الگوریتم های ساده کوانتومی

وحید کریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۲۰ اسفند ۱۴۰۱

۱ مقدمه

کامپیوتر کوانتومی چیست؟ چگونه می توان از مکانیک کوانتومی برای محاسبه استفاده کرد؟ آیا یک کامپیوتر کوانتومی قدرتی فراتر از کامپیوترهای کلا سیک دارد؟ اگر چنین است، کدام خصلت های مکانیک کوانتومی این توانایی را بوجود می آورند؟ هدف ما در این درس فراهم آوردن پاسخ هایی جزئی برای این سوال هاست. نخست به سوال اول می پردازیم. می دانیم که در کامپیوترهای کلاسیک هرنوع داده‌ای در بیت های کلاسیک ذخیره می شود. یک بیت کلاسیک صرف نظر از نوع سخت افزاری که برای آن به کار رفته است، یک سیستم فیزیکی است که می تواند در دو حالتِ 0 یا 1 قرار گیرد. از اصطلاح حافظه کلاسیک [۱] برای مجموعه‌ای از بیت ها که می تواند داده های گسترده تری را در خود ذخیره کند. این که حافظه معمولاً به صورت دسته های هشت تایی به نام بایت یا بزرگتر از آن منظم شده است و یا این که نوع آن چگونه‌است (حافظه کوتاه مدت $(RandomAccessMemory(RAM)$ یا دائمی) فعلاً مورد توجه ما نیست. هرنوع پردازشی در نهایت به این معناست که ما بتوانیم توابع دلخواهی را برای داده‌هایی که در این حافظه‌ها ذخیره شده‌اند محاسبه کنیم. در درس گذشته دیدیم که چگونه می توان با استفاده از مدارهای منطقی کلاسیک، چه از نوع برگشت پذیر چه از نوع بازگشت ناپذیرآن، داده‌هایی را که دراین حافظه‌ها ذخیره می شود پردازش کرد.

[۱] Classical Register

مفهوم مرکزی در کامپیوتر کوانتومی بیت کوانتومی یا کیوبیت [۲] است. یک کیوبیت به یک سیستم کوانتومی گفته می شود که فضای هیلبرت آن دو بعدی است. این فضای هیلبرت را با C^2 نشان می دهیم.

$$C^2 := \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta \end{pmatrix}, \quad | \quad \alpha,\ \beta \in C \}. \tag{۱}$$

معمول است که بردارهای پایه‌ی این فضا را با $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$ و $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$ نشان می دهند. یک کیوبیت بر خلاف بیت کلاسیک می تواند در ترکیبی از حالت های پایه فوق قرارگیرد. حالت یک کیوبیت با برداری در این فضای هیلبرت نشان داده می شود:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \tag{۲}$$

یک حافظه کوانتومیِ n کیوبیتی [۳] عبارت است از مجموعه‌ای متشکل از n کیوبیت. فضای هیلبرت این حافظه عبارت است از $(C^2)^{\otimes n}$:

$$(C^2)^{\otimes n} = \{ \sum_{s_0,s_1,\cdots s_{n-1} \in \{0,1\}} \alpha_{s_0,s_1,\cdots s_{n-1}} |s_0, s_1, \cdots s_{n-1}\rangle \}, \tag{۳}$$

و بعدِ آن برابر است با 2^n. دقت کنید که این حافظه می بایست چنان باشد که تمام بردارهای فضای هیلبرت آن قابل دسترسی باشند. بنابراین اگر دو کیوبیت را تنها کنارهم بگذاریم به این معنی نیست که یک حافظه دو کیوبیتی ساخته‌ایم. زیرا بردارهای فضای هیلبرت دو کیوبیت جداگانه به صورت زیر هستند:

$$|\phi\rangle \otimes |\phi'\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle), \tag{۴}$$

یعنی به صورت ضرب تانسوری دو بردار از فضاهای هرکدام از کیوبیت ها نوشته می شوند و حال آنکه در فضای هیلبرتِ دو کیوبیت یعنی $(C^2)^{\otimes 2}$ بردارهایی وجود دارند که به صورت فوق قابل نوشتن نیستند، مثل بردارِ $|\phi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)$. این نوع بردارها را اصطلاحاً بردارهای درهم تنیده می نامیم. برای آنکه یک بردار کلی به صورتِ

$$a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \tag{۵}$$

[۲] Qubit

[۳] n-quibt Quantum Register

به صورت حاصل ضرب تانسوری دو بردار نوشته شود می بایست شرط $ad - bc = 0$ برقرار شود. بنابراین بردارهایی که به صورت ضرب تانسوری هستند مجموعه‌ای با اندازه صفر را در فضای هیلبرت دو کیوبیت تشکیل می دهند.

توازی کوانتومی: اولین تفاوت مهم کامپیوترکوانتومی با کامپیوتر کلاسیک این است که یک حافظه کوانتومی می تواند در آن واحد در تمام حالت های بالقوه خود قرار بگیرد. این خصلت ناشی از برهم نهی حالت های کوانتومی است و اصطلاحاً توازی کوانتومی [۴] خوانده می شود. هرگاه هر حالت $|s_0, s_1, \cdots s_{n-1}\rangle$ را برای کد کردن عددِ دوتایی $s = (s_0, s_1, \cdots s_n)$ به کار ببریم حالتی مثلِ

$$|\phi\rangle = \sum_{s=0}^{2^n-1} \phi_s |s\rangle, \qquad (۶)$$

حالتِ کلی یک حافظه‌ی n بیتی است. بنابراین هرگاه حافظه را در حالتِ $|\phi\rangle$ قرار دهیم مثل این است که همزمان آن را در تمام حالت های $|s\rangle$ قرار داده‌ایم. البته واضح است که هرگاه حافظه را در پایه‌ی محاسباتی یعنی همان پایه 0 ها و 1 ها اندازه گیری کنیم تنها یکی از مقادیر s با احتمالِ $|\phi_s|^2$ بدست خواهند آمد. بنابراین توازی کوانتومی اگر چه یک خاصیت مهم حافظه است ولی این خاصیت را می بایست با ظرافت مورد بهره برداری قرار داد.

گیت کوانتومی: اگر اطلاعات را در کیوبیت ها یعنی حالت های کوانتومی ذخیره کنیم، به ناچار پردازش اطلاعات می بایست یا با عملگرهای یکانی که تحول را نشان می دهند و یا با اندازه گیری ها انجام بگیرند. معمولا اصطلاح گیت کوانتومی برای عملگر یکانی بکار برده می شود. گیت کوانتومی هرگاه روی یک کیوبیت اثر کند آن را گیت تک کیوبیتی [۵] و هرگاه روی n تا کیوبیت اثر کند، گیتِ n کیوبیتی [۶] خوانده می شود. در درس های آینده راجع به گیت های چند کیوبیتی و طرز ساختن آنها به طور کلی به تفصیل بحث خواهیم کرد.

آلگوریتم کوانتومی: آلگوریتم کوانتومی در ساده ترین شکل آن به مجموعه‌ای از گیت های کوانتومی متوالی گفته می شود که روی یک حالت معین اولیه اثر می کنند و چنان تنظیم شده‌اند که حالت نهایی چنان باشد که پس از اندازه گیری های سنجیده‌ای روی آن جواب یک مسئله معین را با احتمال بسیار خوب در بر داشته باشد.

هدف ما دراین درس این است که با چند آلگوریتم ساده کوانتومی آشنا شویم و ببینیم که چگونه کامپیوترهای کوانتومی و آلگوریتم های کوانتومی می توانند بعضی از مسائل را سریعتر از کامپیوترها و آلگوریتم های کلاسیک حل کنند.

