای فضای $C^2$ یافته ایم که اندازه ضرب داخلی هر برداری از یک پایه نسبت به یک بردار از پایه دیگر مقدار مساوی دارد. به طور کلی اگر برای یک فضای برداری $C^d$ دو پایه به صورت زیر پیدا کنیم

$$\mathcal{B} = \{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \cdots |\alpha_d\rangle\}, \qquad \mathcal{B}' = \{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \cdots |\beta_d\rangle\}, \tag{۱۷۸}$$

که در آن شرط زیر برقرار باشد

$$|\langle\alpha_i|\beta_j\rangle|^2 = c, \tag{۱۷۹}$$

که در آن $c$ یک ثابت است می گوییم این دو پایه نسبت به هم متوازن هستند [۲۲] .

■ مسئله چهاردهم: در فضای $C^3$ عملگرهای $X, Z, XZ, XZ^2$ را در نظر بگیرید. ویژه بردارهای مربوط به هرکدام از این عملگرها را حساب کنید. نشان دهید که چهارپایه ای که پیدا می کنید همگی نسبت به هم متوازن هستند.

■ مسئله پانزدهم: حالت آمیخته زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}|\phi_+\rangle\langle\phi_+| + \frac{1}{2}|\phi_-\rangle\langle\phi_-|, \tag{۱۸۰}$$

که در آن $|\phi_\pm\rangle$ حالت های بل هستند. در نگاه اول این حالت به صورت ترکیب محدبی از دو حالت درهم تنیده نوشته شده است. نشان دهید که این حالت را به صورت ترکیب محدبی از دو حالت ضربی نیز می توان نوشت.

[۲۲] Mutually Unbiased Bases (MUB)

■ مسئله شانزدهم: فرض کنید که حالت اولیه یک نوسانگر هارمونیک با هامیلتونی $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ یک حالت همدوس است، یعنی $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$.

نشان دهید که در هر زمان دیگر نیز حالت این ذره یک حالت همدوس است. این حالت را محاسبه کنید. هم چنین مقادیر کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle x(t)\rangle, \qquad \langle p(t)\rangle. \tag{181}$$

■ مسئله هفدهم: دو ذره در نظر بگیرید که در لحظه صفر هر دو در حالت همدوس هستند، یعنی:

$$|\psi(0)\rangle = |z\rangle|w\rangle. \tag{182}$$

این دو ذره تحت هامیلتونی زیر هستند:

$$H = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) + \lambda(a^\dagger b + ab^\dagger)$$

که در آن $a, \quad a^\dagger$ مربوط به ذره اول و $b, \quad b^\dagger$ مربوط به ذره دوم است. حالت ذره را در یک زمان دلخواه محاسبه کنید.

■ مسئله هجدهم: تابع مشخصه حالت پایه یک نوسانگر هارمونیک را حساب کنید و نشان دهید که این حالت یک حالت گاووسی است.

■ مسئله نوزدهم: حالت زیر را که موسوم به یک حالت گرمایی است در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta a^\dagger a}. \tag{183}$$

یک ـ پارامتر $Z$ را حساب کنید. سپس متوسط تعداد فوتون ها را حساب کنید.

دو ـ تابع مشخصه این حالت را حساب کنید و نشان دهید که این حالت نیز یک حالت گاووسی است.

سه ــ نشان دهید که یک حالت که در آن تعداد فوتون ها دقیقا مشخص است یک حالت گاووسی نیست.

■ مسئله بیستم: نشان دهید که یک حالت فشرده نیز یک حالت گاووسی است.

■ مسئله بیست و یکم: نشان دهید که اگر $A$ یک ماتریس مثبت باشد، آنگاه حتما هرمیتی است. ( راهنمایی : از این استفاده کنید که یک ماتریس دلخواه را حتما می توان به صورت $A = X + iY$ نوشت که در آن $X$ و $Y$ هرمیتی هستند. سپس از مثبت بودن $A$ استفاده کنید.
.

■ مسئله بیست و دوم: کمینه مقدار $tr(\rho^2)$ برای یک ماتریس چگالی در فضای $d$ بعدی چقدر است؟ گفته خود را ثابت کنید.

■ مسئله بیست و سوم: هرگاه $\rho$ یک ماتریس چگالی باشد، نشان دهید که همواره شرط زیر برقرار است:

$$\rho_{n,m}\rho_{m,n} \leq \rho_{n,n}\rho_{m,m}$$

که در آن $\rho_{n,m} = \langle n|\rho|m\rangle$. نشان دهید که نامساوی بالا به شکل تساوی برقرار می شود، اگر و فقط اگر حالت مورد نظر خالص باشد.

■ مسئله بیست و چهارم: برای یک حالت دلخواه $\rho$ کمیتِ $tr(\rho^2)$ اصطلاحا میزان خالص بودن آن حالت را نشان می دهد. فرض کنید که

$$\rho = \sum_n P_n \; \rho_n$$

که در آن $\rho_n$ ها حالت های عمود برهم هستند، یعنی $tr(\rho_n\rho_m) = \delta_{n,m}$.

