صورت بندی انتگرال مسیر از مکانیک کوانتومی و نظریه میدان کوانتومی

بخش اول

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۱۱ دی ۱۳۹۶

۱ مقدمه

روش انتگرال مسیر [۱] در ابتدا توسط ریچارد فاینمن [۲] برای توصیف متفاوتی از دینامیک کوانتومی ابداع شد اما از آن زمان تا کنون کارایی خود را برای مطالعه همه جانبه مکانیک کوانتومی و هم چنین میدان های کوانتومی نشان داده است. هم چنین این روش نشان داده است که ارتباط خیلی نزدیکی از نظر فرمالیزم بین مکانیک کوانتومی از یک طرف و مکانیک آماری از طرف دیگر وجود دارد. در این درس می خواهیم صورت بندی مکانیک کوانتومی را به روش انتگرال مسیر مطالعه کنیم، روش های محاسبه آن را یاد بگیریم و تا جایی که چارچوب این درس اجازه می دهد آن را بسط و گسترش دهیم.

در درس گذشته دیدیم که اساسی ترین کمیت هایی که در نظریه میدان کوانتومی مطرح هستند عبارتند از توابع همبستگی یا توابع چند نقطه ای که آن ها را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N))|0\rangle \tag{۱}$$

که درآنها T به معنای مرتب کردن زمانی است و حالت $\langle 0|$ حالت خلاء یا حالت پایه هامیلتونی است. دراین درس نشان می دهیم که درفرمول بندی انتگرال مسیر این کمیت ها را می توان به شکلی درآورد که یادآور توابع همبستگی در مکانیک آماری است. این خاصیت حلقه اتصال مکانیک

[۱] Path Integral Method

[۲] Richard Feynman

کوانتومی و مکانیک آماری و یا نظریه میدان کوانتومی و نظریه میدان آماری است . برای فهم این اتصال کار خود را از ابتدا یعنی از توضیح فرمول بندی انتگرال مسیر برای مکانیک کوانتومی شروع می کنیم. ما در اینجا تنها به مفاهیم اساسی توجه می کنیم و فرصتی برای پرداختن به جزئیات فنی انتگرال مسیر در نظریه های میدان کوانتومی برای فرمیون ها و یا میدان های پیمانه ای نیست.

۲ صورت بندی انتگرال مسیر برای مکانیک کوانتومی

نخست یک ذره آزاد با هامیلتونی $H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ در نظر می گیریم. درلحظه t این ذره درست درمکان q قرار دارد و حالت آن $|q\rangle$ است. می خواهیم بدانیم که درزمان t' دامنه احتمال این که ذره در نقطه q' باشد چقدراست. درصورت بندی مکانیک کوانتومی می دانیم این دامنه برابر است با:

$$\langle q', t'|q, t\rangle := \langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle \tag{۲}$$

نخست قرار دارهای خود را مشخص می کنیم:

$$q_N := q', \quad q_0 := q, \quad t_N := t', \quad t_0 := t, \quad t' - t := N\epsilon, \quad t_k := t_0 + k\epsilon \tag{۳}$$

حال می توانیم بنویسیم:

(۴)

$$\langle q', t'|q, t\rangle := \langle q_N|e^{-\frac{i}{\hbar}NH\epsilon}|q_0\rangle = \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \langle q_N|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{N-2}\rangle \cdots \langle q_1|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_0\rangle$$

حال یکی از عناصر ماتریسی را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} &\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{k-1}\rangle = \langle q_k|e^{-i\epsilon\frac{\hat{p}^2}{2m}}|q_{k-1}\rangle \\ = &\int dp \langle q_k|e^{-i\epsilon\frac{\hat{p}^2}{2m}}|p\rangle\langle p|q_{k-1}\rangle \\ = &\int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-i\epsilon\frac{p^2}{2m} + i\hbar(q_k - q_{k-1})p)} \end{aligned} \tag{۵}$$

درعبارت آخری روی p انتگرال می گیریم و از رابطه

$$\int dp e^{i\frac{1}{2}\alpha p^2 + i\beta p} = \sqrt{\frac{2\pi}{i\alpha}} e^{\frac{i\beta^2}{\alpha}} \tag{۶}$$

[۳] استفاده می‌کنیم و بدست می آوریم:

$$\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H}|q_{k-1}\rangle = Ce^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\left(\frac{m}{2}(\frac{q_k-q_{k-1}}{\epsilon})^2\right)} \quad (۷)$$

که درآن $C=\sqrt{\frac{m}{2\pi\epsilon i\hbar}}$.

دقت‌کنیدکه C یک عدد ثابت است‌که بستگی به ثابت های ϵ $\hbar$ و m و نظایر آن دارد ولی به متغیرهای دینامیکی و زمان ها ندارد.

