میدان دیراک

وحید کریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۷ دی ۱۳۹۶

۱ مقدمه

معادله کلاین گوردون به این دلیل ساده منجر به طیف انرژی مثبت و منفی برای ذره آزاد شد که نقطه شروعش معادله

$$P^\mu P_\mu = m^2 \qquad (۱)$$

یا همان

$$E^2 - P^2 = m^2 \qquad (۲)$$

بود. کوانتش این معادله به شکل

$$-\partial^\mu \partial_\mu \phi = m^2 \phi, \qquad (۳)$$

به ناگزیر منجر به طیف انرژی های مثبت و منفی برای ذره می شد. طرف چپ این معادله یک مربع کامل نیست. اگر می شد که از دو طرف رابطه (۱) جذر گرفت و آن را به صورت

$$\gamma^\mu P_\mu = m \qquad (۴)$$

یا

$$\gamma^0 E - \gamma^i P_i = m \qquad (۵)$$

نوشت آنگاه هم انرژی و هم تکانه ها به صورت خطی در معادله موج ظاهر می شدند و شاید مشکل انرژی های منفی برطرف می شد. در این صورت معادله موج به صورت زیر نوشته می شد:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{۶}$$

اما می دانیم که عبارت $E^2 - P^2$ یک مربع کامل نیست و بنابراین γ^μ ها نمی توانند اعداد معمولی باشند. برای آنکه بفهمیم چه هستند، طرفین رابطه (۴) را به توان دو می رسانیم و به دست می آوریم:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu P_\mu P_\nu = m^2. \tag{۷}$$

برای اینکه این معادله با معادله (۱) یکی باشد باید داشته باشیم:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu P_\mu P_\nu = \eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu. \tag{۸}$$

در این مرحله نمی توان گفت که $\gamma^\mu\gamma^\nu$ برابر با $\eta^{\mu\nu}$ است زیرا دومی یک تانسور متقارن است و حال آنکه اولی تقارن خاصی ندارد. در واقع می توان نوشت:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{۹}$$

در اثر ادغام با $P_\mu P_\nu$ تانسور دوم که پادمتقارن است نتیجه صفر بدست می دهد و تانسور اول که متقارن است همان چیزی است که می بایست برابر با $\eta^{\mu\nu}$ باشد تا رابطه (۸) برای همه P_μ ها صحیح باشد. بنابراین γ^μ ها می بایست در رابطه زیر صدق کنند:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{۱۰}$$

و یا

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{۱۱}$$

به طور تفصیلی معنای این روابط این است که همه γ های مختلف باهم پادجابجا می شوند و بنابراین عدد نیستند. هم چنین این نتیجه را در بر دارند که :

$${\gamma^0}^2 = 1, \qquad {\gamma^i}^2 = -1, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{۱۲}$$

γ^μ ها عدد نیستند بلکه ماتریس هایی هستندکه می بایست در این روابط صدق کنند. مسلم است که تعداد این ماتریس ها با بعد فضا زمان برابر است اما این که بعد این ماتریس ها چند است بستگی به بعد فضازمان دارد . معادله

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{۱۳}$$

معادله دیراک خوانده می شود. البته این معادله در دستگاه واحدهایی نوشته شده است که در آن $\hbar = c = 1$ است.

■ تمرین: معادله دیراک را در دستگاه واحدهای متریک بنویسید.

ماتریس های γ^μ ماتریس های دیراک نامیده می شوند. رابطه (۱۱) رابطه ای است که ماتریس های دیراک را تعریف می کند. این رابطه نشان می دهد که ماتریس های دیراک یکتا نیستند، زیرا اگر γ^μ ها در این رابطه صدق کنند، به ازای هر ماتریس وارون پذیرِ A ماتریس های

$$\gamma' \equiv A\gamma^\mu A^{-1} \tag{۱۴}$$

نیز در همین رابطه صدق می کنند. می توان ماتریس های دیراک با اندیس پایین را نیز با تعریف $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$ بدست آورد و این ماتریس ها نیز در روابط زیر صدق می کنند:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}. \tag{۱۵}$$

این که شکل صریح این ماتریس ها چه باشد، در هیچکدام از نتایج فیزیکی ناشی از معادله دیراک تاثیری ندارد و تنها بر اساس راحتی یک نمایش خاص از این ماتریس ها انتخاب می شود. اما قبل از انتخاب هر نوع نمایشی می توان بعضی از خواص مهم این ماتریس ها را پیدا کرد. نخست آنکه ماتریس γ_0 هرمیتی است زیرا همه ویژه مقدارهایش یا 1 هستند یا -1[۱]. هم چنین ماتریس های γ_i پاد هرمیتی هستند زیرا ویژه مقدارهای آنها یا i است یا $-i$ [۲]. بنابراین داریم:

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \qquad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i. \tag{۱۶}$$

می توان همه این روابط را به شکل فشرده زیر نوشت:

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0. \tag{۱۷}$$

[۱] چون که مربع این ماتریس برابر با یک است.
[۲] چون که مربع این ماتریس ها برابر با منهای یک است.

مزدوج معادله دیراک به صورت زیر در می آید:

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^\mu - m\partial\psi^\dagger = 0. \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری $\gamma^\dagger$ از معادله (۱۷) و ضرب طرفین از راست در γ^0 ، این معادله به شکل زیر در می آید:

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - m\partial\psi^\dagger \gamma^0 = 0. \qquad (۱۹)$$

بنابراین با نامگذاری

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \qquad (۲۰)$$

مزدوج معادله دیراک به شکل نهایی زیر نوشته می شود:

$$\overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0, \qquad (۲۱)$$

که در آن مشتق روی $\overline{\psi}$ اثر می‌کند. از ترکیب (۱۳) و (۲۱) (به عبارت بهتر از جمع این دو معادله) به معادله زیر می رسیم:

$$\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu \psi = 0 \qquad (۲۲)$$

که می توان آن را به شکل معادله پیوستگی زیر نوشت:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad , \qquad J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu \psi. \qquad (۲۳)$$

در نتیجه کمیت زیر پایسته است:

$$Q := \int \overline{\psi}\gamma^0 \psi d^3x = \int \psi^\dagger \psi d^3x. \qquad (۲۴)$$

بنابراین می توان کمیت $\psi(x)^\dagger \psi(x)$ را به عنوان چگالی احتمال یافتن ذره در نقطه x در نظر گرفت و تابع موج دیراک را طوری بهنجار کرد که احتمال کل برابر با یک باشد.

- تمرین: ثابت کنید که J^μ هرمیتی است.

- تمرین: ماتریس γ^5 را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \qquad (۲۵)$$

نشان دهیدکه این ماتریس هرمیتی است و مربع آن برابر با ماتریس یک است. هم چنین نشان دهیدکه با همه ماتریس های دیراک پادجابجا می شود.

۲ حل های معادله دیراک

حال نوبت آن رسیده است که یک نمایش صریح برای ماتریس های دیراک در نظر بگیریم و حل های این معادله را بدست آوریم. معادله دیراک در هر بعدی به همین شکل است. در تمرین ها از خواننده می خواهیم که معادله دیراک را در فضازمان های دو بعدی و سه بعدی حل کند. از این به بعد خود را به فضازمان واقعی یعنی فضازمان چهاربعدی محدود می‌کنیم. نخست توجه می‌کنیم که ماتریس های γ حداقل بعدی که دارند ۴ است.