---

[۴] Quantum Parralellism
[۵] One quibt gate
[۶] n-Qubit Gate

f_4		f_3		f_2		f_1	
۱	0	۱	0	۰	0	۰	0
۱	1	۰	1	۱	1	۰	1

جدول ۱: انواع توابع یک بیتی

۲ آلگوریتم کوانتومی برای مسئله دویچ

فرض کنید که جعبه سیاهی تابع f را به روی ورودی خود اعمال می کند. ما تنها می توانیم به این جعبه سیاه ورودی های مختلف بدهیم و خروجی های آن را ثبت کنیم. به این کار فراخوانی تابع می گویند. در اصطلاح علم کامپیوتر به چنین جعبه سیاهی یک اوراکِل $(Oracle)$ می گویند. در ساده ترین مثال فرض کنید که این تابع یک تابع یک بیتی است، یعنی $f : B_1 \longrightarrow B_1$. می خواهیم ببنیم چند بار این تابع را فراخوانی کنیم، تا بتوانیم تابعِ f را تعیین کنیم. می دانیم که این تابع یکی از چهار تابعی است که در جدول (۲) نشان داده شده است.

براحتی معلوم می شود برای تعیین تابعِ f می بایست دوبار تابع فراخوانی شود، یک بار با ورودی 0 و بار دیگر با ورودی 1 تا بتوان نوع تابع را تشخیص داد. می توانیم مسئله را ساده تر کنیم و بگوییم که دقیقاً نوع تابع را نمی خواهیم بلکه می خواهیم بفهمیم که آیا این تابع یک تابع ثابت است و یا یک تابع متوازن؟ منظور از تابع ثابت، تابعی است که خروجی اش همواره یک مقدار ثابت و مستقل از ورودی است (مثل تابع f_1 یا f_4) و منظور از تابع متوازن، تابعی است که خروجی اش به ازای نیمی از ورودی ها برابر با 0 و به ازای نیمی دیگر برابر با 1 است (مثل تابع f_2 و f_3). حال می پرسیم که با چند بار فراخوانی این تابع می توان به ثابت بودن یا متوازن بودن آن پی برد. بازهم کمی فکر کردن نشان می دهد که دو بار می بایست تابع فراخوانده شود.

برای اولین بار دویچ نشان داد که این مسئله را می توان با آلگوریتم کوانتومی تنها با یک بار فراخوانی حل کرد. این کار دویچ سرآغاز پژوهش های جدی در باره آلگوریتم های کوانتومی بوده است. نکته اصلی که در این آلگوریتم و همه آلگوریتم های کوانتومی وجود دارد استفاده هوشمندانه از خاصیت برهم نهی حالت ها ست. هم چنین چیزی که در بسیاری از این آلگوریتم ها مشترک است استفاده از این نکته است که جعبه سیاه به دلیل آنکه تابع را به صورت برگشت پذیر محاسبه می کند دارای دو ورودی و دو خروجی به ترتیب زیر است:

$$|x, y\rangle \longrightarrow |x, y \oplus f(x)\rangle, \qquad (۷)$$

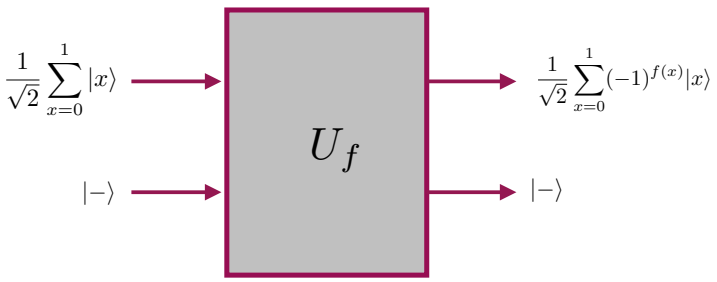
که در نتیجه آن

$$|x,-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|x,0\rangle - |x,1\rangle) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|x,f(x)\rangle - |x,f(x)+1\rangle) \equiv (-1)^{f(x)}|x\rangle|-\rangle. \quad (۸)$$

بنابراین وقتی که ورودی دوم را در حالت $|-\rangle$ نگه می داریم آنچه که در ورودی اول ظاهر می شود فازی است که توسط مقدار تابع $f(x)$ تعیین می شود بدون اینکه در ورودی دوم هیچ تغییری ایجاد شود. حال اگر ورودی اول را نیز در یک حالت برهم نهی یکنواخت تهیه کنیم آنگاه حالت خروجی نیز یک برهم نهی خواهد بود به این ترتیب که:

$$\sum_x |x,-\rangle \longrightarrow \sum_x (-1)^{f(x)}|x\rangle|-\rangle. \quad (۹)$$

توجه به این نکته کلید درک بسیاری از آلگوریتم هایی است که در پی می آید. به طور خلاصه می توان این عمل را در دیاگرام زیر نشان داد:



شکل ۱: استفاده از توازی کوانتومی در آلگوریتم های کوانتومی

این نکته را یادآوری می کنیم که برای تهیه یک برهم نهی یکنواخت از تمامی حالت ها می بایست از عملگرهای هادامارد استفاده کنیم.

■ تمرین: نشان دهید که

$$H^{\otimes n}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{y}=0}^{N-1} (-1)^{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} |\mathbf{y}\rangle, \qquad (۱۰)$$

که در آن $N = 2^n$ است.

آلگوریتم کوانتومی دویچ را با مدارَش توضیح می دهیم. از روی مدار شکل (**؟؟**) می توان فهمید که در مراحل متوالی بردار حالت ورودی چگونه تحول می یابد: داریم

$$|\Psi_0\rangle \quad = \quad |s\rangle \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle\right)$$

$$|\Psi_1\rangle \quad = \quad \frac{1}{2}\left(|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle - |0, \overline{f(0)}\rangle - |1, \overline{f(1)}\rangle\right) \qquad (۱۱)$$

حال دقت می کنیم که اگر تابعِ f ثابت باشد دراین صورت $f(0) = f(1) = f$ و $\overline{f(0)} = \overline{f(1)} = \overline{f}$. درنتیجه خواهیم داشت

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle - |\overline{f}\rangle) \qquad (۱۲)$$

و با اعمال یک گیت هادامارد که حالت کیوبیت اول را از $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ را به حالت $|0\rangle$ تبدیل می کند، حالت هر دو کیوبیت به صورت زیر در می آید:

$$|\Psi_3\rangle = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle - |\overline{f}\rangle). \qquad (۱۳)$$

اما اگر تابعِ f متوازن باشد دراین صورت $f(0) = \overline{f(1)} = f$ و $\overline{f(0)} = f(1) = \overline{f}$. درنتیجه خواهیم داشت

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle - |\overline{f}\rangle), \qquad (۱۴)$$

$$|\Psi_3\rangle = |1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle - |\overline{f}\rangle). \qquad (۱۵)$$

بنابراین وقتی که کیوبیت بالا را در مدار در (پایه محاسباتی) اندازه گیری کنیم، برای تابع ثابت مقدار 0 و برای تابع متوازن مقدارِ 1 را بدست می آوریم. به این ترتیب با یک بار خواندن تابع می توانیم به ثابت بودن و یا متوازن بودن تابع پی برد.

- تمرین: فرض کنید که به جای کیوبیت ها از کیوتریت ها استفاده می کنیم. کلی ترین حالت یک کیوتریت به صورت $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle$ است. مسئله دویچ را به این صورت تعمیم می دهیم. یک جعبه سیاه تابع زیر را محاسبه می کند:

$$f : \{0,\ 1,\ 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}. \tag{۱۶}$$

گفته شده است که این تابع یا متوازن است یا ثابت. در حالت کلاسیک چند بار می بایست تابع را فراخوانی کنیم تا بفهمیم که آیا تابع ثابت است یا متوازن؟

هرگاه بجای کیوبیت ها کیوتریت (سیستم های اسپینی سه حالته) در اختیار داشته باشید یک آلگوریتم کوانتومی طراحی کنید که بتواند این مسئله را موثر تر از مسئله کلاسیک حل کند.