با قراردادن 5 در رابطه 2 وگرفتن حد $N\longrightarrow\infty,\quad \epsilon\longrightarrow 0, N\epsilon=t'-t$ درمی یابیم‌که:

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}\dot{q}^2 d\tau} \quad (۸)$$

که درآن شرط روی تمام مسیر های با شرایط مرزی $q(t)=q,\quad q(t')=q'$ انتگرال‌گرفته می شود. دراین عبارت منظور از Dq عبارت زیر است :

$$Dq = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} C^N \prod_{i=1}^{N} dq_i \quad (۹)$$

تا‌کنون فرض‌کردیم‌که ذره آزاد است. حال اگر ذره آزاد نباشد و هامیلتونی آن برابر با $H=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{q})$ باشد، همه مراحل قبلی را تا محاسبه عنصر ماتریسی $\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H}|q_{k-1}\rangle$ تکرار می‌کنیم . حال در این جا تنها به یک نکته توجه می‌کنیم و آن اینکه

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{q}))} = e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(\hat{q})}e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{\hat{p}^2}{2m}} + O(\epsilon^2)$$

و در نتیجه با توجه به اینکه محاسبه هر عنصر ماتریسی تا مرتبه ϵ صورت می‌گیرد، می توانیم بنویسیم :

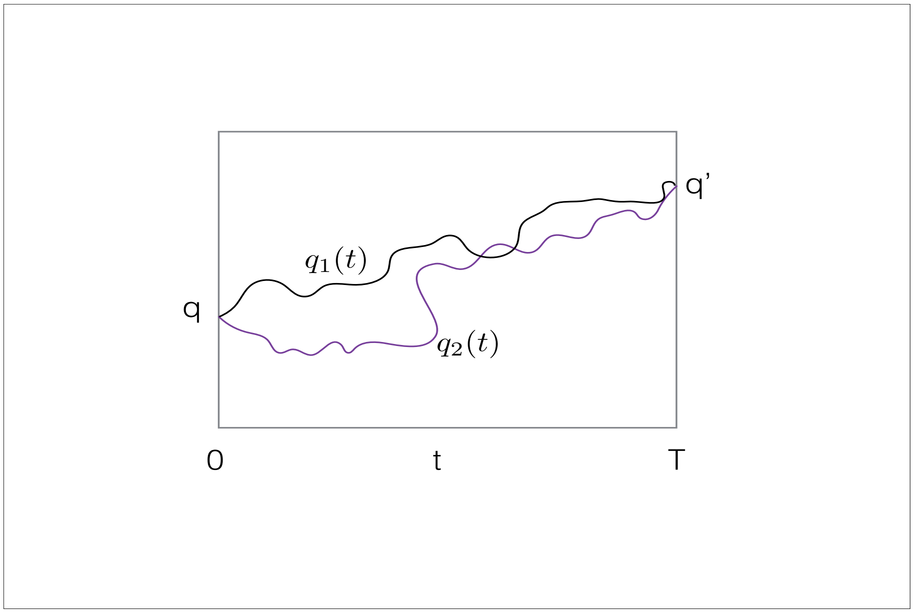
$$\begin{aligned}\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{k-1}\rangle &= \langle q_k|e^{-i\hbar\epsilon V(\hat{q})}e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{\hat{p}^2}{2m}}|q_{k-1}\rangle \\ &= e^{-i\hbar\epsilon V(q_k)}\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{\hat{p}^2}{2m}}|q_{k-1}\rangle = Ce^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\left(\frac{m}{2}(\frac{q_k-q_{k-1}}{\epsilon})^2-V(q_k)\right)}\end{aligned} \quad (۱۰)$$

حال اگر در این عبارت آخری روی p انتگرال بگیریم‌که البته نیاز به محاسبه دوباره ندارد می فهمیم تنها تغییری‌که حاصل شده این است‌که یک جمله به انرژی جنبشی اضافه شده است و عبارت‌کامل عنصر ماتریسی برابر است با:

$$\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{k-1}\rangle = Ce^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\left(\frac{m}{2}(\frac{q_k-q_{k-1}}{\epsilon})^2-V(q_k)\right)} = Ce^{\frac{i\epsilon}{\hbar}L(q,\dot{q})} \quad (۱۱)$$

بنابراین نتیجه نهایی این است‌که :

[۳].این محاسبه طبیعتا شک و تردید خواننده را بر می انگیزد. توضیح بیشتر در این مورد را می توانید در ضمیمه این درس ببینید



شکل ۱: انتگرال مسیر : مسیرهای مختلف با دامنه های احتمال مختلف طی می شوند. دو نمونه از مسیرها نشان داده شده اند.

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau),\tau)dt} = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{۱۲}$$

که درآن روی تمام مسیر های با شرایط مرزی $q(t) = q, \quad q(t') = q'$ انتگرال گرفته می شود. دراین عبارت منظور از Dq عبارت زیر است :

$$Dq = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} C^N \prod_{i=1}^{N} dq_i \tag{۱۳}$$

رابطه ۳۶ بیان می‌کند که ذره برای رسیدن از نقطه q به نقطه q' تمامی مسیرهای ممکن را هرکدام با یک دامنه احتمال معین طی می‌کند و دامنه احتمال کل جمع تمامی این دامنه هاست. برای هر مسیر $q(t)$ نیز دامنه احتمال چیزی نیست جز $e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}$ که در آن $S[q]$ کنش مربوط به آن مسیر است.

