خاستگاه های نظریه میدان کوانتومی

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۲۹ مهر ۱۳۹۶

۱ مقدمه

در این درس می خواهیم خاستگاه های متفاوت نظریه میدان کوانتومی را معرفی کنیم. از آنجا که این درس مقدمه ای بر نظریه میدان برای گروه وسیعی از دانشجویان با علایق پژوهشی متفاوت است معرفی این خاستگاه ها اهمیت دارد. یاد خواهیم گرفت که اگر چه به طور سنتی نظریه میدان بیش از دیگر رشته ها در فیزیک انرژی های بالا یعنی ذرات بنیادی و کیهانشناسی مطالعه شده است، اکنون در بسیاری دیگر از شاخه های دیگر فیزیک نظیر فیزیک ماده چگال و پدیده های بحرانی نیز مفاهیم و روش های نظریه میدان به کار گرفته می شوند.

۲ الکترودینامیک کوانتومی

از عمر نظریه میدان کوانتومی بیش از ۸۰ سال می گذرد. به یک معنا می توان تولد آن را تنها کمی دیر تر از مکانیک کوانتومی انگاشت. از همان ابتدا معلوم بود که فوتون که نقش کلیدی در گشودن پنجره های دنیای کوانتومی را به روی ما داشته است خود در چارچوب مکانیک کوانتومی شرودینگر قابل توصیف نیست؟ مثلا می توان پرسید که آیا فوتون را نیز مثل الکترون باید توصیف کرد؟ آیا فوتون یک ذره است؟ اگر چنین است تابع موج فوتون چیست؟ تابع موج الکترون از حل کردن معادله شرودینگر بدست می آید که خود جایگزین معادله دینامیک نیوتنی شده است. به عبارت دیگر معادله شرودینگر کوانتومی شده معادله حرکت نیوتن است. تابع موج فوتون از حل کردن چه معادله کوانتومی ای بدست می آید؟ آیا

این معادله کوانتومی شده معادلات ماکسول است؟ اگر چنین است شکل آن چیست؟ اگر فوتون یک ذره است آیامی توان برهم کنش یک اتم با نور را به صورت برهم کنش دو ذره در نظر گرفت و یک هامیلتونی برای این سیستم دو ذره ای نوشت که جذب یا گسیل فوتون را توسط اتم توصیف کند؟ در اتمی مثل هیدروژن فقط یک الکترون وجود دارد. اما همین الکترون با گذار از حالت های مختلف می تواند باعث گسیل فوتون های متعدد شود. پس به این ترتیب به نظر می رسد وقتی که گسیل یا جذب نور از اتم ها را در نظر می گیریم با یک دستگاه بس ذره ای سر و کار داریم که تعداد فوتون های آن می تواند هر مقدار دلخواهی از صفر تا بی نهایت باشد. و بالاخره اینکه چگونه می توان تصویر کوانتومی و ذره ای از نور را با تصویر کلاسیک و موجی ای که از آن داریم و در مقیاس های بالا قابل مشاهده است تطبیق دهیم؟

این ها و سوالاتی از این نوع باعث اولین تلاش ها برای تدوین یک نظریه کوانتومی برای میدان الکترومغناطیسی شدند. میدان کوانتومی الکترومغناطیسی یا همان الکترودینامیک کوانتومی [1] موفق ترین نمونه از یک میدان کوانتومی است یعنی میدانی (در اینجا الکترومغناطیس) که کوانتیده شده است. میدان کوانتومی از کوانتش یک میدان کلاسیک یعنی یک دستگاه با بی نهایت درجه آزادی پیوسته بدست می آید. فضای هیلبرت چنین دستگاهی حالت هایی دارد که خاصیت های ذره ای دارند. به چنین حالت هایی کوانتوم های میدان می گویند. فوتون نیز کوانتوم میدان الکترومغناطیس است. در چارچوب این نظریه اکنون می توانیم نه تنها به سوالات بالا جواب بدهیم بلکه هم چنین می توانیم بسیاری از کمیت های مربوط به برهم کنش الکترون و نور را با دقت بسیار زیاد یعنی با دقتی بیش از ۱۳ رقم اعشار محاسبه کنیم. می دانیم که یک دستگاه بس ذره ای با مختصات و تکانه های $\{q_i, p_i\}$ با تبدیل این متغیرهای دینامیکی به عملگرها کوانتیده می شود:

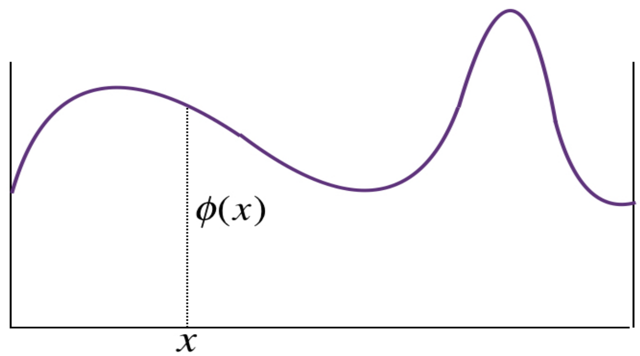
$$q_i \longrightarrow \hat{q}_i, \qquad p_i \longrightarrow \hat{p}_i, \qquad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{۱}$$