- تمرین: ماتریس های پاوولی ماتریس های دوبعدی هستند که با هم پادجابجا می شوند. اما مربع آنها برابر با یک است. بنابراین یک انتخاب برای سه تا از ماتریس های دیراک به ترتیب زیر است:

$$\gamma_a = i\sigma_a, \qquad\qquad a = 1,\ 2,\ 3. \tag{۲۶}$$

نشان دهیدکه هیچ ماتریس دوبعدی دیگری نمی توان یافت که نقش γ_0 را بازی کند.

ماتریس های دیراک سه بعدی نیز نمی توانند باشند زیرا از روابط جابجایی ماتریس های دیراک داریم:

$$\gamma^i = -\gamma^0\gamma^i\gamma^0 \tag{۲۷}$$

و اگر رد طرفین را حساب کنیم داریم:

$$tr(\gamma^i) = -tr(\gamma^i) \tag{۲۸}$$

و در نتیجه ماتریس های γ^i دارای ردّ صفر هستند و ماتریسی با بعد سه که ویژه مقدارهایش $\pm i$ باشد نمی تواند دارای چنین خاصیتی باشد. در حقیقت ماتریس های دیراک با همین استدلال نمی توانند دارای بعد فرد باشند. اولین انتخاب ساده برای این ماتریس ها به شکل زیراست :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix} \tag{۲۹}$$

یا به عبارت دیگر:

$$\gamma^0 = I \otimes \sigma_3, \qquad \gamma^k = \sigma_k \otimes i\sigma_2. \tag{۳۰}$$

■ تمرین: یک نمایش دیگر برای ماتریس های دیراک نمایش زیر موسوم به نمایش وایل [۳] است. در این نمایش داریم:

$$\gamma^0 = I \otimes \sigma_1, \qquad \gamma^k = \sigma_k \otimes i\sigma_2. \tag{۳۱}$$

نشان دهیدکه این ماتریس ها واقعا نمایشی از ماتریس های دیراک هستند. هم چنین γ^5 را در نمایش وایل بدست آورید.

■ تمرین: ماتریس S را چنان پیدا کنیدکه نمایش دیراک و نمایش وایل از ماتریس های γ را به یکدیگر تبدیل کند. به عبارت دیگر اگر نمایش دیراک را با $\gamma{-}D$ و نمایش وایل را با γ^μ_W نشان دهیم، ماتریس S را چنان پیدا کنیدکه

$$S\gamma^\mu_D S^{-1} = \gamma^\mu_W \quad , \quad \forall\mu. \tag{۳۲}$$

حال نمایش دیراک را انتخاب می‌کنیم و با این انتخاب معادله دیراک به شکل زیر درمی آید:

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - m & i\sigma\cdot\nabla \\ -i\sigma\cdot\nabla & -i\partial_t - m \end{pmatrix} \Psi(x) = 0 \tag{۳۳}$$

حال $\Psi(x)$ را به شکل $\psi(\mathbf{p})e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \equiv \psi(\mathbf{p})e^{-ipx}$ درنظر می‌گیریم و بدست می آوریم:

$$\begin{pmatrix} E - m & -\sigma\cdot\mathbf{p} \\ \sigma\cdot\mathbf{p} & -E - m \end{pmatrix} \psi() = 0 \tag{۳۴}$$

شرط این‌که این معادله جواب غیر صفر داشته باشد آن است‌که داشته باشیم

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} =: \pm\mathcal{E} \tag{۳۵}$$

که در آن $\mathcal{E}$ یک مقدار مثبت است. بنابراین در اینجا هم همان مشکل انرژی های مثبت و منفی وجود دارد. همانگونه‌که در معادله‌کلاین‌گوردون دیدیم این مشکل با ارتقای معادله دیراک از یک معادله برای یک تک ذره به معادله ای برای میدان‌کلاسیک دیراک و سپس‌کوانتیزه‌کردن این میدان از بین می رود. به این موضوع در ادامه این درس خواهیم پرداخت. فعلا می خواهیم خواص همین جواب های تک ذره ای را بررسی‌کنیم.

[۳] Weyl

جواب های با انرژی $\mathcal{E}$ را با $u(\mathbf{p})$ و جواب های با انرژی $-\mathcal{E}$ را با $v(\mathbf{p})$ نشان می دهیم. کمی محاسبه نشان می دهدکه این جواب ها به شکل زیر هستند:

$$u(\mathbf{p}) = \eta \begin{pmatrix} \phi \\ \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{\mathcal{E}+m}\phi \end{pmatrix} \tag{۳۶}$$

و

$$v(\mathbf{p}) = \eta \begin{pmatrix} \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{\mathcal{E}+m}\phi' \\ \\ \phi' \end{pmatrix} \tag{۳۷}$$

که درآنها ϕ و ϕ' بردارهای دومولفه ای دلخواه هستند. از آنجاکه معادله دیراک خطی است می توانیم این بردارهای دو مولفه ای را بر حسب پایه های آنها بسط دهیم و هر جوابی در واقع ترکیب خطی از این جواب هاست. بنابراین برای این بردارهای دو مولفه ای پایه زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \phi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{۳۸}$$

پاسخ های معادله دیراک یعنی $\Psi(x)$ یا $\psi(p)$ را اسپینور یا به عبارت دقیق تر اسپینورهای چهارمولفه ای می خوانیم . این اسپینورها را به صورت زیر بهنجار می‌کنیم . این‌که چرا اسپینورها با این ضرایب بهنجار شده اند اندکی بعد مشخص خواهد شد.

$$\begin{aligned} u^i(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}+m}{2m}} \begin{pmatrix} \phi^i \\ \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{\mathcal{E}+m}\phi^i \end{pmatrix} \\ v^i(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{\mathcal{E}+m}\phi^i \\ \\ \phi^i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۳۹}$$

- تمرین: شکل صریح هر چهار اسپینور دیراک را بدست آورید، یعنی هر چهار مولفه این اسپینورها را مشخص‌کنید. وقتی‌که ذره ساکن است شکل این اسپینورها را مشخص‌کنید.

- تمرین: شکل صریح اسپینورهای دیراک را برای وقتی‌که ذره در حال سکون است بدست آورید.

فعلا نمی دانیم درجه آزادی ای که در بردارهای دو مولفه ای ϕ نشسته است چه معنایی دارد. بعدا خواهیم دید که این درجه آزادی همان درجه آزادی اسپین است که در اینجا به صورت طبیعی وارد شده است. به همین جهت از این به بعد آن را درجه آزادی اسپین می خوانیم. با در نظر گرفتن بستگی فضازمانی خواهیم داشت:

$$\psi^{+i}(x) = u^i(\mathbf{p})e^{-i\mathcal{E}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{۴۰}$$

که نشان دهنده ذره ای است با انرژی $\mathcal{E}$ و تکانه $\mathbf{p}$و

$$\psi'^{-i}(x) = v^i(\mathbf{p})e^{i\mathcal{E}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \tag{۴۱}$$

که نشان دهنده ذره ای است با انرژی $-\mathcal{E}$ و تکانه $\mathbf{p}$. مجموعه این اسپینورها تمام فضای هیلبرت تک ذره را می پوشانند. دقت کنید که جواب با انرژی منفی را بجای ψ_- با ψ'_- نشان داده ایم. دلیل اش کمی بعد روشن خواهد شد. این اسپینورها (یا این جواب ها) در شکل (؟؟) نشان داده شده اند.