آنچه راکه حساب‌کرده ایم دامنه عبور یک ذره از یک نقطه معین به یک نقطه معین دیگر است. این عبارت اصطلاحا انتشارگر [۴] نامیده می شود. با استفاده از این عبارت می توانیم تحول توابع حالت دلخواه را نیز پیداکنیم. به عبارت دیگر فرض کنیدکه در لحظه t تابع موج ذره ذره

[۴] propagator

$\psi(q,t)$ باشد. می توانیم تابع موج ذره را در لحظه t' بدست بیاوریم:

$$|\psi(t')\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|\psi(t)\rangle = \int dq' \int dq |q'\rangle\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle\langle q|\psi(t)\rangle \tag{۱۴}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}\psi(q',t') &= \langle q'|\psi(t')\rangle = \int dq \langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle \psi(q,t) \\ &= \int dq \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}\psi(q,t)\end{aligned} \tag{۱۵}$$

دقت کنید که در اینجا Dq به معنای انتگرال گیری روی تمام مسیرهایی است که نقطه شروع و انتهای آنها ثابت است. اما $dqDq$ ثابت بودن نقطه اولیه را از بین می برد و به معنای آن است که روی نقطه اولیه نیز انتگرال می گیریم. تا کنون تنها دامنه احتمال گذار از یک نقطه به یک نقطه دیگر را حساب کردیم. اکنون تابع همبستگی یک مشاهده پذیر مکان را نیز محاسبه می کنیم. مشاهده پذیر مورد نظر ما عبارت است از:

$$\hat{Q}(t_1) = e^{iHt_1}\hat{Q}e^{-iHt_1} \qquad t < t_1 < t'. \tag{۱۶}$$

که در واقع عملگر مکان در تصویر هایزنبرگ است. آنچه را که می خواهیم محاسبه کنیم عبارت است از:

$$\langle q',t'|\hat{Q}(t_1)|q,t\rangle \tag{۱۷}$$

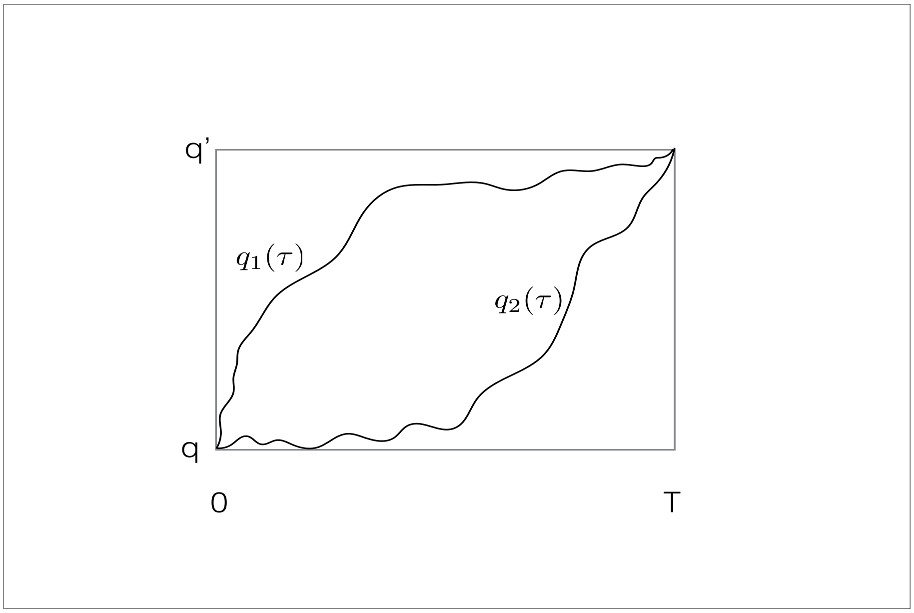
که در واقع برابر است با:

$$\langle q'|e^{\frac{-i}{\hbar}t'H}e^{iHt_1}\hat{Q}e^{-iHt_1}e^{\frac{i}{\hbar}tH}|q\rangle = \langle q'|e^{\frac{-i}{\hbar}(t'-t_1)H}\hat{Q}e^{-iH(t_1-t)}|q\rangle \tag{۱۸}$$

با بازکردن یک عملگر واحد به صورت $\int dq_1|q_1\rangle\langle q_1|$ بلافاصله قبل از $\hat{Q}$ یا به عبارت دیگر در زمان t_1 و سپس استفاده از رابطه انتگرال مسیر به نتیجه زیر می رسیم:

$$\langle q',t'|\hat{Q}(t_1)|q,t\rangle = \int dq_1 \int D^{(2)}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t'} Ld\tau} q_1 \int D^{(1)}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t_1} Ld\tau}. \tag{۱۹}$$

این انتگرال شامل یک دو انتگرال مسیر و یک انتگرال معمولی است. انتگرال مسیر اول با اندازه $D^{(1)}q$ روی تمامی مسیرهای بین نقاط ثابت q و q_1 است. انتگرال مسیر دوم با اندازه $D^{(2)}q$ روی تمام مسیرهای بین نقاط ثابت q_1 و q' است. انتگرال معمولی روی نقطه q باعث می شود که ثابت بودن نقطه q_1 از بین برود. به عبارت دیگر اندازه $D^{(1)}qD^{(2)}qdq_1 = Dq$ که در آن Dq انتگرال روی تمامی مسیرهایی است که از نقطه q به نقطه q' وصل می شوند. با نامگذاری q_1 به صورت $q(t_1)$ در می یابیم که (۱۹) را می توان به صورت زیر نوشت:



شکل ۲: در مسیر $q_1(\tau)$ ذره بیشتر وقتش را در نزدیکی q طی کرده و در مسیر $q_2(\tau)$ ذره بیشتر وقتش را در نزدیکی q' سپری کرده است. متوسط $\langle q', t'|\hat{Q}(t_1)|q, t\rangle$ نشان می دهد که در لحظه t_1 به طور متوسط کجا بوده است.

$$\langle q', t'|\hat{Q}(t_1)|q, t\rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L d\tau} q_(t_1). \tag{۲۰}$$

طرف راست این عبارت در واقع معنای فیزیکی آن را نیز روشن می‌کند. این عبارت می خواهد روشن کند که ذره وقتی که همه مسیرها را برای پیمودن انتخاب کرده است در زمان t_1 به طور متوسط کجا بوده است.