یک میدان کلاسیک نیز با مختصات و تکانه های $\{\phi(x), \pi(x)\}$ مشخص می شود. در این جا اندیس گسسته i جای خود را به اندیس پیوسته ای مثل x داده است. به عنوان مثال x می تواند پارامتر مشخص کننده یک نقطه از یک طناب کشسان باشد و $\phi(x), \pi(x)$ مختصه و تکانه آن قسمت از طناب کشسان باشند، شکل ؟؟ . چنین میدانی به صورت زیر کوانتیده می شود:

$$\phi(x) \longrightarrow \hat{\phi}(x), \qquad \pi(x) \longrightarrow \hat{\pi}(x), \qquad \{\hat{\phi}(x), \ , \hat{\pi}(y)\} = i\hbar\delta(x-y). \tag{۲}$$

در این رابطه $\hat{\phi}(x)$ و $\hat{\pi}(y)$ میدان های کوانتومی هستند یعنی به هر نقطه از فضا مثل x یک عملگر نسبت داده شده است و مجموعه همه این عملگرها در همه نقاط فضا پیوستاری از عملگرهاست که یک میدان کوانتومی خوانده می شوند. به یک نکته مهم باید دقت کنید که معمولا در

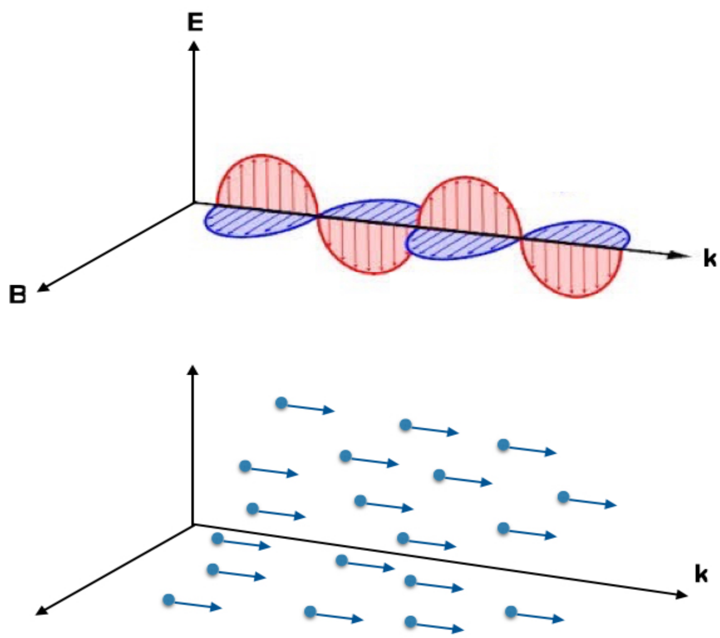
[1] Quantum Electrodynamics



شکل ۱: یک طناب کشسان یک سیستم دینامیکی متشکل از بی نهایت ذره است. در این سیستم x تنها یک پارامتر است و $\phi(x)$ و $\pi(x)$ یعنی ارتفاع هر نقطه ی x از طناب و سرعت یا تکانه حرکت آن متغیر های دینامیکی هستند.

اولین برخورد دانشجویان با نظریه میدان موجب اشتباه آنان می شود. این نکته این است که در این جا x دیگر یک عملگر نیست بلکه یک پارامتر معمولی است که نقاط مختلف فضا را از هم متمایز می کند. آنچه که عملگر است $\hat{\phi}$ است که در نقطه x تعریف شده یا نشسته است و به همین جهت با $\hat{\phi}(x)$ نشان داده می شود. به یک نکته مهم دیگر نیز باید توجه کنیم: درست مثل مکانیک کوانتومی در این جا هم می توان از دو دیدگاه به کوانتش نگاه کرد. یک دیدگاه یعنی تصویر شرودینگر که در آن عملگرها هیچگونه بستگی زمانی ندارند و همه بستگی زمانی در حالت هاست و دیدگاه دیگر یعنی دیدگاه هایزنبرگ که در آن حالت ها ثابت هستند و همه بستگی زمانی در عملگرهاست. در اولین مطالعه ای که از میدان های کوانتومی انجام می دهیم ما تصویر شرودینگر را به کار می بریم، بنابراین میدان $\hat{\phi}(x)$ فقط به مختصات فضا یعنی x بستگی دارد. ممکن است که خواننده در بسیاری از کتاب ها و مقالات ببیند که میدان به صورت $\hat{\phi}(x,t)$ نوشته شده است. دلیل اش این است که این میدان ها در تصویر هایزنبرگ نوشته شده اند. در آینده به این تصویر نیز می پردازیم.

پس از اصل موضوع کوانتش (۲) گام بعدی یافتن یا ساختن فضای هیلبرتی است که این روابط در آنجا نمایش داده شوند. بعد از برداشتن



شکل ۲: نور از یک طرف انتشار امواج الکتریکی و مغناطیسی است و از طرف دیگر بارانی از فوتون ها. نظریه میدان کوانتومی این دو تصویر را با هم تلفیق می کند.

این گام مشاهده می کنیم که در فضای هیلبرتی که ساخته ایم، حالت هایی وجود دارند که خصوصیات آنها مثل ذره است، ذارتی با خصوصیات معین مثل جرم، بار، اسپین و نظایر آن . این ها هستند که کوانتوم های میدان خوانده می شوند و در هر مورد اسم خاصی دارند و درکوانتش میدان الکترومغناطیس فوتون، درکوانتش نوسانات یک غشا یا شبکه جامد فونون [۲] و درکوانتش یک میدان اسپینی مگنون [۳] خوانده می شوند.
نکته مهم این است که چنین فضای هیلبرتی دیگر یک فضای یک ذره ای نیست بلکه فضایی است که در آن هر تعداد ذره ای می تواند حضور داشته باشد و این حالت ها می توانند به هم تبدیل شوند که معنایش این است که ذرات می توانند خلق یا نابود شوند. دراین ساختار جدید که در

[۲] Phonon
[۳] Magnon

آن میدان الکترومغناطیسی کوانتیده شده هر نوع برهم‌کنش اتم و تشعشع یا فوتون ها توصیف مناسبی به صورت شماتیک زیر پیدا می‌کند:

$$|Atom\rangle \otimes |Field(=Photons)\rangle \longrightarrow |Atom'\rangle \otimes |Field'(=Photons')\rangle \qquad (۳)$$

که در آن تحول توسط هامیلتونی میدان و اتم ایجاد شده است.