درآینده از جواب های تک ذره ای به شکل زیر استفاده خواهیم کرد.

$$\psi^i_+(x) = u^i(\mathbf{p})e^{-ipx} \qquad \psi^i_-(x) = v^i(-\mathbf{p})e^{ipx}. \tag{۴۲}$$

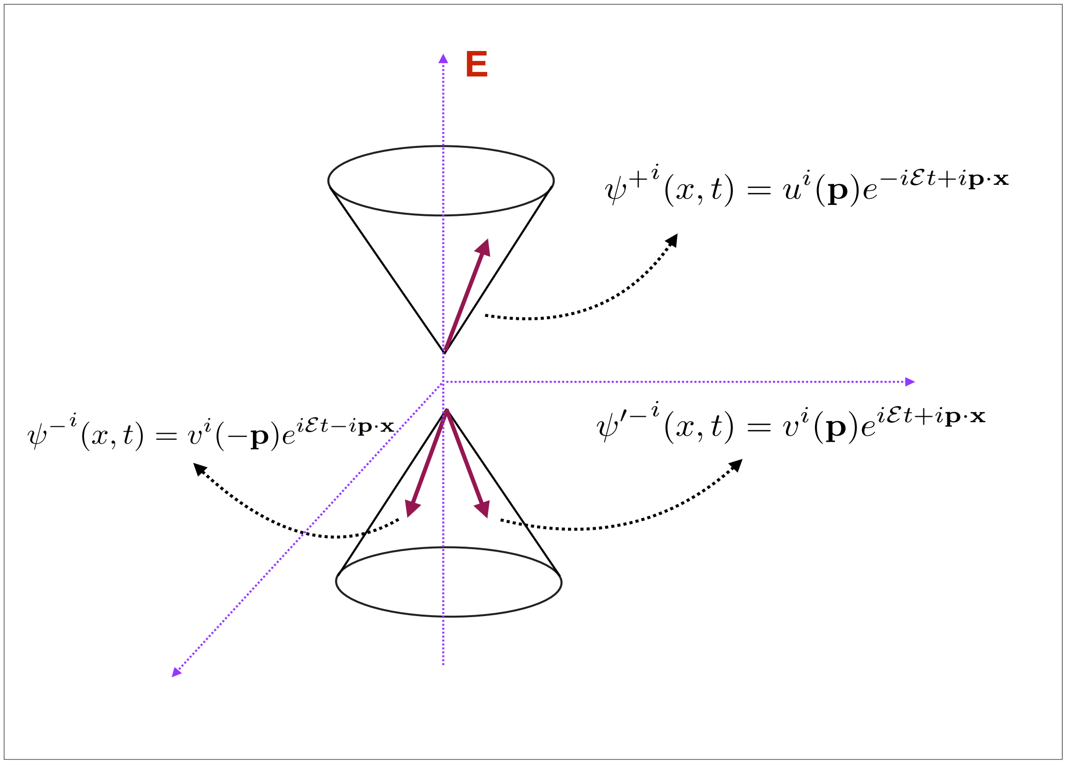
$\psi^i+(x)$ نشان دهنده ذره ای است که با انرژی $\mathcal{E}$ و تکانه $\mathbf{p}$ حرکت می کند و در حالت اسپینی $|\phi^i\rangle$ قرار گرفته است.

$\psi^{i-}(x)$ نیز نشان دهنده ذره ای است که با انرژی $-\mathcal{E}$ و تکانه $-\mathbf{p}$ حرکت می کند و در حالت اسپینی $|\phi^i\rangle$ قرار گرفته است. خوبی ψ^- نسبت به ψ'^- این است که ارگومان فضازمانی اش به صورت هموردا بر اساس ضرب همان چهاربردارهای p و x نوشته شده است و نیازی به معرفی چهاربردار جدیدی نیست.

■ تمرین: نشان دهید که اسپینورهای u^i و v^i در روابط تعامد زیر صدق می کنند.

$$\overline{u^i}(p)u^j(p) = \delta_{ij} \qquad -\overline{v^i}(p)v^j(p) = \delta_{ij} \tag{۴۳}$$

$$u^{i\dagger}(p)u^j(p) = v^{i\dagger}(p)v^j(p) = \frac{E}{m}\delta_{ij} \tag{۴۴}$$



شکل ۱: جواب های مختلف دیراک. دقت کنید که یک جواب از مخروط بالا و یک جواب از مخروط پایین چنانچه تمام تکانه ها را در نظر بگیریم تمام فضای جواب ها یا فضای هیلبرت یک ذره را پوشش می دهد. اما جواب ψ^- از جواب ψ'^- بهتر است زیرا ارگومان فضایی آن را می توان به صورت همموردا نوشت.

$$u^{i\dagger}(\mathbf{p})v^j(\mathbf{p}) = 0 \tag{۴۵}$$

که درآن $\overline{u} := u^\dagger\gamma^0$ و $\overline{v} := v^\dagger\gamma^0$.

■ تمرین: نشان دهید که اسپینورهای دیراک در روابط تعامد زیر صدق می کنند:

$$\sum_i u^i(\mathbf{p})\overline{u}^i(\mathbf{p}) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} \tag{۴۶}$$

$$\sum_i v^i(-\mathbf{p})\overline{v}^i(-\mathbf{p}) = \frac{\gamma^\mu p_\mu - m}{2m} \tag{۴۷}$$

■ تمرین: نشان دهید که

$$\sum_i v^i(\mathbf{p})\overline{v}^i(\mathbf{p}) = \gamma_0\frac{\gamma^\mu p_\mu - m}{2m} \tag{۴۸}$$

■ تمرین: رابطه کامل بودن زیر را نشان دهید.

$$\sum_i u^i(\mathbf{p})u^{i\dagger}(\mathbf{p}) + \sum_i v^i(\mathbf{p})v^{i\dagger}(\mathbf{p}) = \frac{E}{m}I \tag{۴۹}$$

۱.۲ لاگرانژی معادله دیراک

معادله دیراک از چگالی لاگرانژی زیر بدست می آید:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_m - m)\psi. \tag{۵۰}$$

■ تمرین: الف: با وردش این معادله نسبت به $\overline{\psi}$ معادله دیراک را بدست آورید.

ب: با وردش این معادله نسبت به ψ نیز نشان دهید که معادله دیراک بدست می آید.

■ تمرین: لاگرانژی دیراک تحت تبدیل

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi \quad , \quad \overline{\psi} \longrightarrow \overline{\psi}e^{-i\theta} \tag{۵۱}$$

تغییر نمی‌کند. نشان دهید که جریان پایسته ناشی از این تقارن همانی است که قبلا بدست آوردیم، یعنی معادله (۲۳).