راهنمایی: در این تمرین و در تمرین های بعدی از عملگر هادامارد با تعریف

$$H = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j} \omega^{ij} |i\rangle\langle j| \tag{۱۷}$$

استفاده کنید.

- تمرین: مسئله دویچ را به این صورت تعمیم می دهیم. یک جعبه سیاه تابع زیر را محاسبه می کند:

$$f : \{0,\ 1,\ 2, \cdots d-1\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots d-1\}. \tag{۱۸}$$

گفته شده است که این تابع یا متوازن است یا ثابت. در حالت کلاسیک چند بار می بایست تابع را فراخوانی کنیم تا بفهمیم که آیا تابع ثابت است یا متوازن؟

هرگاه بجای کیوبیت ها کیودیت (سیستم های اسپینی d حالته) در اختیار داشته باشید یک آلگوریتم کوانتومی طراحی کنید که بتواند این مسئله را موثر تر از مسئله کلاسیک حل کند.

۳ آلگوریتم کوانتومی برای مسئله دویچ ـ جوزا

مسئله دویچ جویزا [۷] تعمیمی است از مسئله دویچ. فرض کنید که تابع $f : B_n \longrightarrow B_1$ یک تابع n بیتی است و به ما گفته شده است که این تابع متوازن یا ثابت است یعنی مقادیر خروجی آن همه یا با هم مساوی هستند و یا نیمی از مقادیر خروجی‌اش صفر و نیمی صفر هستند. می دانیم که تعداد توابع ثابت برابر است با ۲ . اما تعداد توابع متوازن به صورت نمایی زیاد است و این تفاوت مهم این مسئله با مسئله دویچ است. برای آنکه تعداد توابع متوازن را بشماریم دقت می کنیم که تعداد وردودی های مختلف این تابع و درنتیجه خروجی های آن برابر است با 2^n. تعداد توابع متوازن برابر است با تعداد طرقی که می توان نیمی از 2^n خروجی را برابر با صفر و نیمی دیگر را برابر با 1 گرفت و این تعداد برابر است با $\frac{2^n!}{(2^{n-1}!)^2}$ و این عددی است که رابطه اش با n یک رابطه نمایی است. بنابراین تعداد کل توابع ممکن که می توانند ثابت یا متوازن باشند برابراست با $\frac{2^n!}{(2^{n-1}!)^2} + 2$. سوال این است که چند بار می بایست تابع را فرابخوانیم تا بتوانیم با اطمینان بگوییم که تابع ثابت است یا متوازن. اگر بخواهیم یک آلگوریتم تعینی (یعنی آلگوریتمی که با قطعیت پاسخ را مشخص کند) برای این مسئله به کار ببریم باید به ترتیب زیر عمل کنیم. اعداد n بیتیِ $(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0) =: x$ را یک به یک می دهیم (تابع را فرامی خوانیم تا $f(x)$ را محاسبه کند).

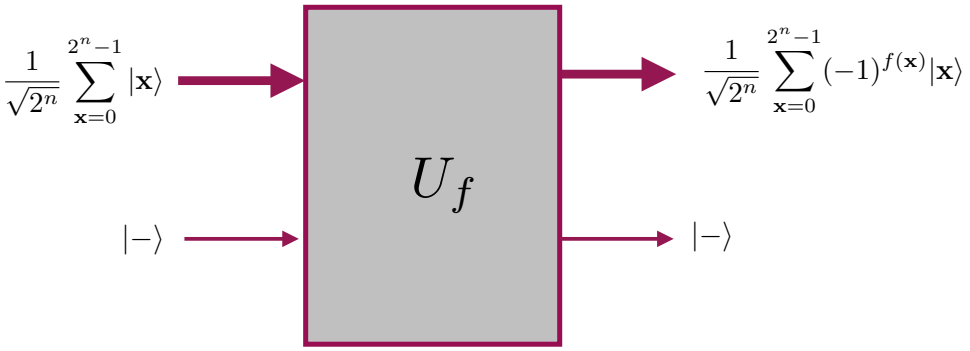
هرگاه به ازای دو مقدار مختلف x مقادیر متفاوتی برای $f(x)$ بدست بیاوریم آلگوریتم را متوقف کرده و حکم می کنیم که تابع متوازن است. اما اگر چنین نبود آلگوریتم را ادامه می دهیم تا نیمی از اعداد بعلاوه یک یعنی $2^{n-1} + 1$ عدد خوانده شوند. اگر برای این تعداد ورودی نیز تابع مقداریکسان داشته باشد حتماً تابع ثابت است.

حال نشان می دهیم که با استفاده از یک آلگوریتم کوانتومی می توان تنها با یک بار فراخوانی تابع، متوازن بودن یا ثابت بودن آن را با قطعیت تعیین کرد. برای این کار از مدارِ شکل (**؟؟**) استفاده می کنیم که دقیقاً همان مدارِ شکل (۱) است، با این تفاوت که در خط بالایی $|0\rangle$ نشان دهنده یک حالتِ صفر n تایی یعنی $|000\cdots0\rangle$ است و H نیز نشان دهنده یک عملگر هادامارد ِ n تایی است که روی n کیوبیت عمل می کند. به عبارت دیگر عمل هادامارد به صورت $H^{\otimes n}$ عمل می کند.

حال با توجه به این شکل، بردار حالت را در مراحل مختلف می نویسیم. داریم

$$|\Psi_0\rangle \quad = \quad |s\rangle \otimes |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x,0\rangle - |x,1\rangle$$

[۷] Deutsch-Josza



شکل ۲: مداری که برای آلگوریتم دویچ ـ جوزا به کار می رود.

$$|\Psi_1\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(|x,f(x)\rangle - |x,\overline{f(x)}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle\otimes(|0\rangle - |1\rangle). \qquad (۱۹)$$

بنابراین n کیوبیت اول در حالت $\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle$ هستند. حال اگر تابع f یک تابع ثابت باشد، آنگاه این حالت برابر است با $|x\rangle$ و عمل گیت های هادامارد در سمت راست مدار، روی این حالت حالت $|000\cdots0\rangle$ را تولید خواهد کرد. اما اگر تابع f یک تابع متوازن باشد، ثابت می کنیم که عمل گیت های هادامارد، حالتی را تولید خواهد کرد که اندازه گیری اش به هیچ وجه حالت $|000\cdots0\rangle$ را تولید نخواهد کرد. برای اینکه این نکته را بفهمیم باید ثابت کنیم که برای یک تابع متوازن

$$\langle 000\cdots0|H^{\otimes n}|\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle = 0. \qquad (۲۰)$$

برای اثبات این رابطه $H^{\otimes n}$ را روی حالت سمت چپ اثر می دهیم. درنتیجه سمت چپ عبارت فوق برابر می شود با

$$\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}(-1)^{f(x)}=0. \qquad (۲۱)$$

بنابراین ثابت کرده‌ایم که برای یک تابع ثابت، n کیوبیت بالا در مدارِ شکل (۲) ، در حالتِ $|000\cdots0\rangle$ قرار می گیرند و برای یک تابع متوازن این n کیوبیت در هر حالتی غیر از صفر قرار خواهند گرفت. بنابراین با یک بار اندازه گیری این حافظه‌ی n کیوبیتی می توانیم ثابت بودن یا متوازن بودن یک تابع را تشخیص دهیم.

- تمرین: نشان دهید که با استفاده از آلگوریتم های تصادفی می توان مسئله دویچ-جوزا را در زمان چندجمله ای حل کرد. برای این کار k بار تابع را فراخوانی کنید. اگر در همه موارد مقدار تابع یکسان بود اعلام کنید که تابع ثابت است و در غیر این صورت اعلام کنید که تابع متوازن است. برای آنکه خطای شما در این الگوریتم تصادفی به طور متوسط از ϵ کمتر باشد، مقدار کمینه ی k را پیدا کنید.