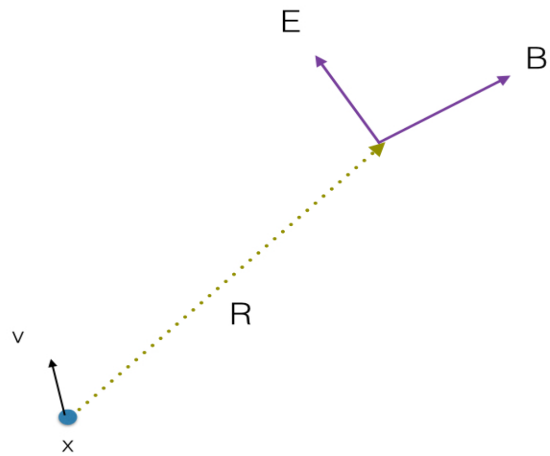
به عنوان مثال اگر یک اتم هیدروژن از لایه $2p$ به لایه $1s$ سقوط کرده و یک فوتون با تکانه $\mathbf{k}$ ساطع کرده باشد، این تحول به صورت زیر توصیف می شود:

$$|1p\rangle \otimes |0\rangle \longrightarrow |1s\rangle \otimes |1_{\mathbf{k}}\rangle\rangle \qquad (۴)$$

که در آن $|0\rangle$ نشان دهنده حالتی از میدان است که حاوی هیچ فوتونی نیست و به آن اصطلاحات خلاء می‌گوییم و $|1_{\mathbf{k}}\rangle$ حالتی از میدان است که دارای یک فوتون با تکانه $\mathbf{k}$ است. در اینجا اتم به صورت یک ذره کوانتومی تصویر شده که با یک میدان یا به عبارت دیگر با کوانتوم های آن میدان برهم‌کنش می‌کند. اما در آینده خواهیم دید که الکترون ها نیز کوانتم های یک میدان دیگرند. در چنین دیدگاهی می بایست از برهم‌کنش میدان ها با یکدیگر یا برهم‌کنش کوانتوم های آنها با هم سخن گفت . این موضوعی است که در درس های آینده به آن خواهیم پرداخت .

۳ چرا اصولا می بایست میدان ها را کوانتیده کرد؟

آیا توصیف درست تابش و ساختن یک نظریه که به طور سازگار تصویر ذره ای تابش را با الکترومغناطیس پیوند می دهد تنها انگیزش پرداختن به نظریه میدان کوانتومی است؟ اگر چنین است چرا باید به گرانش کوانتومی پرداخت که تاکنون شاهد تجربی ای برای وجود ذراتی شبیه فوتون برای آن پیدا نشده است؟ اصولا چرا باید هر میدانی را کوانتیده کرد؟ چه اشکال منطقی و ریاضی در ساختار فیزیک وجود خواهد داشت اگر از کوانتومی‌کردن میدان ها خواه میدان الکترومغناطیسی خواه میدان گرانشی صرف نظر کنیم ؟ آیا کوانتومی‌کردن میدان ها یک ضرورت است یا فقط یک نیاز زیباشناختی ناشی از میل ما به وحدت بخشیدن به ذرات و میدان ها؟ پاسخ همه این سوال ها این است که واقعا همزیستی میدان کلاسیک و ذرات کوانتومی از نظر منطقی دارای اشکال است. دلیل اش هم این است که ذرات چشمه میدان هستند و هرگاه که ذرات رفتار کوانتومی داشته باشند به ناگزیر میدان های ناشی از این ذرات نیز رفتار کوانتومی خواهند داشت. به طور دقیق تر ذره بارداری را در نظر بگیرید که در مکان x قرار دارد و سرعت v دارد. می دانیم که میدان الکتریکی و مغناطیسی ای که این ذره در نقطه ای از فضا مثل x' تولید می‌کند، هم به مکان ذره باردار و هم به سرعت آن بستگی دارد. بنابراین اگر مکان و سرعت این ذره بنا بر مکانیک کوانتومی همزمان و با هر دقتی وجود نداشته باشند، به این معناست که میدان های الکتریکی و مغناطیسی ناشی از این ذره نیز همزمان نمی توانند با هر دقتی وجود داشته باشند، شکل (۳).



شکل ۳: در فیزیک کلاسیک ذره بارداری که در نقطه x قرار دارد و سرعت v دارد، در هر نقطه از فضا میدان های الکتریکی و مغناطیسی E و B را تولید می کند. رابطه این میدان ها با سرعت و مکان ذره یک رابطه تعینی است. هرگاه که در مکانیک کوانتومی مکان و سرعت ذره دارای عدم تعین باشند، به ناگزیر میدان هایی که این ذره در نقاطه مختلف فضا ایجاد می کند نیز دارای عدم تعین خواهند بود. این وضعیت برای هر میدانی از جمله میدان گرانش نیز با توصیفی که در نسبیت عام از آن می شود وجود دارد.