۳ تقارن دستوارگی

تقارن دستوارگی [۴] یکی از مهمترین تقارن های مورد بحث در مقیاس زیر اتمی است. برای آنکه با آن بخوبی آشنا شویم نخست ماتریس γ^5 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{۵۲}$$

تمرین زیر خواص ماتریس γ^5 را نشان می دهد:

■ تمرین: یک - نشان دهید که γ^5 یک ماتریس هرمیتی است. دو - نشان دهید که با همه ماتریس های دیراک پادجابجا می شود:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \qquad \forall \ \gamma^\mu. \tag{۵۳}$$

سه - نشان دهید که مربع آن برابر با ماتریس واحد است و شکل آن وقتی که از نمایش دیراک استفاده می‌کنیم برابر است با:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} . & I \\ I & . \end{pmatrix}. \tag{۵۴}$$

چهار- نشان دهید که شکل آن در نمایش وایل برابر است با:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & . \\ . & -I \end{pmatrix}. \tag{۵۵}$$

■ تمرین: یک - نشان دهید که

$$\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 = -(\gamma^\mu)* \qquad \forall \ \mu$$

[۴] Chiral Symmetry

دو – نشان دهید که

$$\gamma^0\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2\gamma^0 = -(\gamma^\mu)^T \qquad \forall \quad \mu.$$

از پادجابجاشدن ماتریس γ^5 با همه ماتریس های‌گاما می توانیم یک تبدیل دیگر را نیز در نظر بگیریم و آن تبدیل زیر است:

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi, \quad \longrightarrow \quad \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \longrightarrow \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma^0 = \overline{\psi}e^{i\alpha\gamma^5}. \tag{۵۶}$$

حال دقت می‌کنیم‌که اگر ذره بدون جرم باشد، آنگاه لاگرانژی دیراک تحت این تبدیل ناورداست.

■ نشان دهید‌که جریان پایسته این تقارن‌کمیت زیر است:

$$J^\mu = \overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi. \tag{۵۷}$$

این جریان را جریان دستوارگی [۵] می نامیم.

چه جرم ذره صفر باشد چه غیرصفر باشد، همواره می توان یک اسپینور را به صورت زیر تجزیه‌کرد:

$$\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi + \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi =: \psi_R + \psi_L, \tag{۵۸}$$

که در آن از این استفاده‌کرده ایم‌که عملگرهای

$$P_\pm \equiv \frac{1}{2}(1\pm\gamma^5) \tag{۵۹}$$

دو عملگر تصویرگر هستند. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\gamma^5\psi_R = \psi_R \quad , \quad \gamma^5\psi_L = -\psi_L. \tag{۶۰}$$

اسپینورهای ψ_R و ψ_L به ترتیب اسپینورهای راست دست و چپ دست خوانده می شوند. یک اسپینور بدون جرم راست دست را در نظر می گیریم. این اسپینور می بایست ویژه بردار عملگر γ^5 با ویژه مقدار یک باشد. با توجه به شکل ماتریس γ^5 نتیجه می‌گیریم‌که این اسپینور شکل

$$\psi_R \propto \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \tag{۶۱}$$

[۵] Chiral Current

را دارد. با توجه به شکل کلی اسپینورها در رابطه () و این‌که برای ذره بدون جرم $E = p$ است، نتیجه می‌گیریم که برای اسپینورهای راست دست داریم:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = \phi. \qquad (۶۲)$$

به این ترتیب برای چنین ذره ای بردار اسپین این ذرات در راستای تکانه خطی آنها است. می‌گوییم چنین ذره ای دارای چرخش [۶] مثبت است. از طرف دیگر یک اسپینور بدون جرم چپ دست را در نظر می‌گیریم. این اسپینور می بایست ویژه بردار عملگر γ^5 با ویژه مقدار منهای یک باشد. با توجه به شکل ماتریس γ^5 نتیجه می‌گیریم که این اسپینور شکل

$$\psi_L \propto \begin{pmatrix} \phi \\ -\phi \end{pmatrix} \qquad (۶۳)$$

را دارد. با توجه به شکل کلی اسپینورها و این‌که برای ذره بدون جرم $E = p$ است، نتیجه می‌گیریم که برای اسپینورهای راست دست داریم:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = -\phi. \qquad (۶۴)$$

به این ترتیب برای چنین ذره ای بردار اسپین این ذرات در راستای مخالف تکانه خطی آنها است. می‌گوییم چنین ذره ای دارای چرخش [۷] منفی است. است.

۴ معادله دیراک و تبدیلات لورنتز

برای راحتی بحث ذره ای را که معادله دیراک آن را توصیف می‌کند الکترون می نامیم. اگر معادله دیراک بخواهد یک معادله کوانتومی نسبیتی باشد، می بایست تحت تبدیلات لورنتز شکل خود را حفظ کند. در غیر این صورت به این نتیجه می رسیم که الکترون در دو دستگاه لخت متفاوت دو نوع رفتار متفاوت دارد و از همین رفتار متفاوت می توانیم بفهمیم که درکدام دستگاه لخت هستیم. بنابراین در این قسمت می بایست ناوردایی معادله دیراک را تحت تبدیلات لورنتز بررسی کنیم. تحت یک تبدیل لورنتز دلخواه مثل $x' = \Lambda\, x$ کلی ترین تبدیلی که می توانیم برای اسپینور دیراک تصور کنیم تبدیل زیر است:

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \qquad (۶۵)$$

[۶] Helicity
[۷] Helicity

که در آن S یک نمایش از تبدیل لورنتز است یعنی $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_1\Lambda_2)$. اگر قرار است که شکل معادله در دو دستگاه لخت یکسان باشد می بایست معادله های زیر از یکدیگر نتیجه شوند:

$$(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m)\psi(x) = 0 \tag{۶۶}$$

$$(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m)\psi'(x') = 0 \tag{۶۷}$$

(۶۸)

برای این کار نیاز داریم که رابطه مشتقات جزئی را بین دو دستگاه پیدا کنیم.می دانیم

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad\qquad x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu, \tag{۶۹}$$

که از ان نتیجه می گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{۷۰}$$

با قرار دادن این مشتق در معادله دوم از (۶۶) به دست می آوریم:

$$(i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m)S(\Lambda)\psi(x) = 0 \tag{۷۱}$$

حال دقت می کنیم که ماتریس $S(\Lambda)$ لزوما با ماتریس های γ جابجا نمی شود. بنابراین با ضرب کردن طرفین چپ این معادله در $S^{-1}(\Lambda)$ بدست می اوریم:

$$\left[iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m\right]\psi(x) = 0 \tag{۷۲}$$

اگر این معادله بخواهد با معادله اول (۶۶) برابر باشد می بایست داشته باشیم:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \gamma^\nu. \tag{۷۳}$$

با ضرب کردن طرفین در $\Lambda^\alpha{}_\nu$ بدست می آوریم:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\alpha S(\Lambda) = \Lambda^\alpha{}_\nu \gamma^\nu. \tag{۷۴}$$

چنانکه خواهیم دید، این رابطه ماتریس $S(\Lambda)$ را به طور یکتا تعیین می کند.

■ تمرین: از همین رابطه استفاده کنید و نشان دهید که $S(\Lambda)$ یک نمایش از گروه لورنتز است.