- تمرین: مسئله دویچ-جوزا را به این صورت تعمیم می دهیم. یک جعبه سیاه تابع زیر را محاسبه می کند:

$$f:\{0,\ 1,\ 2,\cdots d-1\}^{\times n}\longrightarrow\{0,1,2,\cdots d-1\}. \qquad (۲۲)$$

یعنی این تابع از n تا دیت (بجای بیت) به یک بیت تعریف شده است. گفته شده است که این تابع یا متوازن است یا ثابت. در حالت کلاسیک چند بار می بایست تابع را فراخوانی کنیم تا بفهمیم که آیا تابع ثابت است یا متوازن؟
هرگاه بجای کیوبیت ها کیودیت (سیستم های اسپینی d حالته) در اختیار داشته باشید یک آلگوریتم کوانتومی طراحی کنید که بتواند این مسئله را موثر تر از مسئله کلاسیک حل کند.
یک آلگوریتم تصادفی و کلاسیک با چندبار فراخوانی تابع می تواند این مسئله را حل کند به شرطی که احتمال پاسخ اشتباه از ϵ کمتر باشد؟

۴ آلگوریتم کوانتومی برای مسئله برنشتاین ـ وزیرانی

نخست مسئله برنشتاین ـ وزیرانی را تعریف می کنیم. فرض کنید که تابعِ $f : B_n \longrightarrow B_1$ داده شده است. این تابع به شکلِ $f(x) := a.x$ تعریف شده است که در آن a یک عددِ n بیتی است. ضرب این دو عدد به شکل زیر تعریف می شود:

$$a.x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k \quad mod \;\; 2. \tag{۲۳}$$

سوال این است که با چند بار فراخواندن تابع می توان مقدار a را تعیین کرد. با آلگوریتم های کلاسیک واضح است که می بایست n بار تابع را فراخوانی کرد تا a تعیین شود. نشان می دهیم که با یک آلگوریتم کوانتومی می توان تنها با یک بار فراخوانی مقدار a را مشخص کرد. برای این آلگوریتم باز هم از همان مدارِ شکل (۲) استفاده می کنیم. می دانیم که دراین مدار حالت زیر تولید می شود

.

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{a.x} |x\rangle.. \tag{۲۴}$$

دقت کنید که برای سادگی حالتِ کیوبیت پایینی یعنی $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ را ننوشته‌ایم، زیرا در بقیه بحث ما دخالتی ندارد. حال اثر عملگرهای هادامارد این حالت را تبدیل به حالت زیر می کند:

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{x.(a+y)} |x\rangle. \tag{۲۵}$$

اما می دانیم که

$$\sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{(a+y)\cdot x} = 2^n \delta_{a,y}. \tag{۲۶}$$

بنابراین خواهیم داشت $|\Psi_3\rangle = |a\rangle$، یعنی در حقیقت مقدارِ a تنها با یک بار اثر کردن تابع در n کیوبیتِ بالا نوشته خواهد شد.

■ تمرین: فرض کنید که به جای کیوبیت ها از کیودیت ها استفاده می کنیم. مسئله برنشتاین ـ وزیرانی را به صورت زیر تعمیم می دهیم. یک جعبه سیاه تابع زیر را محاسبه می کند:

$$f : \{0,\ 1,\ 2 \cdots d-1\}^{\times n} \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots d-1\}, \qquad f(x) := x \cdot a \equiv x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_n a_n \;\; mod\, d. \tag{۲۷}$$

در حالت کلاسیک چند بار می بایست تابع را فراخوانی کنیم تا مقدار a را بفهمیم.

یک آلگوریتم کوانتومی طراحی کنید تا بتواند با یک بار خواندن مقدارa را پیداکند.

---

۵ آلگوریتم کوانتومی برای مسئله سیمن

فرض کنید که تابع $f : B_n \longrightarrow B_m$ دارای این خاصیت است که یک و فقط یک $a \in B_n$ وجود دارد به قسمی که $f(x) = f(x \oplus a) \quad \forall x \in B_n$. ضمنا فرض ما این است که این تابع دقیقا دو به یک است، یعنی به ازای هر مقدار تابع دقیقا دو مقدار متغیر وجود دارد که آن مقدار تابع را بدست می دهد. مسئله سیمن $Simon$ عبارت است از یافتن مقدارِa با استفاده از فراخوانی های تابع. حال سوال این است که با چند بار خواندن تابع می توانیم مقدارِ a را تعیین کنیم. برای این مسئله می بایست از یک مدار کوانتومی متفاوت استفاده کنیم. این مدار در شکل (۴) نشان داده شده‌است.

مراحل مختلف این آلگوریتم را با نوشتن حالت هایی که در روی شکلِ مربوط به آن نوشته شده است بیان می کنیم. داریم

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x, 0\rangle \qquad (۲۸)$$

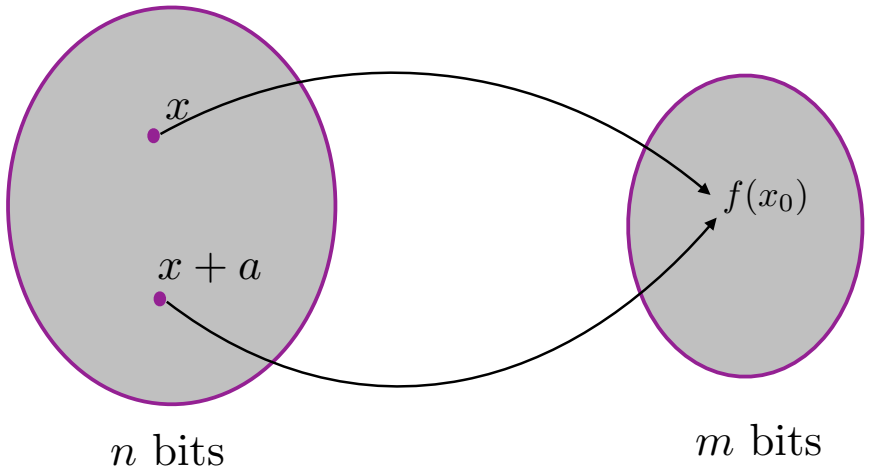
$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x, f(x)\rangle \qquad (۲۹)$$

مرحله بعدی آن است که حافظه دوم یعنی آن قسمتی که $f(x)$ را در بردارد اندازه گیری کنیم. فرض کنید که مقدار $f(x_0)$ بدست آید. دراین صورت حافظه اول به حالت زیر تقلیل پیدا می کند:

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_0\rangle + |x_0 \oplus a\rangle). \qquad (۳۰)$$

در مرحله بعدی روی این حالت گیت های هادامارد $H^{\otimes n}$ را اثر می دهیم. حالتی که بدست می آید برابر است با:

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{y=0}^{2^n-1} [(-1)^{x_0 \cdot a}] \, |y\rangle. \qquad (۳۱)$$



شکل ۳: مسئله سیمون. تابع دقیقا دو به یک است.