این عدم دقت خود را در مقیاس های بزرگ یعنی مقیاس های زندگی روزمره و حتی مقیاس های میکرونی و کمی کوچکتر از آن نشان نمی دهد ولی در مقیاس های اتمی این عدم قطعیت کاملا مشخص است. معنای این حرف این است که در مقیاس های اتمی تنها می توانیم از احتمال این که میدان الکترومغناطیسی مقادیر معین اختیار کند سخن بگوییم. همین موضوع در مورد میدان گرانش نیز صادق است چرا که بنابر گرانش اینشتین، میدان گرانش یعنی متریکی که در یک نقطه از فضا ایجاد می شود به تانسور انرژی و تکانه در همسایگی آن نقطه از فضا بستگی دارد و هرگاه که این تانسور انرژی تکانه به طور دقیق معین نباشد، به معنای این است که میدان گرانش یعنی متریک فضا زمان نیز به طور دقیق معین نخواهد بود بلکه کمیتی خواهد بود که دائما افت و خیز می کند و تغییر می کند، به همین دلیل است که برخی در گفتگو از گرانش کوانتومی از کف فضا زمان [۴] سخن می گویند.

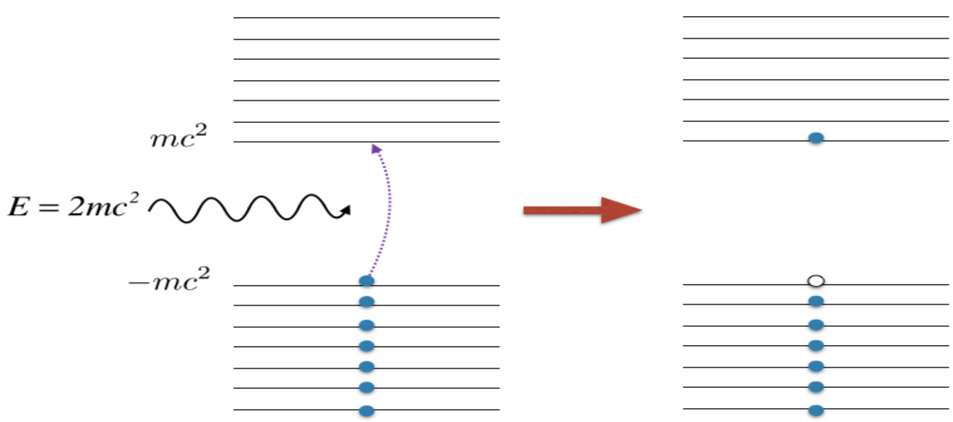
[۴] Space-Time Foam

به این ترتیب می بینیم که در یک ساختار منسجم و سازگار از فیزیک نه تنها ذرات بلکه میدان ها نیز باید کوانتیده شوند. در شکل نهایی خواهیم دید که ذرات مادی حتی الکترون ها و کوارک ها و نظایر آن چیزی نیستند جز کوانتوم های میدان های مخصوص به خود به همان شکل که فوتون کوانتای میدان الکترومغناطیسی است. به این ترتیب برهم کنش ذرات چیزی نیست جز برهم کنش میدان های کوانتومی .

۴ مکانیک کوانتومی نسبیتی

یکی دیگر از خاستگاه های نظریه میدان کوانتومی مکانیک کوانتومی نسبیتی است. به شکل فعلی مکانیک کوانتومی با نسبیت خاص ناسازگار است. این موضوع را به سادگی می توان فهمید چرا که در معادله شرودینگر زمان و مکان به دو گونه متفاوت وارد شده اند، یعنی زمان با مشتق اول و مکان با مشتقات مرتبه دوم در این معادله وجود دارند. در همان سالهای ابتدایی دو معادله کوانتومی نسبیتی برای ذره آزاد معرفی شدند. این دو معادله که در فصل های آینده به تفصیل شرح داده خواهند شد موسوم به معادله کلاین گوردون و معادله دیراک هستند. امروزه می دانیم که معادله کلاین گوردون برای توصیف ذرات بدون اسپین و معادله دیراک برای توصیف ذرات با اسپین $1/2$ به کار می روند. در اینجا ما توجه خود را معطوف به معادله دیراک می کنیم. در همان ابتدا معلوم شد که طیف انرژی این معادله برای ذره آزاد هم از بالا و هم از پایین بدون کران است. اگر برای سادگی و برای اینکه سطوح انرژی گسسته باشند ذره آزاد را در یک چاه پتانسیل بی نهایت عمیق در یک بعد قرار دهیم می توان شکل کیفی طیف انرژی این ذره را تقریبا مطابق شکل ۴ نشان داد. برای چنین ذره ای هیچ حالت پایه ای وجود ندارد و براحتی ذره می تواند به حالت های پایین و پایین تر سقوط کند و انرژی خود را مرحله به مرحاه به صورت بی نهایت فوتون آزاد کند. می توان روی چنین معادله ای خط کشید و آن را به عنوان یک معادله نادرست و غیرفیزیکی نادیده گرفت. اما گام شجاعانه دیراک این بود که از وجود حالت های با انرژی منفی تعبیری ارائه کرد که در عین حال منجر به یک پیش بینی ابطال پذیر یعنی وجود پادذرات شد. می توانیم همراه با او فرض کنیم که همه حالت های با انرژی منفی از الکترون ها پر شده اند ولی این الکترون های با انرژی منفی در دنیای ما قابل مشاهده نیستند. این الکترون ها تنها وقتی قابل مشاهده می شوند که به تراز های با انرژی مثبت بیایند. بنابراین حالت پایه الکترون حالتی است با انرژی $E = mc^2$ که نشان دهنده یک الکترون ساکن است و حالت های برانگیخته نیز حالت هایی هستند که در آن الکترون دارای یک تکانه مشخص و البته کوانتیزه است. هم چنین از آنجا که الکترون ها فرمیون هستند هیچ دو الکترونی یک لایه را اشغال نمی کنند. حالت پایه چنین سیستمی وقتی است که همه لایه های زیرین که آن را دریای دیراک [۵] می نامیم ، پر شده باشند. حال اگر یک فوتون با انرژی $2mc^2$ به چنین سیستمی بتابد می تواند یک الکترون را از بالاترین