از نمایش بودن $S(\Lambda)$ این نتیجه مهم را می‌گیریم که می توان از رابطه ی $S(\Lambda) = \lim_{N\longrightarrow\infty} S(\frac{\Lambda}{N})^N$ استفاده کرد و نخست این ماتریس را برای تبدیلات بی نهایت کوچک بدست اورد و سپس با به توان رساندن ماتریس S برای این تبدیلات به ماتریس S برای تبدیلات دلخواه دست یافت. بنابراین قرار می دهیم:

$$\Lambda = I + \omega^{\mu,\nu} L_{\mu,\nu} \tag{۷۵}$$

که در آن $\omega^{\mu,\nu}$ ها پارامترهای تبدیل لورنتز و $L_{\mu,\nu}$ ها مولدهای شش‌گانه تبدیلات لورنتز هستند. دقت کنید که

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \qquad\qquad L_{\mu,\nu} = -L_{\nu,\mu}.$$

بنابراین برای این تبدیلات بی نهایت کوچک خواهیم داشت:

$$S(\Lambda) = I + \omega^{\mu,\nu} \mathcal{L}_{\mu,\nu} \tag{۷۶}$$

با جایگذاری در رابطه (۷۴) بدست می آوریم:

$$\left(I - \omega^{\alpha,\beta}\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\right)\gamma^\mu \left(I + \omega^{\alpha,\beta}\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\right) = (I + \omega^{\alpha,\beta}L_{\alpha,\beta})^\mu_\nu \gamma^\nu. \tag{۷۷}$$

و با پس از ساده کردن

$$[\mathcal{L}_{\alpha,\beta}, \gamma^\mu] = -L_{\alpha,\beta}\gamma^\nu. \tag{۷۸}$$

یا

$$[\mathcal{L}_{\alpha,\beta}, \gamma_\mu] = -L_{\alpha,\beta}\gamma_\nu. \tag{۷۹}$$

با توجه به اینکه شکل صریح مولدهای گروه لورنتز را از درسهای قبل می دانیم

$$(L_{\alpha,\beta})_{\mu,\nu} = \eta_{\alpha,\mu}\eta_{\beta,\nu} - \eta_{\alpha,\nu}\eta_{\beta,\mu} \tag{۸۰}$$

شکل نهایی رابطه ی (۷۹) عبارت خواهد بود از:

$$[\mathcal{L}_{\alpha,\beta},\gamma_\mu]=\eta_{\mu,\beta}\gamma_\alpha-\eta_{\mu,\alpha}\gamma_\beta. \tag{۸۱}$$

ماتریس $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ می بایست از γ ها ساخته شود، و می بایست نسبت به دو اندیس اش پادمتقارن باشد. تنها کاندیدی که وجود دارد جابجاگر دو ماتریسِ γ است. کمی محاسبه دقیق نشان می دهد که واقعا

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}=\frac{1}{4}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]. \tag{۸۲}$$

- تمرین: از رابطه $\{\gamma_\alpha,\gamma_\beta\}=2\eta_{\alpha,\beta}$ استفاده کنید و نشان دهید که $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ واقعا در رابطه (۸۱) صدق می کند.

- مثال: می خواهیم شکل ماتریسی مولدهای نشان داده شده در (۸۰) را بدست می آوریم. دقت می کنیم وقتی تبدیل لورنتز را به صورت یک رابطه ماتریسی به صورت $x'=\Lambda x$ می نویسیم یا وقتی که شکل بی نهایت کوچک آن را به صورت $x'=x+Lx$ می نویسیم، منظورمان از این ماتریس ها، ماتریس هایی است که اندیس اول آنها بالا و اندیس دوم آنها پایین است. به عبارت دیگر این ها ماتریس هایی هستند با طرح اندیس های به صورت ${\Lambda^\alpha}_\beta$ و ${L^\alpha}_\beta$.

بنابراین از رابطه (۸۰) داریم:

$$({L_{\alpha,\beta})^\rho}_\nu=\eta^{\rho,\mu}(L_{\alpha,\beta})_{\mu,\nu}=\delta^\rho_\alpha\eta_{\beta,\nu}-\eta_{\alpha,\nu}\delta^\rho_\beta. \tag{۸۳}$$

به طور صریح تر خواهیم داشت:

$$L_{01}=\begin{pmatrix} . & -1 & . & . \\ -1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}\qquad L_{02}=\begin{pmatrix} . & . & -1 & . \\ . & . & . & . \\ -1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}\qquad L_{03}=\begin{pmatrix} . & . & . & -1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ -1 & . & . & . \end{pmatrix} \tag{۸۴}$$

و

$$L_{12} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & -1 & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \qquad L_{23} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & -1 \\ . & . & 1 & . \end{pmatrix} \qquad L_{31} = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & -1 & . & \end{pmatrix} \tag{۸۵}$$

- ماتریس لورنتز راکه نشان دهنده یک خیز در راستای x با سرعت v است به شرح زیر بدست می آوریم.

مولد این خیز L_{01} است، بنابراین داریم:

یعنی

$$\Lambda = e^{\theta L_{01}} = e^{\theta L_{01}} = e^{\begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-\theta\sigma_1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{۸۶}$$

و یا

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & . & . \\ \sin\theta & \cos\theta & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \tag{۸۷}$$

که نشان دهنده یک خیز در راستای x است با پارامتر $v = \tanh\theta$.

- مثال: اگر نمایش دیراک را برای ماتریس های γ به‌کار ببریم، آنگاه:

$$\mathcal{L}_{0k} = \frac{1}{4}[\gamma_0, \gamma_k] = \frac{1}{4}[I \otimes \sigma_3, \sigma_k \otimes -i\sigma_2] = -i\sigma_k \otimes [\sigma_3, \sigma_2] = -\frac{1}{2}\sigma_k \otimes \sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & -\sigma_k \\ -\sigma_k & \end{pmatrix} \tag{۸۸}$$

و

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j] = \frac{1}{4}[\sigma_i \otimes -i\sigma_2, \sigma_j \otimes -i\sigma_2] = -\frac{1}{4}[\sigma_i, \sigma_j] \otimes I = -\frac{1}{2} i\epsilon_{ijk}\sigma_k \otimes I = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} -i\sigma_k & \\ & -i\sigma_k \end{pmatrix} \quad (۸۹)$$

می توانیم مولدهای تکانه زاویه ای را به شکل زیر هم بنویسیم:

$$S_1 := \mathcal{L}_{23} \quad , \quad S_2 = \mathcal{L}_{31}, \quad , \quad S_3 = \mathcal{L}_{12}$$

که در این صورت خواهیم داشت:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad , \quad S_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (۹۰)$$

حال به عنوان مثال تحت دورانی به اندازه زاویه θ حول محور z یک اسپینور دیراک به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \psi'(\mathbf{x}', t) = e^{\theta S_3}\psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_3} & e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_3} \\ & \end{pmatrix} \quad (۹۱)$$

که در آن $\mathbf{x}'$ دوران یافته $\mathbf{x}$ حول محور $\mathbf{z}$ به اندازه زاویه θ است. این موضوع نشان می دهد که یک اسپینور چهارمولفه ای دیراک در واقع از دو بردار دو مولفه ای ساخته شده که هر دو تحت دوران مثل اسپینورها تبدیل می شوند. در این مرحله ممکن است خواننده سوال کند که فرق این دو اسپینور چیست؟ به این سوال بعد از آن پاسخ می دهیم که تبدیلات پاریته را معرفی کنیم.