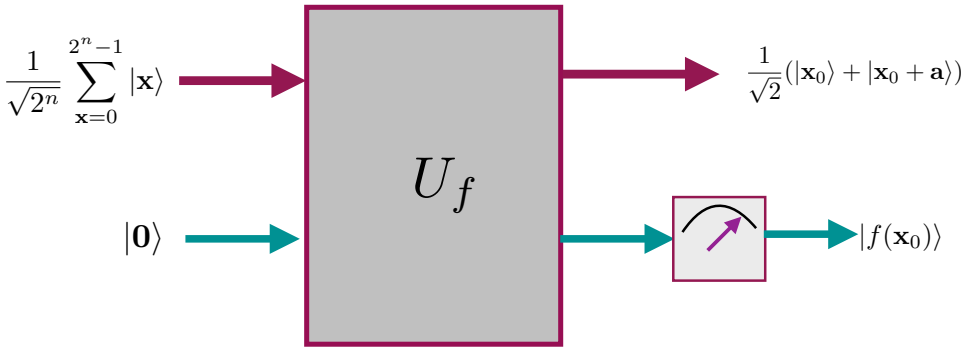
باکمی محاسبه خواننده می تواند نشان دهد که این حالت برابر است با:

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{a\cdot y=0} [(-1)^{x_0\cdot y}]\,|y\rangle. \qquad (۳۲)$$

این امر به این معناست که هرگاه ما حالت $|\Phi_2\rangle$ را اندازه بگیریم، عددی مثل y بدست می آید که در رابطه‌ی $a \cdot y = 0$ صدق می کند. با حدودِ n بار اندازه گیری می توانیم تعداد n معادله مستقل برای a پیدا کنیم که حل کردن آنها عدد a را بدست می دهد.

باید دقت کنیم که تا کنون هیچ کدام از آلگوریتم های معرفی شده کلاس حل پذیری مسئله را تغییر نداده‌اند. یعنی نتوانسته‌اند مسئله‌ای را از کلاس نمایی به کلاس چند جمله‌ای تبدیل کنند. اما این آلگوریتم ها مقدمه‌ای خواهند بود برای آلگوریتم بسیار مهم شُر [۸] که در درس های آینده با آن آشنا خواهیم شد. (در یکی از درس های آینده که به نظریه محاسبه می پردازیم کلاس پیچیدگی را به طور دقیق تعریف می کنیم، ولی به یک معنای خیلی کیفی می توان گفت که کلاس نمایی شامل مسائلی است که زمان حل آنها نسبت به سایز مسئله ها رابطه نمایی دارد. این نوع مسائل را مسائل

[۸] Shor Algorithm



شکل ۴: آلگوریتم سیمون

سخت می نامیم. کلاس چندجمله ای شامل مسائلی است که زمان حل آنها با سایز مسئله ها رابطه توانی دارد و بنابراین می توان آنها را مسائل آسان نامید). هم چنین درس بعدی را نظر به اهمیتی که مسئله جستجو در مجموعه های نامنظم دارد به آلگوریتم کوانتومی جستجو اختصاص خواهیم داد.

■ تمرین: فرض کنید که به جای کیوبیت ها از کیودیت ها استفاده می کنیم. مسئله سیمون را به صورت زیر تعمیم می دهیم. یک جعبه سیاه تابع زیر را محاسبه می کند:

$$f : \{0,\ 1,\ 2\cdots d-1\}^{\times n} \longrightarrow X \qquad (۳۳)$$

که در آن X یک مجموعه دلخواه است و این شرط اضافه که

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \quad if\ and\ only\ if \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a}\ \ mod\ \ d \qquad (۳۴)$$

که درآن منظور از طرف راست این است که

$$y_i = x_i + a_i \ \ mod \ \ d \ \ \forall \, i = 1, \cdots n. \qquad (۳۵)$$

در حالت کلاسیک چند بار می بایست تابع را فراخوانی کنیم تا مقدار **a** را بفهمیم.

یک آلگوریتم کوانتومی طراحی کنید تا بتواند با یک بار خواندن مقدار **a** را پیداکند.

---

۶ آلگوریتم های کوانتومی بیشتر

باید توجه کنیم که به جز آلگوریتم هایی که در بالا نام بردیم تعداد زیادی آلگوریتم های دیگر در سالهای اخیر ابداع شده اند که همگی نشان دهنده توان بالای کامپیوترهای کوانتومی هستند. به تدریج که پیش می رویم و شهود کوانتومی پژوهشگران تقویت می شود ممکن است مجموعه آلگوریتم های کوانتومی نیز روز به روز گسترده تر شود. در بخش بعدی تنها زیر مجموعه کوچکی از این مسئله ها را که بیان ساده ای دارند و برای آنها آلگوریتم های کوانتومی ابداع شده است معرفی می کنیم. خواننده برای یافتن آلگوریتم های بیشتر و هم چنین مراجع اولیه ای که این آلگوریتم ها در آن ها معرفی شده اند می تواند به وبگاه زیر رجوع کند:

$$http://math.nist.gov/quantum/zoo/,$$

$$Stephen\ Jordan\ Applied\ and\ Computational\ Mathematics\ Division,\ NIST$$

در این وبگاه مجموعه ۵۲ نوع آلگوریتم کوانتومی فهرست شده اند البته برای شرح هر آلگوریتم خواننده می بایست به مراجع درج شده در این وبگاه نگاه کند. تاکید می کنیم که بجز آلگوریتم جستجو و آلگوریتم تجزیه اعداد که در فصل های آینده آن ها را به تفصیل معرفی می کنیم در بقیه موارد خواننده علاقمند برای فهم این آلگوریتم ها می بایست به مقالات اصلی رجوع کند.

در مقایسه آلگوریتم ها معمولا از یک نماد گذاری استفاده می کنیم که در زیر این نماد گذاری را توضیح می دهیم. این نماد گذاری را معمولا به این معنا به کار می بریم که وابستگی دو تابع از متغیرهایشان از یک مرتبه است و می نویسیم $f = O(g)$. اما بهتر است که به طور دقیق تر این

نمادگذاری را توضیح دهیم.

■ یک نکته در باره نماد گذاری: دو تابع $f,\ g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ از اعداد صحیح $\mathcal{N}$ به اعداد صحیح را در نظر بگیرید. می گوییم که

$$f = O(g) \tag{۳۶}$$

هرگاه یک عدد صحیح مثبت مثل N و یک عدد مثبت حقیقی مثل c وجود داشته باشد به قسمی که

$$f(n) \leq c\, g(n), \qquad \forall\, n > N. \tag{۳۷}$$

هرگاه داشته باشیم

$$f = O(g), \qquad g = O(f)$$

می نویسیم

$$f \sim g.$$

■ تمرین: درستی روابط زیر را نشان دهید:

$$\begin{aligned} 2n^3 + 3n + 6 &= O(n^3), \\ n^3 &= O(n^4 + 6n) \\ n^3 &\sim 2n^3 + 6n \\ 2n^2 &= O(2^n). \end{aligned} \tag{۳۸}$$

■ تمرین: کدام یک از روابط زیر درست نیستند:

$$\begin{aligned} 2n^3 + 3n + \frac{1}{n} &= O(n^3), \\ n^5 + n^3 &= O(\frac{1}{10^6} n^4 + 6n) \\ n^3 &\sim 2n^3 + 6n \\ 2^n &= O(n^{0.00001\ n}). \end{aligned} \tag{۳۹}$$

بعد از این توضیح به ذکر چند تا از آلگوریتم های کوانتومی مهم می پردازیم. در هر مورد تنها نشان می دهیم که چگونه زمان اجرای این آلگوریتم ها در حالت کلاسیک و کوانتومی باهم تفاوت دارد. در مورد مفهوم دقیق تر زمان اجرای آلگوریتم ها در درس نظریه محاسبه به طور دقیق تر بحث خواهیم کرد.

۱.۶ جستجو در یک مجموعه نامنظم

- توصیف مسئله:

یک مجموعه N عضوی S داده شده است که در آن یکی از اعضا یک خاصیت معین دارد. این مجموعه هیچ نوع نظم خاصی ندارد. می خواهیم آن عضو خاص را پیدا کنیم. به زبان دیگر، یک تابع از آن مجموعه به مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ داده شده با این شرط که

$$f(x) = 0, \ \ \forall x \in S, \ except \ \ w \ \ for \ which \ f(w) = 1. \tag{۴۰}$$

می خواهیم w را پیدا کنیم. چندبار تابع را می بایست فراخوانی کنیم؟

- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(N) \sim (N) \tag{۴۱}$$

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(N) \sim (\sqrt{N}). \tag{۴۲}$$

- تمرین: برای جستجوی کلاسیک یکی از این دو روش را به کار می بریم.