[۵] Dirac Sea



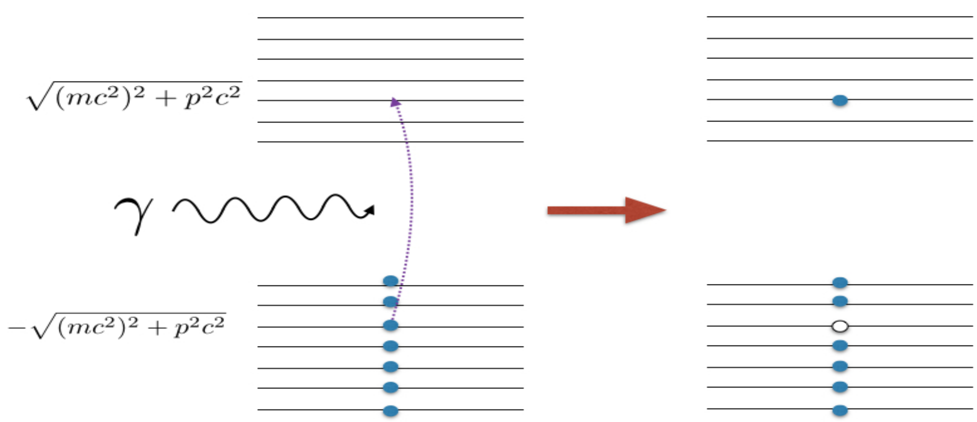
شکل ۴: تولید یک زوج الکترون – پوزیترون با کمترین انرژی توسط یک فوتون

سطح دریای دیراک کنده و آن را به پایین ترین سطح با انرژی مثبت و قابل مشاهده برساند، شکل ۴ .

جای خالی الکترون در دریای دیراک نشان دهنده ذره ای است با همان جرم ولی با بار مثبت که آن را پوزیترون می نامیم. جاهای خالی در دریای دیراک نیز ذرات قابل مشاهده هستند. به این ترتیب یک فوتون نابود شده و یک زوج الکترون – پوزیترون خلق شده است. فوتون های با انرژی بیشتر می توانند زوج ذره های پر انرژی تر خلق کنند، شکل ۴ و هم چنین زوج ذره های الکترون – پوزیترون می توانند یکدیگر را نابود کرده و تبدیل به فوتون های پرانرژی شوند، ۴ .

به این ترتیب مشاهده می کنیم که یک معادله نسبیتی برای الکترون خواه ناخواه شامل پادذره آن هم به نام پوزیترون و هم چنین خلق و فنای این زوج ذره و تبدیل آنها به فوتون نیز هست . علاوه بر آن این خلق و فنا الزاما منحصر به یک زوج نیست بلکه تعداد بیشتری جفت ذره می توانند از فوتون ها تولید شده یا این که با نابودی خود آن ها را خلق کنند، شکل ۴ .

بنابراین معادله نسبیتی برای الکترون منجر به پیدایش سیستمی شده است که در آن تعداد ذرات ثابت نیست. نتیجه آن است که اگر بخواهیم

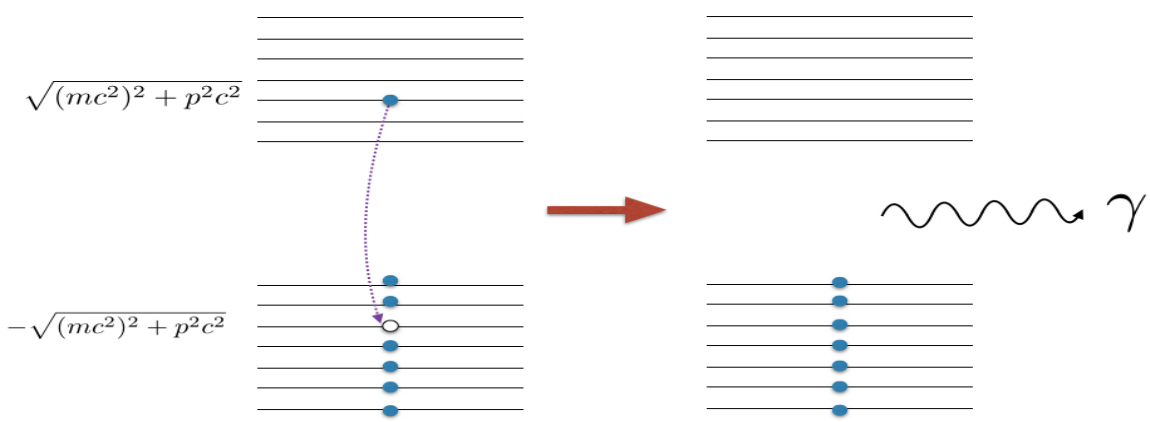


شکل ۵: تولید یک زوج الکترون – پوزیترون با انرژی جنبشی توسط یک فوتون

مکانیک کوانتومی را با نسبیت خاص سازگار کنیم می بایست یک صورت بندی جدید ارائه دهیم که نه تنها با تبدیلات لورنتز سازگار باشد بلکه فضای هیلبرت آن گنجایش تعداد دلخواهی از ذرات را داشته باشد. چنانکه خواهیم دید این چارچوب به طور طبیعی به نظریه میدان کوانتومی می رسد.