- مثال: اسپینور دیراک $u^i(p)$ را برای وقتی که ذره ساکن است در نظر می‌گیریم. از آنجا که برای ذره ساکن $\mathcal{E} = m$ است، این اسپینور به شکل زیر است:

$$u^i(\mathbf{p} = 0) = \begin{pmatrix} \phi^i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (۹۲)$$

و تابع موج ذره برابر است با:

$$\psi^+(x, t) = \begin{pmatrix} \phi^i \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}. \quad (۹۳)$$

حال فرض می‌کنیم این ذره در یک دستگاه لخت قرار دارد که آن دستگاه لخت با سرعت v در راستای x نسبت به دستگاه مرجع ساکن حرکت می‌کند. با استفاده از تبدیلات لورنتز داریم:

$$\psi'(x',t') = S(\Lambda)\psi(x,t). \tag{۹۴}$$

در این رابطه با توجه به (۸۸)

(۹۵)

$$S(\Lambda) = e^{\theta\mathcal{L}_{01}} = e^{\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} & -\sigma_1 \\ -\sigma_1 & \end{pmatrix}} = \cosh\frac{\theta}{2}I - \sinh\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\theta}{2} & -\sinh\frac{\theta}{2}\sigma_1 \\ -\sinh\frac{\theta}{2}\sigma_1 & \cosh\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

در نتیجه با جایگذاری این رابطه در رابطه ی (۹۴) و توجه به رابطه (۹۳) بدست می آوریم:

$$\psi'(x',t') = S(\Lambda)\psi(x,t) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\theta}{2} & -\sinh\frac{\theta}{2}\sigma_1 \\ -\sinh\frac{\theta}{2}\sigma_1 & \cosh\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi^i \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \tag{۹۶}$$

و یا

$$\psi'(x',t') = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\theta}{2}\phi^i \\ -\sinh\frac{\theta}{2}\sigma_1\phi^i \end{pmatrix} e^{-i(\mathcal{E}t'-px')} = \cosh\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} \phi^i \\ -\tanh\frac{\theta}{2}\sigma_1\phi^i \end{pmatrix} e^{-i(\mathcal{E}t'-px')}. \tag{۹۷}$$

برای اینکه این عبارت را به شکل آشناتری دربیاوریم به روابط زیر دقت می‌کنیم:

$$\tanh\theta = v \quad , \quad \cosh\theta = 2\cosh^2\frac{\theta}{2} - 1 \;\; , \;\; \mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \;\; , \;\; p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \tag{۹۸}$$

یک محاسبه ساده با استفاده از این روابط نشان می دهد که :

$$\cosh\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}+m}{2m}} \quad , \quad \sinh\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}-m}{2m}}. \tag{۹۹}$$

هم چنین از تقسیم این دو رابطه در یکدیگر می فهمیم که

$$\tanh\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}-m}{\mathcal{E}+m}} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}{\mathcal{E}+m} = \frac{p}{\mathcal{E}+m} \tag{۱۰۰}$$

با ترکیب همه این روابط با یک دیگر به دست می آوریم:

$$\psi'(x', t') = \sqrt{\frac{\mathcal{E}+m}{2m}} \begin{pmatrix} \phi^i \\ \frac{-p\sigma_1}{\mathcal{E}+m}\phi^i \end{pmatrix} e^{-i(\mathcal{E}t' - px')}, \tag{۱۰۱}$$

که با مقایسه با رابطه (۳۹) می بینیم همان چیزی است که انتظار داریم. دقت کنید که از دید دستگاه لخت جدید، ذره با تکانه $-p$ حرکت می کند.

۵ رفتار اسپینور دیراک تحت تبدیل پاریته

تبدیل پاریته به صورت زیر تعریف می شود:

$$(t, \mathbf{x}) \longrightarrow (t', \mathbf{x}') = (t, -\mathbf{x}). \tag{۱۰۲}$$

این تبدیل را تبدیل آینه ای نیز می نامند به این معنا که یک دستگاه فیزیکی را در آینه ای که مثلا در صفحه xz قرار گرفته است نگاه کنیم. البته آینه بالا مختصات را به شکل زیر تبدیل می کند:

$$(t, x, y, z) \longrightarrow (t, x, -y, z) \tag{۱۰۳}$$

که در نگاه اول با تبدیل پاریته متفاوت به نظر می رسد. آما اگر این تبدیل آینه ای را با یک دوران مناسب ترکیب کنیم خواهیم دید که نتیجه اش همان تبدیل پاریته است. از آنجا که معتقدیم همه سیستم های فیزیکی بسته دارای تقارن دورانی هستند، ازمون تقارن پاریته با آزمون تقارن آینه ای معادل است.

- تمرین: نشان دهید که ترکیب یک تبدیل آینه ای و یک دوران با تبدیل پاریته یکسان است.

معادله دیراک در دستگاه مختصات $(t, \mathbf{x})$ به شکل زیر است:

$$\left(i\gamma^0\partial_t + \gamma^i\partial_i\right)\psi(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{۱۰۴}$$

اگر قرار باشد که معادله دیراک تحت تبدیل پاریته شکل خود را حفظ کند می بایست در دستگاه مختصات $(t', \mathbf{x}') = (t, -\mathbf{x})$ داشته باشیم

$$\left(i\gamma^0\partial_{t'} + \gamma^i\partial_{i'}\right)\psi'(t', \mathbf{x}') = 0 \tag{۱۰۵}$$

و یا

$$\left(i\gamma^0\partial_t - \gamma^i\partial_i\right)\psi'(t',\mathbf{x}') = 0 \tag{۱۰۶}$$

بنابراین باید ماتریسی مثل Π وجود داشته باشد به قسمی که وقتی قرار می دهیم

$$\psi'(t',\mathbf{x}') = \Pi\psi(t,\mathbf{x})$$

معادله (۱۰۴) به معادله (۱۰۷) تبدیل شود. یعنی

$$\left(i\gamma^0\partial_t - \gamma^i\partial_i\right)\Pi\psi(t,\mathbf{x}) = \Pi\left(i\gamma^0\partial_t + \gamma^i\partial_i\right)\psi(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{۱۰۷}$$

این امر فقط وقتی ممکن است که داشته باشیم

$$\Pi\gamma^i = -\gamma^i\Pi \quad , \quad \Pi\gamma^0 = \gamma^0\Pi. \tag{۱۰۸}$$

که نشان می دهد Π متناسب با γ^0 است. ضریب تناسب را نیز می توان یک گرفت. در نتیجه داریم

$$\psi'(t,-\mathbf{x}) = \gamma^0\psi(t,\mathbf{x}). \tag{۱۰۹}$$

به این ترتیب تبدیل اسپینور دیراک تحت پاریته بدست می آید.

- مثال : یک اسپینور راست دست را در نظر می گیریم: می دانیم که $\gamma^5\psi = \psi$ تحت تبدیل پاریته داریم:

$$\psi' = \gamma_0\psi \tag{۱۱۰}$$

برای اینکه ببینیم اسپینور تبدیل یافته راست دست یا چپ دست است عملگر γ^5 را روی آن اثر می دهیم. خواهیم داشت:

$$\gamma^5\psi' = \gamma^5\gamma^0\psi = -\gamma^0\gamma^5\psi = -\gamma^0\psi = -\psi', \tag{۱۱۱}$$

که نشان می دهد اسپینور تبدیل یافته یک اسپینور چپ دست است. به این ترتیب دستوارگی یک اسپینور تحت تصویر در آینه معکوس می شود. این نتیجه با شهود و انتظار ما نیز سازگار است.