روش اول: متغیرها را به طور کاملا تصادفی به تابع می دهیم تا مقدار تابع برابر با 1 شود و متغیر مورد نظر را پیدا کنیم.

روش دوم: متغیرها را یک به یک و به طور منظم به تابع می دهیم تا مقدار تابع برابر با یک شود و متغیر مورد نظر را پیدا کنیم.

در هر دو مورد متوسط تعداد دفعاتی که می بایست تابع را فراخوانی کنیم تا متغیر مورد نظر را پیدا کنیم به طور دقیق حساب کنید .

۲.۶ تجزیه یک عدد

- توصیف مسئله:

یک عدد n رقمی داده شده است. هدف یافتن یکی از عامل های این عدد است.

- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(n) \sim e^{1.9n^{\frac{1}{3}}(\log n)^{\frac{2}{3}}} \tag{۴۳}$$

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(n) \sim n^3 \tag{۴۴}$$

- تمرین: با استفاده از یک برنامه ساده مثل $Maple$ یا $Mathematica$ یک مجموعه از جفت اعداد اول (p, q) را در هم ضرب کرده و سپس حاصل را تجزیه کنید. سعی کنید که تعداد ارقام این دو عدد در گام های ۲ تایی از ۴ رقم تا ۲۰ رقم تغییر کند. زمان های لازم برای ضرب دو عدد و سپس تجزیه آنها را روی یک نمودار رسم کنید.
- تمرین: فرض کنید که روی یک کامپیوتر، تجریه یک عدد ۱۰۰ رقمی با آلگوریتم کلاسیک یک ماه طول می کشد. زمان لازم برای تجزیه اعداد ۲۰۰ رقمی، ۳۰۰ رقمی، و ۴۰۰ رقمی را روی همان کامپیوتر پیدا کنید.
  حال فرض کنید که روی یک کامپیوتر کوانتومی زمان لازم برای تجزیه آن عدد ۱۰۰ رقمی با آلگوریتم کوانتومی یک ماه طول بکشد. زمان لازم را برای تجزیه اعداد فوق را روی این کامپیوتر کوانتومی پیدا کنید.

۳.۶ لگاریتم گسسته

■ توصیف مسئله:

سه عدد صحیح $a,\ b,\ N$ داده شده با این قول که

$$b = a^s \mod(N). \tag{۴۵}$$

هدف پیدا کردن s است . باتوجه به این که

$$s = \log_a(b), \mod(N), \tag{۴۶}$$

این مسئله لگاریتم گسسته خوانده می شود.

■ زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

هیچ آلگوریتم کلاسیک خوبی برای این مسئله وجود ندارد. تنها می توان a را به توان های اعداد متوالی رساند تا این که نتیجه برابر با b شود. بنابراین

$$T_{cl}(N) \sim e^{O(\log N)} \tag{۴۷}$$

■ زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(N) \sim (\log N)^3 \tag{۴۸}$$

۴.۶ معادله پل

■ توصیف مسئله:

معادله پل [۹] به این صورت است:

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{۴۹}$$

[۹] Pell's equation

که در آن d یک عدد صحیح مثبت است که مربع کامل نیست. هدف پیدا کردن حلی از این معادله به صورت یک جفت عدد صحیح (x_1, y_1) است که $x_1 + \sqrt{d}y_1$ را کمینه کند.

- تمرین: سه تا از حل های معادله زیر را پیدا کنید

$$x^2 - 6y^2 = 1$$

و از بین آنها حلی را که $x + \sqrt{6}y$ را کمینه می کند پیدا کنید.

- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

هیچ آلگوریتم کلاسیکی که بتواند این مسئله را در زمان چندجمله ای حل کند در دست نیست. مسئله تجزیه اعداد را می توان به این مسئله مرتبط کرد. حل این مسئله برای شکستن کدهای رمزنگاری که مبتنی بر خواص منحنی های بیضوی هستند کاربرد دارد.

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

اگر d یک عدد n رقمی باشد، آنگاه

$$T_q(n) \sim Poly(n). \quad (۵۰)$$

۵.۶ تصدیق ضرب ماتریسی

- توصیف مسئله:

سه ماتریس $N \times N$ با درایه های حقیقی مثل A, B و C داده شده است. می خواهیم ببینیم که آیا $AB = C$ هست یا نه؟

- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(N) \sim N^2. \quad (۵۱)$$

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(N) \sim N^{\frac{5}{3}}. \quad (۵۲)$$

۶.۶ مسئله جمع زیرمجموعه ها

■ توصیف مسئله:

مجموعه ای از اعداد صحیح مثل $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ و یک عدد صحیح s در نظر بگیرید . می خواهیم ببینیم که آیا یک زیر مجموعه از این اعداد وجود دارد به قسمی که مجموع آنها برابر با s شود؟ این مسئله یک مسئله $NP - Complete$ است به قسمی که هر مسئله سخت دیگری در زمان چندجمله ای به آن تبدیل می شود.

■ زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

سخت ترین شرایط وقتی است که اعداد داخل مجموعه از مرتبه 2^n باشند. در این شرایط بهترین آلگوریتم کلاسیک زمان زیر را دارد:

$$T_{cl}(n) \sim 2^{0.291\ n} \tag{۵۳}$$

■ زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(n) \sim 2^{0.241\ n}. \tag{۵۴}$$

۷.۶ مسئله زیرگروه های پنهان آبلی

■ توصیف مسئله:

این مسئله تعمیمی از مسئله سیمون یا مسئله شر یا هر نوع مسئله $Period\ Finding$ است. فرض کنید که G یک گروه آبلی متناهی و H یک زیرگروه آن باشد. دو عضو g_1 و g_2 را هم ارز می گوییم و می نویسیم $g_2 \sim g_1$ هرگاه یک عضو از زیر گروه H مثل h وجود داشته باشد به نحوی که

$$g_2 = g_1\ h. \tag{۵۵}$$

رابطه ای که در بالا تعریف کرده ایم یک رابطه هم ارزی است و گروه G را افراز می کند. یک کلاس هم ارزی را برای یک عضوg با $[g]$ نشان می دهیم و مجموعه تمام کلاس های هم ارزی را با G/H نشان می دهیم. حال فرض کنید که یک تابع $f : G \longrightarrow K$ وجود دارد که در آن K

یک مجموعه دلخواه است. به ما گفته شده است که تابع f دارای این خاصیت است که

$$f(g_2) = f(g_1) \qquad if\ and\ only\ if\ g_2 \sim g_1. \tag{۵۶}$$

به عبارت دیگر مقدار تابع f روی دو عضو مساوی است اگر و فقط اگر آنها متعلق به یک کلاس هم ارزی باشند. یک کلاس هم ارزی را یک هم‌ـمجموعه یا $Coset$ می نامیم. مسئله این است که چندبار می بایست تابع f را فراخوانی کنیم تا بتوانیم زیر گروه H را بیابیم.

- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(G) \sim |G| \tag{۵۷}$$

که در آن $|G|$ تعداد اعضای گروه است.

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(G) \sim \log(|G|) \tag{۵۸}$$

- تمرین: نشان دهید که مسئله های دویچ، و سیمون حالت های خاصی از مسئله زیر گروه پنهان آبلی هستند.