۵ فیزیک ماده چگال و میدان های کوانتومی غیر نسبیتی

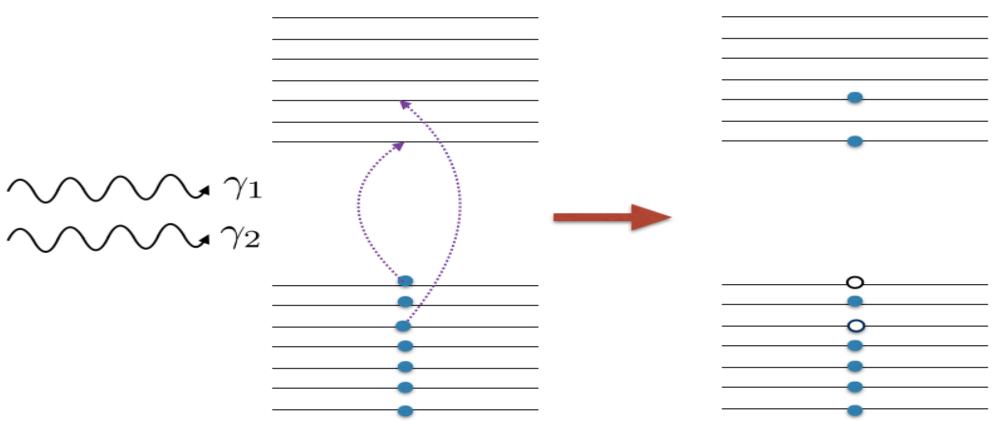
ممکن است فکر کنیم که تنها خاستگاه نظریه میدان کوانتومی، تلاش ما برای فهم فوتون و برهم کنش های آن یا مکانیک کوانتومی نسبیتی است چرا که در حد غیر نسبیتی ما با تعداد ثابتی از ذرات سر و کار داریم و چارچوب مکانیک کوانتومی استاندارد برای توصیف پدیده ها کافی است.



شکل ۶: نابودی یک زوج الکترون – پوزیترون و تولید یک فوتون

اما این تصور اشتباه است چراکه در حد غیر نسبیتی نیز ما با پدیده های تولید و نابودی ذرات سر وکار داریم. نوسانات شبکه یونی در یک جامد به بهترین وجه توسط حالت های برانگیخته این شبکه موسوم به فونون ها توصیف می شود. پراکندگی الکترون ها از این شبکه نیز بهترین توصیف خود را در برهم‌کنش الکترون ها و فونون ها می یابند. فونون ها می توانند خلق یا نابود شوند. به همان ترتیب‌که یک الکترون در حضور میدان الکترومغناطیسی با فوتون برهم‌کنش می‌کند، در یک ماده جامد و در حضور نوسانات شبکه یونی آن یک الکترون یا یک حفره نیز با کوانتاهای آن میدان نوسان‌کننده یعنی فونون ها برهم‌کنش می‌کند. همین طور جابجایی الکترون ها از زیر سطح فرمی به سطوح بالاتر به پیدا شدن یک حفره در لایه های پایین می انجامد. وقتی‌که در یک فلز یک الکترون انرژی‌گرفته و از باند ظرفیت به باند هدایت می رود در جای خالی اش یک حفره [۶] تولید می شود. حفره را می توان ذره ای در نظرگرفت‌که دارای همان خصوصیات الکترونی است با این تفاوت‌که بار مثب دارد. بنابراین واکنشی‌که صورت می‌گیرد درست مثل تولید یک زوج ذره است. وقتی هم‌که یک الکترون از باند هدایت به باند ظرفیت سقوط می‌کند

[۶] hole



شکل ۷: تولید دو زوج الکترون – پوزیترون با انرژی های متفاوت توسط دو فوتون

درست مثل این است که نابودی زوج رخ داده است. بنابراین حتی در سطح غیر نسبیتی نیز ذوج های ذره و پاد ذره تولید و نابود می شوند و تعداد آنها ثابت باقی نمی ماند. بنابر این از لحاظ تکنیکی برای توصیف سیستم های بس ذره ای حتی غیر نسبیتی نیز می بایست از روش های نظریه میدان استفاده کنیم. این رهیافت به نظریه میدان به طور طبیعی کاری به سازگاری با نسبیت و تبدیلات نسبیتی ندارد به همین دلیل نظریه میدان غیر نسبتی [۷] نامیده می شود و بیشتر از همه جا در فیزیک ماده چگال کاربرد دارد.

علاوه بر این ها حتی وقتی که با تعداد ثابتی از ذرات یکسان سر و کار داریم، بازهم روش های نظریه میدان کارآیی فوق العاده خود را نشان می دهند. دلیل اش این است که اگر بخواهیم رفتار کوانتومی یک سیستم از ذرات یکسان فرمیون یا بوزون را توصیف کنیم، می بایست تابع موج

[۷] Non-Relativistic Quantum Field Theory

این ذرات را یا کاملا پادمتقارن یا کاملا متقارن کنیم. به عنوان مثال تابع موج N تا الکترون به شکل زیر است:

$$\Psi^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma} (-1)^{sgn\sigma} \psi(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \cdots x_{\sigma N}) \qquad (۵)$$

که در آن σ نشان دهنده همه جایگشت ها و $sgn(\sigma)$ نشان دهنده درجه یک جایگشت است. واضح است که محاسبه خواص این سیستم با در نظرگرفتن چنین تابع موجی که دارای $N!$ جمله است بسیار دشوار است. دقت کنید که در شرایط واقعی N عددی از مرتبه عدد آووگادرو ست. به همین جهت برای توصیف ذرات یکسان می بایست از روش کاملا جدیدی استفاده کرد. این روش که روش کوانتش دوم [۸] نامیده می شود (بدون اینکه واقعا دوبار کوانتش هیچ معنای خاصی داشته باشد) منجر به صورت بندی ای برای مطالعه سیستم های ذرات یکسان می شود که چیزی نیست جز نظریه میدان کوانتومی غیر نسبیتی.