دقت کنید که اگر به جای $\hat{Q}(t)$ مشاهده پذیر $F(\hat{Q})(t)$ نیز در طرف چپ قرار بگیرد، در طرف راست کمیت کلاسیک $F(q(t))$ در انتگرال ظاهر خواهد شد. هم چنین یک سوال طبیعی این است که اگر به جای مشاهده پذیر مکان یعنی $\hat{Q}(t_1)$ مشاهده پذیر تکانه یعنی $\hat{P}(t_1)$ را بخواهیم حساب کنیم، چگونه باید پیش برویم. برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که در تصویر هایزنبرگ رابطه عملگرها همان رابطه کلاسیک است یعنی اینکه :

$$\hat{P}(t) = m\frac{d}{dt}\hat{Q}(t). \tag{۲۱}$$

بنابراین به سادگی می توان نوشت:

$$\langle q',t'|\hat{P}(t_1)|q,t\rangle = m\frac{d}{dt_1}\langle q',t'|\hat{Q}(t_1)|q,t\rangle = m\frac{d}{dt_1}\int Dqe^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}Ld\tau}q_(t_1) = \int Dqe^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}Ld\tau}m\dot{q}_(t_1). \quad (۲۲)$$

به این ترتیب متوسط هر نوع مشاهده پذیری را می توانیم از روش انتگرال مسیر محاسبه کنیم. به همین ترتیب می توانیم توابع همبستگی دو نقطه ای یعنی کمیت های زیر را نیز حساب کنیم.

$$\langle q',t'|T(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2))|q,t\rangle \quad (۲۳)$$

این کمیت نشان می دهد که چه مقدار بین مکان ذره در لحظه t_1 و مکان آن در لحظه t_2 همبستگی وجود دارد. با محاسبات مشابه آنچه که در بالا بیان شد می توان نشان داد:

$$\langle q',t'|T(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2))|q,t\rangle = \int Dqq(t_1)q(t_2)e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \quad (۲۴)$$

که درآن روی تمام مسیر هایی انتگرال گرفته می شود که شرط مرزی $q(t)=q$ و $q(t')=q'$ را برآورده می کنند.

این رابطه به راحتی به توابع همبستگی دلخواه تعمیم داده می شود: یعنی

$$\langle q',t'|T(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)\cdots\hat{Q}(t_n))|q,t\rangle = \int Dqq(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \quad (۲۵)$$

دقت کنید که در طرف راست $q_(t_n)$ ها همه کمیت های کلاسیک هستند که با هم جابجا می شوند اما در طرف چپ $\hat{Q}(t_n)$ ها اپراتورهایی هستند که با هم جابجا نمی شوند. ممکن است از خود سوال کنیم که چگونه عبارت طرف راست که در آن می توان به عنوان مثال $q(t_1)$ را با $q(t_2)$ جابجا کرد، می تواند با طرف چپ که در آن ظاهراً نمی توان $\hat{Q}(t_1)$ را با $\hat{Q}(t_2)$ جابجا کرد مساوی باشد. پاسخ این است که اگر چه

$$\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2) \neq \hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)$$

اما

$$T\left(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)\right) = T\left(\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)\right)$$

زیرا تحت عملگر مرتب سازی زمان مستقل از اینکه اپراتورهای Q چه هستند همه بر اساس یک ترتیب زمانی مشخص مرتب می شوند.

البته آن چه‌که بیشتر اهمیت دارد محاسبه تابع همبستگی روی یک حالت معین به خصوص حالت پایه است. حال می خواهیم توابع همبستگی را روی حالت پایه هامیلتونی‌که آن را با $\langle 0|$ نشان می دهیم حساب‌کنیم. حالت پایه را با $\langle \psi_0|$ نشان می دهیم و داریم

$$H|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle \quad , \quad E_0 < E_n \quad \forall\, n. \tag{۲۶}$$

در عبارت بالا E_n ها انرژی حالت های برانگیخته است. فرض بر این است‌که یک‌گاف انرژی بین حالت پایه و حالت های برانگیخته وجود دارد و حالت پایه نیز واگن نیست. برای محاسبه در طرف چپ روابط (36) و (32) حد $t \longrightarrow -\infty$ و $t' \longrightarrow +\infty$ را می‌گیریم و توجه می کنیم‌که پس از بازکردن یک پایه از ویژه حالت های انرژی در لابلای عنصر ماتریسی در هر دو رابطه نوسانات خیلی زیاد جملات دیگر نسبت به جمله حالت پایه، باعث می شود‌که درهردو تنها سهم حالت پایه باقی بماند. بنابراین درحد فوق این دورابطه به شکل زیر درخواهند آمد:

$$\langle q'|\psi_0\rangle\langle\psi_0|q\rangle e^{-iE_0(t'-t)} = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} L(q(\tau),\dot{q}(\tau),\tau)dt} \tag{۲۷}$$

و

$$\langle q'|\psi_0\rangle\langle\psi_0|T(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2))|\psi_0\rangle\langle\psi_0|q\rangle e^{-iE_0(t'-t)} = \int Dq q(t_1)q(t_2) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \tag{۲۸}$$

که درهردو آنها حد $t \longrightarrow -\infty$ و $t' \longrightarrow +\infty$ مورد نظر است و E_0 انرژی حالت پایه است.