اگر تمرین های قبلی این درس را حل‌کرده باشید متوجه شده اید‌که در نمایش وایل ماتریس γ^5 به صورت زیر است:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}. \tag{۱۱۲}$$

به این ترتیب وقتی‌که این نمایش را به‌کار می بریم متوجه می شویم‌که اسپینور های زیر دارای پاریته مشخص هستند:

$$u_R^\alpha(p) = \begin{pmatrix} \phi^\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_L^\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^\alpha \end{pmatrix}. \tag{۱۱۳}$$

به این ترتیب یک اسپینور دیراک دارای پاریته مشخصی نیست و از ترکیب دو اسپینور با پاریته چپ و راست تشکیل شده است.

■ تمرین: اگر از نمایش دیراک برای ماتریس های‌گاما استفاده‌کنیم، اسپینورهای چپ دست و راست دست چه شکلی پیدا می‌کنند؟

۱.۵ هموردا‌های دو خطی

دیدیم‌که اسپینور دیراک تحت تبدیل لورنتز به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi \longrightarrow S\psi, \qquad \overline{\psi} \longrightarrow \overline{\psi}S^{-1}. \tag{۱۱۴}$$

■ تمرین: برای درک بهتر رابطه بالا، بهتر است یک بار تمرین زیر را حل‌کنید. نشان دهید‌که

$$\gamma^0 S \gamma^0 = S^{-1}. \tag{۱۱۵}$$

هم چنین می دانیم‌که تحت تبدیل پاریته اسپینور دیراک به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\psi \longrightarrow \gamma^0\psi \tag{۱۱۶}$$

از این رابطه می توان نتیجه‌گرفت‌که تحت پاریته:

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 \longrightarrow \psi^\dagger. \tag{۱۱۷}$$

به عنوان مثال می دانیم که تحت تبدیل لورنتز

$$\overline{\psi}\psi \longrightarrow \overline{\psi}S^{-1}S\psi = \overline{\psi}\psi. \tag{۱۱۸}$$

هم چنین تحت تبدیل پاریته

$$\overline{\psi}\psi \longrightarrow \psi^\dagger(\gamma^0\psi) = \overline{\psi}\psi. \tag{۱۱۹}$$

پس $\overline{\psi}\psi$ یک کمیت اسکالر است. حال کمیت $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ را در نظر می گیریم. تحت تبدیلات لورنتز داریم

$$\overline{\psi}\gamma^5\psi \longrightarrow \overline{\psi}S^{-1}\gamma^5 S\psi = \overline{\psi}\gamma^5\psi, \tag{۱۲۰}$$

که در آن از این استفاده کرده ایم که γ^5 با ماتریس های $\sigma_{\mu,\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ جابجا می شود. اما تحت تبدیل پاریته داریم:

$$\overline{\psi}\gamma^5\psi \longrightarrow \psi^\dagger\gamma^5\gamma_0\psi = -\overline{\psi}\gamma^5\psi. \tag{۱۲۱}$$

به این ترتیب کمیت $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ یک کمیت شبه اسکالر [۸] است.

■ تمرین: حال می توان از این روابط نتیجه گرفت که تبدیل کمیت های مختلفی که از ψ و $\overline{\psi}$ ساخته می شوند چگونه است. ما می توانیم کمیت های زیر را بسازیم:

$$\overline{\psi}\psi \ , \ \overline{\psi}\gamma^5\psi \ , \ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \ , \ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \ , \ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi \ , \ \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\psi. \tag{۱۲۲}$$

این کمیت ها که آنها را هموردهای دوخطی [۹] می نامند، از چپ به راست به ترتیب اسکالر، شبه اسکالر، بردار، شبه بردار، تانسور رتبه دو، و نهایتا شبه تانسور رتبه دو هستند. این خاصیت ها را ثابت کنید.

۶ رفتار اسپینور دیراک تحت وارونی بار

تا کنون در باره بار الکتریکی ذره دیراک چیزی نگفته ایم. برای این کار باید معادله دیراک را به طور هموردایی با میدان الکترومغناطیسی جفت کنیم . این کار به سادگی انجام می شود و روش آن نیز تعمیم همان روشی است که در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی دیده ایم. البته بعدها می

[۸] Pseudo Scalar

[۹] Bilinear Covariants

توانیم دلایل عمیق تری چه از نظر فیزیکی و چه انز نظر ریاضی برای این کار بیان کنیم. کاری که باید انجام دهیم این است که مشتق معمولی در معادله دیراک را با مشتق زیر موسوم به مشتق هموردا عوض کنیم:

$$D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu. \qquad (۱۲۳)$$

بنابراین معادله دیراک وقتی که با میدان الکتریکی جفت شود به صورت زیر نوشته می شود:

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu))\,\psi(x) = 0. \qquad (۱۲۴)$$

این معادله توصیف کننده یک ذره با جرم m و با بار الکتریکی و با جرم m است. در این رابطه e بار ذره و A_μ چهار بردار الکترومغناطیس است. حال سوال این است که آیا در دنیایی که معادله دیراک برای یک ذره با جرم m و بار الکتریکی e برقرار است، آیا می توان با استدلال ریاضی نتیجه گرفت که منطقا و ضرورتاً معادله دیراک برای ذره با جرم m و بار الکتریکی $-e$ نیز برقرار است یا خیر؟ برای یافتن پاسخ این سوال دقت می کنیم که اگر معادله (۱۲۴) را مزدوج کنیم به معادله زیر می رسیم:

$$(-i\gamma^{\mu *}(\partial_\mu + ieA_\mu))\,\psi^*(x) = 0. \qquad (۱۲۵)$$

حال توجه می کنیم که همه ماتریس ها بجز γ^2 حقیقی هستند و در واقع داریم

$$\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 = -(\gamma^\mu)^*. \qquad (۱۲۶)$$

بنابراین با قرار دادن این رابطه در معادله (۱۲۵) به این نتیجه می رسیم که

$$\left(i\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2(\partial_\mu + ieA_\mu)\right)\psi^*(x) = 0. \qquad (۱۲۷)$$

اگر طرفین این معادله را در γ^2 ضرب کنیم و قرار دهیم $\psi_c = \eta\psi^*$ که در آن η یک ضریب ثابت است، به معادله زیر می رسیم:

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu))\,\psi_c(x) = 0. \qquad (۱۲۸)$$

بنابراین، نتیجه منطقی و ریاضی اینکه ذره ای با جرم m و بار الکتریکی e در معادله دیراک صدق می کند، این است که ذره ای با همان جرم ولی با بار $-e$ نیز در معادله دیراک صدق می کند. دقت کنید که علی الاصول می توان معادله دیراک را برای هر ذره ای با هر باری نوشت و همه این معادلات درست هستند ولی هیچکدام آنها نتیجه منطقی معادله دیراک برای بار e نیستند مگر معادله ای که وجود ذره ای با بار $-e$ را در خود دارد. به این معنا این معادله دارای یک پیش بینی برای پادذرات است. با توجه به اینکه می بایست داشته باشیم $(\psi_c)_c = \psi,$ معلوم می شود که η یک فاز خالص است. این فاز خالص را می توان برابر با یک گرفت.

۷ میدان دیراک

مثل همه میدان های دیگر برای بدست آوردن تفسیرذره ای از میدان می بایست میدان دیراک آزاد را کوانتیزه کنیم. لاگرانژی میدان دیراک آزاد به شکل زیراست:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_m - m)\psi \tag{129}$$

■ تمرین: الف: با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ و با وردش این لاگرانژی نسبت به $\overline{\psi}$ معادله دیراک را بدست بیاورید.