حتی وقتی که با ذرات کوانتومی جایگزیده سر و کار داریم مثلا وقتی که می خواهیم یک شبکه از اتم های فرومغناطیسی را مطالعه کنیم بازهم به نظریه میدان کوانتومی نیازمند می شویم. دلیل اش این است که وقتی چنین سیستمی مثلا یک شبکه اسپینی را از خیلی نزدیک مشاهده کنیم آن را به صورت یک شبکه گسسته از اتم ها می بینیم که در هرکدام از انها یک عملگر کوانتومی اسپین قرارگرفته و با همسایگانش برهم کنش می کند. هامیلتونی چنین سیستمی چیزی شبیه به عبارت زیر است:

$$H = J \sum_{n} \hat{S}_n \hat{S}_{n+1} \qquad (۶)$$

که در آن $\hat{S}_n$ عملگر اسپینی در نقطه n ام است. فاصله هر دو نقطه از این شبکه نیز برابر با a است که در نمونه های واقعی از مواد در حدود ۲ تا ۳ آنگستروم است. اما هرگاه مقیاس مشاهده ما که آن را با l نشان می دهیم خیلی بزرگتر از طول شبکه باشد مثلا $l >> 10 - 20a$ باشد، آنگاه عملاً نمی توانیم نقطه های شبکه را ببینیم و تنها می توانیم کمیت های متوسطی را ببینیم که حاصل جمع عملگرهای اسپینی در چندین نقطه است. در این مقیاس مشاهده دیگر نمی توانیم موقعیت تک تک اتم ها و اسپین آنها را معین کنیم بلکه می توانیم بگوییم که در هر نقطه x یک عملگر $\hat{S}(x)$ تعریف شده که در واقع متوسط اسپین های درون یک ناحیه است. به این ترتیب ما با یک میدان کوانتومی روبرو می شویم که در یک بعد تعریف شده است.

[۸] Second Quantization

۶ نظریه میدان آماری و پدیده های بحرانی

اصلی ترین کمیت در مکانیک آماری تابع پارش است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z = \int_C e^{-\beta H(C)} dC \tag{۷}$$

که در آن C نشان دهنده هیئت های یک سیستم و $H(C)$ نشان دهنده انرژی سیستم است وقتی که در هیئت C قرار دارد. هم چنین dC نشان دهنده یک اندازه مناسب برای انتگرال روی هیئت هاست. یک هیئت می تواند نشان دهنده موقعیت و سرعت مجموعه ای از ذرات باشد مثل یک گاز که در این صورت C مجموعه ای از کمیت های گسسته است. اما برای بعضی اوقات C نشان دهنده وضعیت یک پیوستار مثلا وضعیت یک تار یا غشای کشسان است. به طور مشخص تر فرض کنید که یک تارکشسان بین دو نقطه 0 و L بسته شده و ارتفاع تارکشسان در نقطه x با $\phi(x)$ نشان داده شود. انرژی تارکشسان می تواند به صورت یک تابعی از ϕ داده شود مثلا

$$H[\phi] = \int_0^L dx \mathcal{H}(\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x}). \tag{۸}$$

برای چنین سیستمی تابع پارش برابر است با:

$$Z = \int D\phi e^{-\beta \int_0^L dx \mathcal{H}(\phi(x), \frac{\partial \phi}{\partial x})} \tag{۹}$$

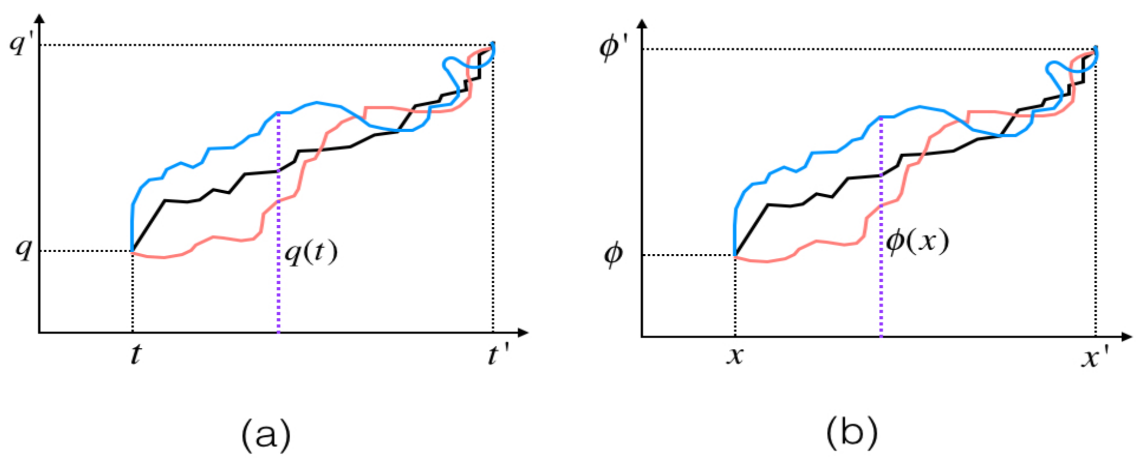
هم چنین C می تواند وضعیت قرارگرفتن یک پلیمر یا یک ماکرومولکول در فضای سه بعدی باشد و $H(C)$ نشان دهنده این باشد که آن ماکرومولکول با توجه به میزان خمش و پیچشی که دارد چه مقدار انرژی دارد. در مثالی دیگر C می تواند وضعیت یک غشای دوبعدی کشسان باشد. همه اینها نمونه هایی از وضعیت هایی است که با مکانیک آماری سیستم های پیوسته سر وکار داریم. سوال اینجاست که این کمیت های کلاسیکی چه ربطی به نظریه میدان کوانتومی دارند. پاسخ این سوال را در درس های آینده با کمی تفصیل خواهیم دید ولی به طور خلاصه این ارتباط ناشی از صورت بندی انتگرال مسیر برای مکانیک کوانتومی است. در واقع می دانیم که در صورت بندی انتگرال مسیر برای مکانیک کوانتومی دامنه گذار برای رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر به صورت زیر بیان می شود:

$$\langle q',\ t' \mid q,\ t\rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q, \frac{dq}{d\tau}) d\tau}. \tag{۱۰}$$

به عبارت دیگر دامنه عبور بالا به صورت یک انتگرال روی تمام مسیرهای قابل تصور نوشته می شود. چنانچه در آینده خواهیم دید، می توان طرف راست را به یک نوع تابع پارش برای یک سیستمِ مکانیک آماری تبدیل کرد. این تناظر به نظریه میدان کوانتومی نیز تعمیم پیدا می کند. به عبارت دیگر بسیاری از روش ها و مفاهیم نظریه میدان آماری با نظریه میدان کوانتومی مشترک هستند و دلیل آنهم وجود فرمالیزم انتگرال مسیر در

مکانیک کوانتومی و نظریه میدان کوانتومی است. این رابطه به صورت ابتدایی در شکل ۶ نشان داده شده است.

به این ترتیب بحث مقدماتی ما در باره خاستگاه های نظریه میدان کوانتومی به پایان می رسد. آنچه که آموخته ایم این است که در چند دهه ی گذشته معلوم شده مفاهیم و روش های نظریه میدان کوانتومی در حوزه هایی خیلی فراخ تر و متنوع تر از خاستگاه سنتی آن که الکترودینامیک کوانتومی بوده است، به کار رفته است. و به همین دلیل است که آشنایی با نظریه میدان کوانتومی برای بسیاری از دانشجویان فیزیک نظری تقریبا مستقل از این که در چه رشته ای به پژوهش خواهند پرداخت اهمیت دارد. به همین دلیل است که این درس به این شکل تدوین شده و ارائه می شود. در فصل های آینده سعی می کنیم با توجه به انگیزش های گفته شده در این فصل مقدماتی، نخست چهارچوب نظریه میدان کوانتومی را از دیدگاه های گوناگون شرح دهیم. اگر چه این انگیزش ها گوناگون اند اما نهایتا همه آنها به یک چارچوب واحد می رسند که آن را نظریه میدان کوانتومی می نامیم. البته این نظریه می تواند نسبیتی باشد ، که در این صورت (بیشتر و نه همیشه) برای توصیف برهم کنش های ذرات بنیادی بکار می رود یا غیرنسبیتی باشد که بازهم بیشتر ولی نه همیشه برای توصیف برهم کنش های ذرات در ماده چگال به کار می رود. می تواند به جای اینکه در فضا–زمان مینکووسکی فرمول بندی شود، با اندکی تغییر در فضای اقلیدسی فرمول بندی شود که در این صورت به کلی زمان و دینامیک از آن حذف می شود و برای توصیف افت و خیزهای دمایی میدان ها یا سیستم های بس ذره ای و گذارفازهای ماده به کار خواهد رفت. در درس های آینده به صورت مقدماتی با این چارچوب ها و بیان ها و کاربردهای اولیه آنها آشنا خواهیم شد. نخست به چارچوب ها می پردازیم و سپس به کاربردها در هر مورد.



شکل ۸: شکل سمت چپ نشان دهنده همه مسیرهایی است که یک ذره کوانتومی از نقطه q به نقطه q' طی می کند. جمع دامنه های مربوط به این مسیرها دامنه کل گذار کوانتومی را مطابق با روش انتگرال مسیر به دست می دهد. با تبدیل t به x و $q(t)$ به $\phi(x)$ این مسیرها تبدیل می شوند به هیئت های میدان ϕ (مثل یک طناب کشسان) که در فاصله بین x و x' کشیده شده است. انجام دقیق این تبدیل به نحوی که در فصل های آینده خواهیم دید دامنه گذار کوانتومی را نیز به تابع پارش مربوط به افت و خیزهای میدان یک بعدی $\phi(x)$ می کند. به این ترتیب یک رابطه بین مکانیک کوانتومی (یا نظریه میدان صفر بعدی) و نظریه میدان آماری یک بعدی پدید می آید. اگر در سمت چپ به جای یک ذره یک ریسمان داشته باشیم که از یک هیئت $q(y)$ در لحظه t به یک هیئت دیگر $q'(y)$ در لحظه t' تحول می یابد، آنگاه در روش انتگرال مسیر می بایست روی تمام رویه های مختلف انتگرال بگیریم. آنگاه در شکل سمت راست تابع پارش یک رویه $\phi(x,y)$ را خواهیم داشت. به این ترتیب یک رابطه بین نظریه میدان کوانتومی یک بعدی و نظریه میدان آماری دو بعدی پدید می آید. این رابطه به همین ترتیب به ابعاد بالاتر نیز تعمیم می یابد، یعنی یک رابطه بین نظریه میدان کوانتومی d بعدی و نظریه میدان آماری $d+1$ بعدی وجود دارد.