با تقسیم این دو عبارت برهم بدست می آوریم:

$$\langle\psi_0|T(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2))|\psi_0\rangle = \frac{\int Dq q(t_1)q(t_2) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}}{\int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}} \tag{۲۹}$$

استدلال فوق براحتی به توابع همبستگی بالاتر تعمیم می یابد و نتیجه آن است‌که:

$$\langle\psi_0|T(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)\cdots\hat{Q}(t_n))|\psi_0\rangle = \frac{\int Dq q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}}{\int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}} \tag{۳۰}$$

این رابطه نشان می دهد چگونه می توان توابع همبستگی مشاهده پذیرهای مختلف را روی حالت پایه با استفاده از روش انتگرال مسیر حساب‌کرد. باید روی این رابطه و اهمیت آن تاکید‌کنیم. طرف چپ نشان دهنده هر نوع تابع هم بستگی عملگرها روی حالت پایه است. اما در طرف راست تنها‌کمیت های‌کلاسیک وجود دارند و مثل این است‌که یک نوع متوسط‌کلاسیک از این‌کمیت های‌کلاسیک با تابع توزیعی $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ گرفته شده است.

۳ انتگرال مسیر برای میدان ها

آنچه که تا کنون برای مکانیک کوانتومی سیستمی با یک درجه آزادی بیان کردیم براحتی به سیستم هایی با N درجه آزادی تعمیم پیدا می کند. هرگاه قرار دهیم $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots q_N)$ انگاه کافی است در تمامی روابط بالا تعمیم ساده ای انجام دهیم. به این ترتیب رابطه (۳۶) تبدیل می شود به:

$$\langle \mathbf{q}', t' | \mathbf{q}, t \rangle = \int D\mathbf{q} e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(\mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau), \tau) d\tau} = \int D\mathbf{q} e^{\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{q}]}. \tag{۳۱}$$

برای تعمیم توابع همبستگی نظیر (۳۲) دقت می کنیم که در این حالت می توانیم توابع همبستگی متغیرهای مختلف را در زمان های مختلف حساب کنیم. با تکرار همان استدلالات و محاسبات به نتیجه زی می رسیم:

$$\langle q', t' | T(\hat{Q}_i(t_1) \hat{Q}_j(t_2)) | q, t \rangle = \int D\mathbf{q} \mathbf{q}_i(t_1) \mathbf{q}_j(t_2) e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(\mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)) d\tau} \tag{۳۲}$$

که در آن :

$$\hat{Q}_i(t_1) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{Q}_i e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}. \tag{۳۳}$$

هم چنین رابطه (۳۸) به صورت زیر تعمیم پیدا می کند:

$$\langle \psi_0 | T(\hat{Q}_{i_1}(t_1) \hat{Q}_{i_2}(t_2) \cdots \hat{Q}_{i_n}(t_n)) | \psi_0 \rangle = \frac{\int D\mathbf{q} q_{i_1}(t_1) q_{i_2}(t_2) \cdots q_{i_n}(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau}}{\int D\mathbf{q} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)) d\tau}} \tag{۳۴}$$

حال برای گذار از N متغیر گسسته به میدان ها راه کمی باقی مانده است، شکل (؟؟) در این صورت متغیرها به شکل زیر تعمیم پیدا می کنند:

$$\begin{aligned} q_i &\longrightarrow \phi(x) \\ q_i(t) &\longrightarrow \phi(x,t) \\ \hat{Q}_i(t) &\longrightarrow \hat{\phi}(x,t), \end{aligned} \tag{۳۵}$$

که در آنها x نماینده یک یا چند مختصه فضایی است که میدان روی آن تعریف شده است. در نتیجه روابط بالا به شکل زیر تعمیم پیدا می کنند:

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L[\phi] d\tau} = \int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)} \qquad (۳۶)$$

در طرف راست رابطه $L[\phi]$ لاگرانژی است که به عنوان یک تابعی از میدان ϕ نوشته شده است و $\mathcal{L}$ چگالی لاگرانژی است که به عنوان یک تابع از ϕ و مشتقات فضایی و زمانی آن نوشته شده است. انتگرال نهایی یعنی $\int dx$ نیز به عنوان انتگرال روی تمام فضا و زمان نوشته شده است. و نهایتا توابع همبستگی به شکل زیر در می آیند:

$$\langle \Psi_0 | T(\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2) \cdots \hat{\phi}(x_n, t_n) | \Psi_0 \rangle = \frac{\int D\phi \, \phi(x_1, t_1)\phi(x_2, t_2) \cdots \phi(x_n, t_n) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} L[\phi] d\tau}}{\int D\phi \, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} L[\phi] d\tau}} \qquad (۳۷)$$

و یا اگر همه چیز را بر حسب چگالی لاگرانژی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\langle \Psi_0 | T(\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2) \cdots \hat{\phi}(x_n, t_n) | \Psi_0 \rangle = \frac{\int D\phi \, \phi(x_1, t_1)\phi(x_2, t_2) \cdots \phi(x_n, t_n) e^{\frac{i}{\hbar}\int dx \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu)}}{\int D\phi \, e^{\frac{i}{\hbar}\int dx \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu)}} \qquad (۳۸)$$

- **یک نکته در مورد نمادها:** با توجه به رابطه بالا خیلی از اوقات ما تابع همبستگی را به شکل زیر می نویسیم:

$$\langle \phi(x_1, t_1)\phi(x_2, t_2) \cdots \phi(x_n, t_n) \rangle = \frac{\int D\phi \, \phi(x_1, t_1)\phi(x_2, t_2) \cdots \phi(x_n, t_n) e^{\frac{i}{\hbar}\int dx \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu)}}{\int D\phi \, e^{\frac{i}{\hbar}\int dx \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu)}} \qquad (۳۹)$$

و این موضوع را در ذهن نگاه می داریم که این عبارت برابر است با یک متوسط کوانتومی، یعنی همان سمت چپ رابطه (۳۸).