نشان دهید که

$$tr(\rho^2) \leq \sum_n P_n \; tr(\rho_n^2).$$

رابطه بدست آمده را معنا کنید.

■ مسئله بیست و پنجم: می دانیم با تجزیه اشمیت یک حالت دلخواه $d$ بعدی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi_i\rangle. \tag{۱۸۴}$$

نخست نشان دهید که همه پارامترهای $a_i$ را می توان حقیقی و مثبت انتخاب کرد. یکی از معیارها برای میزان درهم تنیدگی این حالت، عدد اشمیت است. این عدد به صورت زیر تعریف می شود:

$$S := \frac{1}{\sum_i a_i^4}. \tag{۱۸۵}$$

مقدار کمینه و بیشینه عدد اشمیت را تعیین کنید و بگویید که این مقدارها برای کدام حالت ها حاصل می شوند.

■ مسئله بیست و ششم: حاصل ضرب هادامارد دو ماتریس هم بعد به صورت زیر تعریف می شود:

$$(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}. \tag{۱۸۶}$$

نشان دهید که

$$(A \otimes B) \circ (C \otimes D) = (A \circ C) \otimes (B \circ D). \tag{۱۸۷}$$

■ مسئله بیست و هفتم: یک ماتریس مربعی با بعد ۴ در نظر بگیرید که به شکل زیر نوشته می شود:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{۱۸۸}$$

دو عملگر یکانی $V_1 = I \otimes U$ و $V_2 = U \otimes I$ را در نظر بگیرید و ماتریس های $V_1GV_1^\dagger$ و $V_2GV_2^\dagger$ را حساب کنید:

■ مسئله بیست و هشتم: $\rho$ یک ماتریس چگالی است و $A$ و $B$ ماتریس هایی با همان ابعاد هستند. نشان دهید که

$$|Tr(\rho AB)|^2 \leq Tr(\rho AA^\dagger)Tr(\rho BB^\dagger). \tag{۱۸۹}$$

■ مسئله بیست و نهم: اگر مقادیر منفرد یک ماتریس مثل $A$ را با $sv(A)$ نشان دهیم ثابت کنید که:

$$\{sv(A\otimes B)\} = sv(A)\times sv(B). \tag{۱۹۰}$$

■ مسئله سی ام: ثابت کنید که تجزیه قطبی یک ماتریس وارون پذیر یکتاست.

■ مسئله سی و یکم: یک ماتریس مربعی مثل $A$ در نظر بگیرید و یک جایگشت از سطرها یا ستون های آن انجام دهید. آیا مقادیر ویژه آن تغییر می کند؟ مقادیر منفرد آن چطور؟

■ مسئله سی و دوم: مقادیر منفرد یک ماتریس هرمیتی، یکانی و نرمال چه هستند و چه ویژگی ای دارند؟

■ مسئله سی و سوم: معادله مشخصه یک ماتریس مربعی مثل $A$ عبارت است از:

$$det(\lambda I - A) = \lambda^N - s_1\lambda^{N-1} + s_2\lambda^{N-2} - \cdots + (-1)^N s_N = 0, \tag{۱۹۱}$$

که در آن

$$s_1 = \sum_i \lambda_i, \qquad s_2 = \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j, \qquad s_3 = \sum_{i<j<k}\lambda_i\lambda_j\lambda_k, \cdots. \tag{۱۹۲}$$

الف: برای یک ماتریس با بعد چهار، $s_i$ ها را بر حسب رد توان های ماتریس $A$ بنویسید.

ب: نشان داده شده است که یک ماتریس مثل $A$ مثبت است هرگاه تمام $s_i$ ها مثبت باشند. با توجه به این قضیه تحقیق کنید که آیا ماتریس های زیر مثبت اند یا نه؟

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{۱۹۳}$$

■ مسئله سی و چهارم: تمرین: ماتریس دو کیوبیتی زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + \sum_{i=1}^{3} t_i\sigma_i\otimes\sigma_i). \tag{۱۹۴}$$

الف: محدوده پارامترهای $t_i$ را طوری تعیین کنید که ماتریس فوق یک ماتریس چگالی باشد.

ب: از نظر هندسی این محدوده چه شکلی دارد؟

ج: نشان دهید که این حالت از مخلوط حالت های بل به شکل زیر به دست می آید:

$$\rho = \sum_{i=1}^{4} p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \tag{۱۹۵}$$

که در آن $|\phi_i\rangle$ حالت های چهارگانه بل هستند. رابطه $p_i$ ها و $t_i$ را بدست آورید.

## ۱۳ قدردانی

این درسنامه را آقای حسین محمدی دانشجوی دانشکده فیزیک در آبان ماه ۱۴۰۱ به دقت خوانده و اشکالات متعدد آن را به من یادآوری کردند. برای این لطف بزرگ از ایشان تشکر می کنم.