۸.۶ مسئله زیرگروه های پنهانِ غیرآبلی

- توصیف مسئله: همان مسئله بالاست با این تفاوت که گروه G غیر آبلی است. در حالت کلی هنوز هیچ آلگوریتم کوانتومی کلی برای این مسئله یافته نشده است. تنها برای بعضی از گروه های خاص این مسئله قابل حل است.
- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(G) \sim |G|, \tag{۵۹}$$

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(G) \sim \log(|G|), \qquad only\ for\ some\ special\ groups. \tag{۶۰}$$

۹.۶ حل دستگاه معادلات خطی

■ توصیف مسئله:

یک ماتریس مربعی A که $N \times N$ است و یک بردار N بعدی b و معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b. \tag{۶۱}$$

در بسیاری از مسایل بیش از آنکه نیازمند دانستن خود x باشیم می خواهیم متوسط کمیت های مختلفی مثل M را روی این بردار به صورت

$$x^T M x \tag{۶۲}$$

حساب کنیم. روی ماتریس A نیز شرایط متعارفی وجود دارد به این معنا که : یک : ماتریس A خلوت [۱۰] است به این معنا که تعداد عناصر غیر صفر در هر سطر آن از مرتبه $O(\log N)$ است. و

دو: ویژه مقدارهای آن در شرط زیر صدق می کنند:

$$\frac{1}{\kappa} \leq \lambda \leq 1. \tag{۶۳}$$

برای آنکه این رابطه را بفهمیم ، دقت می کنیم که همواره می توان با تقسیم یک ماتریس بر بزرگترین ویژه مقدارش ماتریس جدیدی بدست آورد که بزرگترین ویژه مقدار آن برابر با 1 است و هیچ تغییری نیز در حل مسئله خطی بوجود نخواهد آمد. نسبت بزرگترین ویژه مقدار به کوچکترین ویژه مقدار یک ماتریس را با پارامتر κ نشان می دهیم. هر چه که این پارامتر بزرگتر باشد، معکوس کردن ماتریس دشوارتر می شود زیرا به این معناست که کوچکترین ویژه مقدار به صفر نزدیک تر شده و در نتیجه ماتریس به یک ماتریس وارون ناپذیر نزدیک تر می شود. به همین دلیل است که در همه آلگوریتم ها علاوه بر بعد ماتریس، این پارامتر نیز اهمیت دارد.

■ زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(N) \sim \sqrt{N\kappa} \tag{۶۴}$$

[۱۰] Sparse

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(N) \sim \sqrt{(\log N)\kappa}. \tag{۶۵}$$

۱۰.۶ جابجایی ماتریس ها

- توصیف مسئله: تعداد K ماتریس از مجموعه

$$S = \{X_1, X_2, \cdots X_K\} \tag{۶۶}$$

در نظر بگیرید. این ماتریس ها $n \times n$ هستند. تابعی داریم که به ازای هر $i, j \in \{1, 2, \cdots n\}$ و هر $k \in \{1, 2, \cdots K\}$ عنصر زیر را حساب می کند:

$$F : (i, j, k) \longrightarrow (X_k)_{i,j}. \tag{۶۷}$$

سوال این است که چند بار می بایست این تابع فراخوانی شود تا بفهمیم آیا ماتریس های مجموعه S با هم جابجا می شوند یا نه؟

- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(n, K) \sim Kn^2 \tag{۶۸}$$

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(n, K) \sim K^{\frac{4}{5}} n^{\frac{9}{5}}. \tag{۶۹}$$

۱۱.۶ جابجایی گروه ها

- توصیف مسئله:

یک گروه G و مجموعه مولدهای آن به صورت

$$S = \{g_1,\ g_2,\ \cdots g_K\} \tag{۷۰}$$

داده شده است. معنای این حرف این است که با ضرب کردن این عناصر و وارون های آنها به تمام ترتیبات ممکن می توان تمام عناصر گروه را تولید کرد. یک تابع F داریم که عمل ضرب گروه را انجام می دهد به این معنا که :

$$F : (g, g') = gg'. \tag{۷۱}$$

حال سوال این است که چندبار می بایست تابع F را فراخوانی کنیم تا بتوانیم تشخیص دهید آیا گروه G آبلی هست یا نه؟ در نگاه اول به نظر می رسد که می بایست $2K^2$ بار این تابع را فراخوانی کرد . اما ظاهرا آلگوریتم های کلاسیک بهتری نیز وجود دارد.

- زمان لازم برای آلگوریتم کلاسیک:

$$T_{cl}(K) \sim K \tag{۷۲}$$

- زمان لازم برای آلگوریتم کوانتومی:

$$T_q(K) \sim K^{\frac{2}{3}}. \tag{۷۳}$$

---

۷ ضمیمه یک: مسئله زیرگروه های پنهان

[۱۱] برای فهم این بخش آشنایی مختصری با تعاریف اولیه نظریه گروه لازم است. این مسئله به شکل زیر تعریف می شود:

- **تعریف مسئله زیر گروه های پنهان:**

[۱۱] Hidden Subgroup Problem

فرض کنید که G یک گروه (در حالت کلی غیرآبلی) و H زیرگروهی از G و $f : G \longrightarrow C$ تابعی از آن گروه به سوی اعداد مختلط است. فرض این است که تابع f روی هم‌ـمجموعه های راست آن زیرگره مقدارش ثابت است. یعنی $f(g) = f(g')$ if $g = g'h$. می خواهیم با خواندن تابع f به مقدار معینی، مولدهای زیرگروه H را پیدا کنیم.

■ حل مسئله زیر گروه های پنهان برای گروه های آبلی:

نخست ترکیب یکنواختی از حالت هایی که هر کدام نشان دهنده یک عنصر گروه است ایجاد می کنیم:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |g\rangle \tag{۷۴}$$

که در آن $|G|$ تعداد اعضای گروه است. سپس تابع را فرا می خوانیم تا حالت زیر در خروجی ایجاد شود:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |g, f(g)\rangle \tag{۷۵}$$

سپس حافظه دوم را اندازه می گیریم تا مقداری مثلا $f(g_0)$ بدست اید. در این صورت حافظه اول به حالت زیر برافکنده می شود:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{h \in H} |g_0 h\rangle. \tag{۷۶}$$

حال روی این حالت یک تبدیل فوریه روی گروه G انجام می دهیم. تبدیل فوریه روی یک گروه G به صورت زیر انجام می شود:

$$|g\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sum_{\mu} Tr(D^{\mu}(g))|\mu\rangle. \tag{۷۷}$$

که در آن $D^{\mu}(g)$ ماتریسی است که g را در نمایش کاهش ناپذیر D^{μ} نمایش می دهد. تعداد نمایش های کاهش ناپذیر گروه هم که با K نمایش می دهیم برابر است با تعداد کلاس های تزویجی [۱۲] گروه. بنابراین حالت $|\phi\rangle$ به حالت زیر تبدیل می شود:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{h \in H} \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sum_{\mu} Tr(D^{\mu}(g_0 h))|\mu\rangle \tag{۷۸}$$

یم. زیرا برای این گروه ها آلگوریتم های کوانتومی وجود دارد و برای گروه های غیر آبلی هنوز آلگوریتم موثری نمی شناسیم. برای این گروه ها همه نمایش ها یک بعدی هستند. تعداد این نمایش ها نیز با بعد گروه برابر است یعنی

$$K = |G|$$

[۱۲] Conjugacy Class

.