۴ انتگرال مسیر اقلیدسی

تا کنون چه در مکانیک کوانتومی و چه در نظریه میدان کوانتومی با انتگرال مسیر مینکوسکی یعنی انتگرال مسیر در فضازمان مینکوسکوی سروکار داشته ایم. حال تمامی روابطی را که تا کنون به دست آورده ایم مجددا و به عنوان توابعی از متغیر حقیقی t نگاه می کنیم. هرگاه در این تساوی ها جایگزینی های ساده ای انجام دهیم، چیزی که بدست می آوریم انتگرال مسیر اقلیدسی نامیده می شود. انتگرال مسیر اقلیدسی از نظر ریاضی خوش تعریف تر از انتگرال مسیر مینکوسکوی است. در واقع یک راه این است که از همان ابتدا انتگرال مسیر اقلیدسی را تعریف کرد و سپس

جایگزینی معکوس را انجام دهیم و به انتگرال مسیر مینکوسکی برسیم. برای فهم این تبدیلات به رابطه نخستینی که در انتگرال مسیر داشتیم توجه می کنیم:

$$\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T}|q\rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\left(\frac{1}{2}m\frac{dq}{dt}^2 - V(q)\right)} \qquad (۴۰)$$

حال جایگزینی زیر را انجام می دهیم:

$$\tau := it \quad , \quad \longrightarrow \quad \mathcal{T} = iT \quad , \quad dt = -id\tau \qquad (۴۱)$$

در نتیجه رابطه قبلی تبدیل به رابطه زیر می شود:

$$\langle q'|e^{-\frac{\mathcal{T}}{\hbar}\hat{H}}|q\rangle = \int \tilde{D}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\mathcal{T}} -id\tau\left(\frac{-1}{2}m\frac{dq}{d\tau}^2 - V(q)\right)} = \int \tilde{D}q e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\mathcal{T}} d\tau\left(\frac{1}{2}m(\frac{dq}{d\tau})^2 + V(q)\right)} \qquad (۴۲)$$

انتگرال مسیر اقلیدسی نه تنها از نظر ریاضی باعث خوش تعریف تر شدن انتگرال مسیر می شود بلکه حلقه اتصالی است که با کمک آن می توانیم بین مکانیک کوانتومی و مکانیک آماری ارتباط برقرار کنیم. این ارتباط به دو طریق انجام می شود که در زیر آنها را توضیح می دهیم.

۱.۴ رابطه بین مکانیک کوانتومی و مکانیک آماری - نوع اول

نخست توجه می کنیم که اگر در رابطه ی (۴۲) نقاط اول و آخر مسیر را یکی کنیم و روی آن انتگرال بگیریم به رابطه زیر می رسیم:

$$\int dq\langle q|e^{-\frac{\mathcal{T}}{\hbar}\hat{H}}|q\rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\mathcal{T}} -id\tau\left(\frac{-1}{2}m\frac{dq}{d\tau}^2 - V(q)\right)} = \int Dq e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^{\mathcal{T}} d\tau\left(\frac{1}{2}m(\frac{dq}{d\tau})^2 + V(q)\right)} \qquad (۴۳)$$

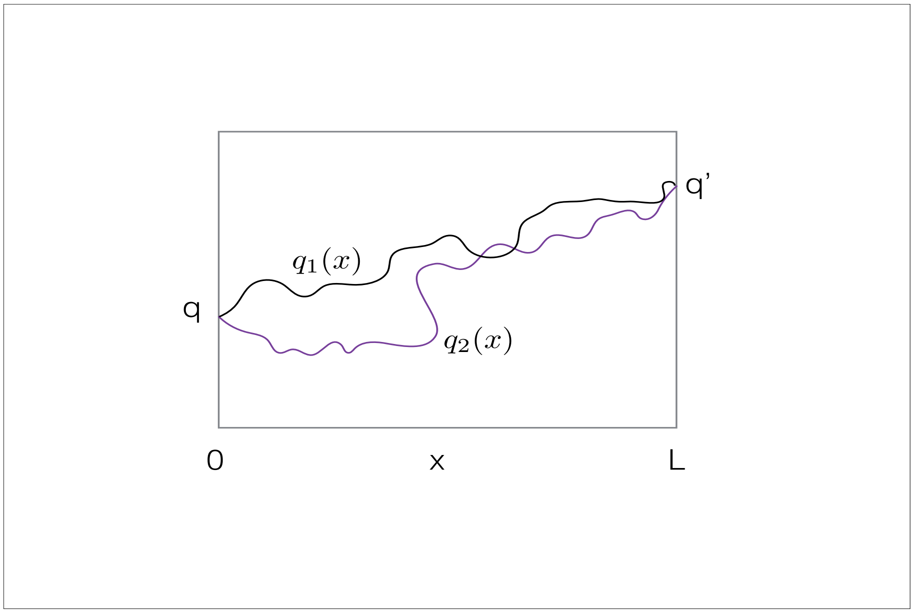
حال اگر در طرفین این رابطه جایگزینی زیر را انجام دهیم:

$$\hbar = 1, \qquad \mathcal{T} = \beta \qquad (۴۴)$$

به یک عبارت آشنا یعنی تابع پارش یک سیستم کوانتومی می رسیم.