ب: با وردش گرفتن نسبت به ψ نیز معادله دیراک را بدست آورید.

از فرم لاگرانژی می فهمیم که تکانه های مزدوج عبارت خواهند بود از:

$$\pi_\alpha = \psi_\alpha^\dagger \tag{130}$$

و هامیلتونی به شکل زیر خواهد بود:

$$H = \int d^3x \overline{\psi}(-i\gamma^k \partial_k + m)\psi \tag{131}$$

هم چنین به خاطر تقارن $\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi$ جریان پایسته و بارپایسته زیر وجود دارند:

$$J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \qquad Q = \int d^3x \psi^\dagger \psi \tag{132}$$

چنانکه می دانیم درتصویر هایزنبرگ نقطه شروع کوانتش حل معادله حرکت از یک طرف و روابط کوانتش همزمان از طرف دیگراست. با توجه به آنچه که دربخش قبل گفته شد کلی ترین حل معادله دیراک به شکل زیر خواهد بود

$$\psi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\left(b_i(\mathbf{p})u^i(\mathbf{p})e^{-i(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + d_i^\dagger(\mathbf{p})v^i(\mathbf{p})e^{i(Et+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\right) \tag{133}$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\left(b_i^\dagger(\mathbf{p}){u^i}^\dagger(\mathbf{p})e^{i(Et+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + d_i(\mathbf{p}){v^i}^\dagger(\mathbf{p})e^{-i(Et+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right) \tag{134}$$

که درآن روی اندیس های $i = 1,2$ جمع شده است و $b_i(\mathbf{p})$ و $d_i(\mathbf{p})$ عملگرهایی هستند که می بایست روابط بین آنها با توجه به روابط همزمان بین عملگرهای $\psi(\mathbf{x},t)$ و $\psi^\dagger(\mathbf{y},t)$ تعیین شوند. برای این کار می بایست بتوانیم این عملگرها را برحسب میدان ها بدست آوریم. از روابط تعامدی که بدست آوردیم استفاده می کنیم و این روابط را به صورت مولفه ای می نویسیم:

$$\sum_\alpha u^{i*}_\alpha(\mathbf{p})u^j_\alpha(\mathbf{p}) = \sum_\alpha v^{i*}_\alpha(\mathbf{p})v^j(\mathbf{p})_\alpha = \frac{E}{m}\delta_{ij} \tag{۱۳۵}$$

$$\sum_\alpha u^{i*}_\alpha(\mathbf{p})v^j_\alpha(\mathbf{p}) = 0 \tag{۱۳۶}$$

حال با توجه به روابط (133) و روابط تعامد بالا بدست می آوریم :

$$\begin{aligned}
b_i(\mathbf{p}) &= \sum_\alpha \int d^3x u^{i*}_\alpha(\mathbf{p})\psi_\alpha(\mathbf{x},t)e^{i(\mathcal{E}t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\\
d_i(\mathbf{p}) &= \sum_\alpha \int d^3x v^{i*}_\alpha(\mathbf{p})\psi^\dagger_\alpha(\mathbf{x},t)e^{i(\mathcal{E}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\\
b^\dagger_i(\mathbf{p}) &= \sum_\alpha \int d^3x u^{i}_\alpha(\mathbf{p})\psi^\dagger_\alpha(\mathbf{x},t)e^{-i(\mathcal{E}t-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}\\
d^\dagger_i(\mathbf{p}) &= \sum_\alpha \int d^3x v^{i*}_\alpha(\mathbf{p})\psi_\alpha(\mathbf{x},t)e^{i(\mathcal{E}t+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}
\end{aligned} \tag{۱۳۷}$$

درکوانتش میدان دیراک بجای روابط جابجایی فرض می‌کنیم که بین میدان ها کانونیک روابط پادجابجایی برقرارباشد به این معنا که فرض می‌کنیم :

$$\begin{aligned}
&\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi_\beta(\mathbf{y},t)\} = \{\psi^\dagger_\alpha(\mathbf{x},t),\psi^\dagger_\beta(\mathbf{y},t)\} = 0\\
&\{\psi_\alpha(\mathbf{x},t),\psi^\dagger_\beta(\mathbf{y},t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\beta x-\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{۱۳۸}$$

با کمی محاسبه و استفاده از روابط (137) بدست می آوریم:

$$\{b_\alpha, b^\dagger_\beta\} = (2\pi)^3\frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{۱۳۹}$$

$$\{d_\alpha, d^\dagger_\beta\} = (2\pi)^3\frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{۱۴۰}$$

بااستفاده از روابط (133) می توان فرم هامیلتونی و بار پایسته را نیز بدست آورد. نتیجه آن است که:

$$H=\sum_{i=1}^{2}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}E\left(b_i^\dagger(\mathbf{p})b_i(\mathbf{p})-d_i(\mathbf{p})d_i^\dagger(\mathbf{p})\right) \tag{۱۴۱}$$

$$Q=\sum_{i=1}^{2}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}\left(b_i^\dagger(\mathbf{p})b_i(\mathbf{p})+d_i(\mathbf{p})d_i^\dagger(\mathbf{p})\right) \tag{۱۴۲}$$

دراینجا نیز مثل میدان کلاین گوردون می بایست هامیلتونی و بار پایسته را بهنجارکنیم. برای سادگی یک نوسانگر فرمیونی را باهامیلتونی زیر درنظر می‌گیریم:

$$H=\omega(b^\dagger b-dd^\dagger) \tag{۱۴۳}$$

و هامیلتونی بهنجارشده را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}:H: \quad &:= \quad \omega(b^\dagger b-dd^\dagger)-\omega\langle 0|(b^\dagger b-dd^\dagger)|0\rangle\\ &= \quad \omega(b^\dagger b-dd^\dagger+1)=\omega(b^\dagger b+d^\dagger d)\end{aligned} \tag{۱۴۴}$$

هم چنین می توان بارپایسته را نیز بهنجارکرد و تقاضاکردکه بارپایسته برای خلاء مساوی صفر باشد. دراین صورت برای مدل ساده نوسانگر ساده خود خواهیم داشت

$$Q=(b^\dagger b+dd^\dagger) \tag{۱۴۵}$$

$$\begin{aligned}:Q: \quad &:= \quad (b^\dagger b+dd^\dagger)-\langle 0|(b^\dagger b+dd^\dagger)|0\rangle\\ &= \quad (b^\dagger b+dd^\dagger)-1=(b^\dagger b-d^\dagger d)\end{aligned} \tag{۱۴۶}$$

درنتیجه برای هامیلتونی دیراک و بارپایسته آن خواهیم داشت:

$$:H:=\sum_{i=1}^{2}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}E\left(b_i^\dagger(\mathbf{p})b_i(\mathbf{p})+d_i^\dagger(\mathbf{p})d_i(\mathbf{p})\right) \tag{۱۴۷}$$

$$Q = -e \sum_{i=1}^{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \left(b_i^\dagger(\mathbf{p}) b_i(\mathbf{p}) - d_i^\dagger(\mathbf{p}) d_i(\mathbf{p}) \right) \tag{۱۴۸}$$

این روابط نشان می دهند که عملگرهای $b_i(\mathbf{p})$ و $d_i(\mathbf{p})$ به ترتیب خلق‌کننده الکترون و پوزیترون با تکانه $\mathbf{k}$ هستند.