هم چنین نوشتن Tr دیگر ضرورتی ندارد. از آنجا که $D^{\mu}(g_0)$ یک فاز کلی است، می توانیم مطمئن باشیم که هرگاه این حافظه را اندازه بگیریم احتمال بدست آوردن یک μ خاص برابر است با:

$$P(\mu) = \frac{1}{|H| \times |G|} |\sum_{h \in H} D^{\mu}(h)|^2|. \qquad (۷۹)$$

برای درک بقیه این مطلب خواننده می بایست ضمیمه این درس را به دقت مطالعه کند. پس از فهم دقیق ضمیمه خواننده می تواند به این جا برگردد و شرح این مسئله را دنبال کند. ما فرض می کنیم که خواننده این کار را کرده است. با خواندن ضمیمه می فهمیم که هر عضو این گروه آبلی به صورت زیر نوشته می شود:

$$h = a_1^{l_1} a_2^{l_2} \cdots a_K^{l_K} \qquad (۸۰)$$

که در آن a_i ها مولدهای این گروه و l_i ها مرتبه ی آنهاست. هم چنین می فهمیم که اندیس یک نمایش به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_K).$$

هم چنین در می یابیم که نمایش هر عضو به صورت زیر است:

$$D^{\boldsymbol{\mu}}(a_1^{l_1} a_2^{l_2} \cdots a_K^{l_K}) = \prod_{j=1}^{K} e^{\frac{2i\pi\mu_j l_j}{p_j^{\alpha_j}}} \qquad (۸۱)$$

بنابراین احتمال اندازه گیری $\boldsymbol{\mu}$ برابر می شود با:

$$P(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{|H| \times |G|} |\sum_{h \in H} D^{\mu}(h)|^2 = \frac{1}{|H| \times |G|} \Big| \sum_{l_1, l_2, \cdots l_K} \prod_{j=1}^{K} e^{\frac{2i\pi\mu_j l_j}{p_j^{\alpha_j}}} \Big|^2. \qquad (۸۲)$$

اما این جمع ها را می توان براحتی محاسبه کرد چرا که

$$\sum_{l_j=0}^{p_j^{\alpha_j}} e^{\frac{2i\pi\mu_j l_j}{p_j^{\alpha_j}}} = p_j^{\alpha_j} \delta(\frac{\mu_j l_j}{p_j^{\alpha_j}}, m_j), \qquad (۸۳)$$

که در آن m_j یک عدد صحیح است. اما معنای این محاسبه و نتیجه آن چیست؟ معنایش این است که هر وقت این حافظه را اندازه بگیریم، مقدارهایی از μ_j ها به دست می آید که در رابطه

$$\mu_j = \frac{p_j^{\alpha_j} m_j}{l_j}$$

برای یک عدد صحیح صدق می کنند. در واقع هر گاه اولین بیت را اندازه بگیریم، همواره چنین چیزهایی بدست می آید:

$$\frac{m_1}{l_1}p_1^{\alpha_1}, \quad \frac{m'_1}{l'_1}p_1^{\alpha_1}, \quad \frac{m"_1}{l"_1}p_1^{\alpha_1}, \quad \frac{m'"_1}{l'"_1}p_1^{\alpha_1}, \tag{۸۴}$$

آنچه که در این کسرها مشترک است همان $p_1^{\alpha_1}$ است که نهایتا پس از چندبار اندازه گیری قابل تعیین است. معنای این حرف این است که نهایتا به همه $p_j^{\alpha_j}$ ها و در نتیجه به ساختار زیر گروه H پی می بریم.

---

۸ ضمیمه دو : قضیه اساسی در باره گروه های آبلی

گروه دوره ای [۱۳] Z_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z_n = \{a^0, a^1, \cdots a^{p-1} \qquad a^k \times a^l = a^{k+l}, \quad a^n = a^0\}. \tag{۸۵}$$

عنصر a را مولد این گروه می نامیم و n را دوره تناوب این عنصر می خوانیم. می توانیم گروه هایی تصور کنیم مثل $Z_2, Z_3, Z_4 \cdots Z_6, Z_7, \cdots Z_{10}, \cdots$.
اما نکته این است که بعضی از این گروه ها باهم یکسان هستند. مثلا گروه Z_6 با گروه $Z_2 \times Z_3$ یکسان است. برای این کار کافی است توجه کنیم که گروه

$$Z_2 \times Z_3 = \{e, a, b, b^2, ab, ab^2\} \tag{۸۶}$$

توسط تنها یک عنصر یعنی ab^2 تولید می شود، یعنی

$$Z_2 \times Z_3 = \{(ab^2)^i, \ \ i = 0, 1, \cdots 5\} \equiv Z_6. \tag{۸۷}$$

■ **تمرین:** نشان دهید که

$$Z_{10} = Z_2 \times Z_5 \qquad Z_{12} = Z_3 \times Z_4.$$

■ **تمرین:** نشان دهید که گروه Z_4 با گروه $Z_2 \times Z_2$ همسان نیست.

[۱۳] Cyclic Group

در واقع می توان به طور کلی نشان داد که هرگاه p یک عدد اول باشد، آنگاه

$$Z_{p^\alpha} \neq Z_p^{\times\alpha}.$$

پس از این مقدمات آماده ایم که قضیه اساسی گروه های آبلی با مولدهای متناهی را [۱۴] بیان کنیم.

■ قضیه اساسی گروه های آبلی با مولدهای متناهی:

بنابراین قضیه هر گروه آبلی که تعداد مولدهایش متناهی باشد، حتما به صورت زیر است:

$$G = Z^n \times Z_{{p_1}^{\alpha_1}} \times Z_{{p_2}^{\alpha_2}} \times \cdots \times \times Z_{{p_m}^{\alpha_m}}. \qquad (۸۸)$$

اگر مرتبه گروه یعنی تعداد اعضای آن نیز متناهی باشد، آنگاه قسمت Z^n وجود نخواهد داشت. در این صورت تعداد اعضای این گروه برابر است با:

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}. \qquad (۸۹)$$

به عنوان مثال گروه های با اندازه های قید شده در زیر چنین هستند:

$$G_{20} = Z_4 \times Z_5 \quad G_{32} = G_4 \times G_8, \quad G_{36} = Z_4 \times Z_9 = Z_6 \times Z_6. \qquad (۹۰)$$

حال به نمایش های گروه Z_n می پردازیم. این گروه دارای n تا نمایش کاهش ناپذیر است که آنها را با برچسب μ مشخص می کنیم. تمامی این نمایش ها نیز یک بعدی هستند. در نمایش $\mu = 0, \cdots n-1$ ام، داریم: n تا نمایش کاهش ناپذیر دارد که به صورت زیر هستند:

$$D^\mu(a) := e^{\frac{2i\pi\mu}{n}} \qquad \mu = 0, 1, 2, \cdots n-1. \qquad (۹۱)$$

این حرف به این معناست که بقیه عناصر گروه نمایش هایی به صورت زیر دارند:

$$D^\mu(a^k) := e^{\frac{2i\pi\mu k}{n}} \qquad \mu = 0, 1, 2, \qquad (۹۲)$$

به این ترتیب گروهی مثل $Z_n \times Z_m$ نمایش هایش با دو اندیس مشخص می شوند که آنها را به صورت زیر می نویسیم. اگر a و b به ترتیب مولدهای Z_n و Z_m باشند، آنگاه نمایش هر عضوی مثل $a^k b^l$ عبارت است از:

$$D^{\mu\nu}(a^k b^l) = D^\mu(a^k) D^\nu(b^l) = e^{\frac{2i\pi\mu k}{n}} e^{\frac{2i\pi\mu l}{m}}. \qquad (۹۳)$$

[۱۴] Finitely Generated Abelian Group

برای یک عضو کلی از یک گروه آبلی با تعداد مولدهای محدود، رابطه فوق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$D^{\boldsymbol{\mu}}(a_1^{l_1}a_2^{l_2}\cdots a_K^{l_K}) = \prod_{j=1}^{K} e^{\frac{2i\pi\mu_j l_j}{p_j^{\alpha_j}}} \qquad (۹۴)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2 \cdots \mu_K)$$

برچسب نمایش است.

---

۹ قدردانی

این درسنامه را آقای حسین محمدی دانشجوی دانشکده فیزیک در آبان ماه ۱۴۰۱ به دقت خوانده و اشکالات متعدد آن را به من یادآوری کردند. برای این لطف بزرگ از ایشان تشکر می کنم.