$$Z(\beta) = tr(e^{-\beta\hat{H}}) = \int dq\langle q|e^{-\beta\hat{H}}|q\rangle = \int Dq e^{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q)\right]} \qquad (۴۵)$$

به این ترتیب تابع پارش یک سیستم کوانتومی به عنوان انتگرال مسیر اقلیدسی از یک سیستم کوانتومی نوشته می شود. دقت کنید که در طرف راست پارامتر τ الزاما به معنای زمان نیست.



شکل ۳: این شکل و رابطه ی (۴۷) نشان می دهد که بین مکانیک کوانتومی یک ذره و مکانیک آماری یک سیستم یک بعدی ارتباط مستقیم وجود دارد. این ارتباط به ابعاد بالاتر نیز تعمیم پیدا می کند.

۲.۴ رابطه بین مکانیک کوانتومی و مکانیک آماری - نوع دوم

می توانیم به جای جایگزینی (۴۴) جایگزینی زیر را انجام دهیم:

$$\frac{1}{\hbar} = \beta \quad , \quad \mathcal{T} = L \tag{۴۶}$$

که در آن L دیمانسیون فاصله دارد. (در دستگاه واحدهایی که $c = 1$ است، زمان و طول دارای یک دیمانسیون هستند.) در این صورت رابطه (۳۶) تبدیل می شود به :

$$\langle q'|e^{-\beta\hat{H}L}|q\rangle = \int \tilde{D}q(x)e^{-\beta\int_0^L d\tau\left[\frac{m}{2}\frac{dq}{dx}^2+V(q)\right]} \tag{۴۷}$$

طرف چپ این رابطه احتمال گذار یک ذره (یک سیستم صفر بعدی) از نقطه q به نقطه q' است که در آن به جای $-\frac{it}{\hbar}$ عبارت $-\beta L$ قرار داده شده . اما طرف راست نشان دهنده یک تابع پارش برای یک سیستم یک بعدی است که در آن هییت کلاسیک یک بعدی $q(x)$ از $x = 0$ تا $x = L$ گسترده شده و این میدان افت و خیز گرمایی انجام می دهد. منظور از $\tilde{D}(q)$ انتگرال روی تمام هیئت هایی است که نقطه ابتدای آنها q

و نقطه آنتهای آنها q' است. این رابطه نشان می دهد که چگونه بین مکانیک کوانتومی یک ذره یعنی سیستمی که هیچ گونه گستره فضایی ندارد، با مکانیک کلاسیک یک سیستم یک بعدی ارتباط مستقیم وجود دارد. این ارتباط به ابعاد بالاتر نیز تعمیم پیدا می کند به این معنا که بین دامنه های گذار فازِ یک نظریه میدان کوانتومی در d بعد، و تابع پارش یک میدان آماری متناظر در $d+1$ بعد ارتباط مستقیم برقرار است.

۵ تقریب نیمه کلاسیک

یکی از کاربردهای مهم انتگرال مسیر در محاسبه نیمه کلاسیک تحول کوانتومی است. منظور از تحول نیمه کلاسیک این است که سهم مسیرهایی را که در نظر بگیریم که نزدیک ترین مسیرها به مسیر کلاسیک هستند. چنانچه $\hbar$ را برابر با صفر قرار دهیم، هرگونه اثر کوانتومی از بین می رود. آنچه که در تقریب بلافاصله بعدی می آید همان تقریب نیمه کلاسیک است. برای این کار به رابطه زیر توجه می کنیم. در حد $\hbar \longrightarrow 0$ مهم ترین سهم از نقطه می نیمم تابع F بدست می آید و سهم بعدی از افت و خیزهای نزدیک این نقطه می نیمم. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\int dq\, e^{\frac{i}{\hbar}F(q)} \approx \int dq\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(F(q_0)+\frac{1}{2}F''(q_0)(q-q_0)^2\right)} \tag{۴۸}$$

اما می توان دامنه تغییرات $\eta := q - q_0$ را به صورت تقریبی از $-\infty$ تا ∞ گرفت زیرا تابع نمایی به سرعت افت می کند و این تقریب را معتبر می سازد. سپس می توان انتگرال گاووسی را محاسبه کرد. بنابراین بدست می آوریم:

$$\int dq\, e^{\frac{i}{\hbar}F(q)} \approx e^{\frac{i}{\hbar}F(q_0)}\int d\eta\, e^{\frac{i}{2\hbar}F''(q_0)\eta^2} = e^{\frac{i}{\hbar}F(q_0)}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{F''(q_0)}} \tag{۴۹}$$

برای وقتی که تعداد درجه آزادی بیشتر است رابطه فوق به رابطه زیر تعمیم پیدا می کند:

$$\int d\mathbf{q}\, e^{\frac{i}{\hbar}F(\mathbf{q})} \approx e^{\frac{i}{\hbar}F(\mathbf{q}_0)}\int d\boldsymbol{\eta}\, e^{\frac{i}{2\hbar}\frac{\partial^2 F(q)}{\partial q_i\partial q_j}|_0\eta_i\eta_j} = e^{\frac{i}{\hbar}F(\mathbf{q}_0)}\sqrt{\frac{(2\pi\hbar)^N}{det\left(\frac{\partial^2 F(q)}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0}} \tag{۵۰}$$

حال می توانیم این روابط را به حالتی که به جای یک یا چند متغیر q_i یک تابع پیوسته یعنی $q(\tau)$ داریم تعمیم دهیم:

$$\int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}F[q]} \approx \int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(F[q_0]+\frac{1}{2}\int d\tau\int d\tau'\,\frac{\delta^2 F}{\delta q_0(\tau)\delta q_0(\tau')}(q(\tau)-q_0(\tau))(q(\tau')-q_0(\tau'))\right)} \tag{۵۱}$$

پس از محاسبه انتگرال گاووسی بدست می آوریم.

$$\int Dq\, e^{\frac{i}{\hbar}F[q]} \approx e^{\frac{i}{\hbar}F[q_0]}\sqrt{\frac{C}{det\left[\frac{\delta^2 F}{\delta q_0(\tau)\delta q_0(\tau')}\right]}} \tag{۵۲}$$

می توانیم این روابط را برای انتگرال مسیر به‌کار ببریم‌که در آن تابعی $F[q]$ همان‌کنش است و در نتیجه q_0 همان مسیرکلاسیک است‌که از این به بعد آن را با q_{cl} نشان می دهیم. در نتیجه در تقریب نیمه‌کلاسیک خواهیم داشت:

$$\langle q', T \mid q, 0\rangle \approx e^{\frac{i}{\hbar}S[q_{cl}]}\sqrt{\frac{C}{det\left[\frac{\delta^2 S}{\delta q_{cl}(\tau)\delta q_{cl}(\tau')}\right]}} \tag{۵۳}$$

وقتی‌که‌کنش یک تابع مربعی از مسیر حرکت باشد، طبیعتاً تقریب نیمه‌کلاسیک دیگر تقریب نیست بلکه دقیق است.

- تمرین: با استفاده از این تقریب انتشارگر یک نوسانگر هارمونیک را محاسبه‌کنید.

۶ محاسبات اختلالی در روش انتگرال مسیر

حال‌که‌کمیت های اصلی یعنی توابع همبستگی را روی حالت پایه در صورت بندی انتگرال مسیر به دست آورده ایم، قدم طبیعی بعدی این است که چگونه این‌کمیت ها را محاسبه می‌کنیم. نخستین قدم این است‌که درست مثل‌کاری‌که در نظریه احتمال انجام می دهیم، در این جا هم به جای اینکه سعی‌کنیم هر مورد را جداگانه بررسی‌کنیم، یک تابع مولد برای همه توابع همبستگی تعریف‌کنیم. این مولد را تابع پارش می نامیم و آن را با $Z[J]$ نمایش می دهیم . خواهیم داشت :

$$Z[J] := \frac{\int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}(L+j(\tau)q(\tau))d\tau}}{\int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}Ld\tau}} \tag{۵۴}$$

این تابع پارش دارای خاصیت زیر است:

$$Z[J=0]=1 \tag{۵۵}$$

دقت‌کنید‌که درتعریف تابع پارش هم درصورت و هم درمخرج اندازه انتگرال Dq به یکسان وجود دارد و بنابراین ثابت C که دررابطه (13) بکاررفت و ممکن است در حد $\epsilon \longrightarrow \infty$ خوش تعریف نباشد اهمیت خود را از دست می دهد و ما نمی بایست نگران خوش تعریف نبودن اندازه این ثابت باشیم.

اگر به شکل تابع مولد یعنی رابطه (۵۴) نگاه‌کنیم و هم چنین رابطه (۳۹) را در نظر آوریم متوجه می شویم: توابع همبستگی به ترتیب زیر با مشتق‌گیری از تابع پارش بدست می آیند:

$$\langle q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\rangle = (\frac{\hbar}{i})^n\frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(t_1)\delta j(t_2)\cdots\delta j(t_n)}|_{J=0} \tag{۵۶}$$

آنچه‌که تاکنون یافته ایم مربوط به صورتبندی انتگرال مسیر برای مکانیک‌کوانتومی است. در مورد میدان ها داریم

$$Z[J] = \frac{\int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]+\frac{i}{\hbar}\int J(x)\phi(x)dx^4}}{\int D\phi e^{i\hbar S[\phi]}} \tag{۵۷}$$

و در نتیجه توابع همبستگی به ترتیب زیر بدست خواهند آمد:

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle \equiv \langle 0|\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)|0\rangle = (\frac{\hbar}{i})^n \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\cdots\delta j(x_n)}|_{J=0} \tag{۵۸}$$

بنابراین تابع پارش اساسی ترین‌کمیتی است‌که می بایست درنظریه میدان‌کوانتومی محاسبه شود. با دانستن این تابع می توان تمام توابع همبستگی را حساب‌کرد. دردرس آینده خواهیم دید‌که محاسبه دقیق این تابع برای میدان های‌کوانتومی آزاد امکان پذیر است اما برای میدان های‌کوانتومی برهم‌کنش دارکه درآنها برهم‌کنش ضعیف است، تنها می توان این تابع را به صورت اختلالی و بر حسب یک پارامترکوچک‌که به شدت برهم کنش مربوط است بسط داد . دردرس آینده یاد خواهیم‌گرفت‌که چگونه تابع پارش یک میدان اسکالر را درچارچوب یک روش اختلال محاسبه کنیم.