تقارن و نتایج آن

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۵ آبان ۱۳۹۶

۱ مقدمه

نظریه‌گروه چارچوب طبیعی و لازم برای مطالعه تقارن و نتایج آن در فیزیک است. فرض ما این است‌که خواننده با مفاهیم اصلی نظریه‌گروه و نمایش های‌گروه آشنایی دارد. اگر چنین نیست بهترین‌کار مراجعه به درسنامه نظریه‌گروه است. یک راه دیگر هم این است‌که خواننده شروع به مطالعه همین فصل‌کند و هر جا‌که با مفاهیم نظریه‌گروه مواجه شد و توضیح آنها راکافی ندانست به آن درسنامه مراجعه‌کند.

دراین درس هدف ما مطالعه تقارن و آثارآن در میدان های‌کلاسیک است. نهایتا می بایست اثرات تقارن را درچارچوب میدان های‌کوانتومی بررسی‌کنیم ولی فعلا خود را به چارچوب‌کلاسیک‌که ساده تراست محدودکنیم. درکلی ترین تعریف معنای تقارن آن است‌که بعضی از خواص یک دستگاه تحت اثر مجموعه معینی از اعمال تغییر نمی‌کند. بعنوان مثال یک توپ‌گرد تحت دوران حول هر محوری شکل خود را حفظ می کند و حال آنکه یک مکعب چنین خاصیتی ندارد. قوانین فیزیک تحت انتقال در زمان و فضا و هم چنین تحت دوران شکل خود را حفظ می کنند و حال آنکه تحت انبساط و تغییر مقیاس چنین خاصیتی ندارند. انبساط همسانگردکره جغرافیایی نسبت مساحت بین‌کشور ها را روی‌کره دست نخورده باقی می‌گذارد و حال آنکه مساحت مطلق آنها را تغییر می دهد. هم چنین دراثر این انبساط تمام زوایا و نسبت های طولی ناوردا باقی می مانند. منظور از ذکر این مثال آن است‌که تاکیدکنیم عمل تقارنی لازم نیست تمامی یک شی را ناوردا باقی بگذارد بلکه تنهاکافی است که خاصیت هایی در شی ناوردا باقی بمانند اگر چه درگفتار هامعمولا ذکری از خاصیت های مورد نظر نمی رود و با تسامح از تقارن خود شی صحبت می شود.

اگر شی را با O وعمل انجام شده را با g نمایش دهیم آنگاه شی بعد از عمل را با $O' = g(O)$ نشان می دهیم. هرگاه خاصیت مورد نظر را با P نشان دهیم آنگاه بنا برتعریف بالا داریم :

$$P(O') = P(O) \qquad \longrightarrow \qquad P(g(O)) = P(O) \tag{۱}$$

دراین حالت g را یک عمل تقارنی [1] می نامیم و می‌گوییم شیء O تحت عمل g دارای تقارن است.

حال فرض‌کنید‌که g_1 و g_2 دو عمل تقارنی باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$O' = g_1(O), \quad O'' = g_2(O') \longrightarrow O'' = g_2(g_1(O)) =: (g_2g_1)(O) \tag{۲}$$

می خواهیم ببینیم‌که آیا g_2g_1 نیز یک عمل تقارنی هست یا نه ؟ برای این‌کار تست می‌کنیم‌که آیارابطه $P(O") = P(O)$ برقراراست یا نه؟

$$P(O") = P((g_2g_1)(O)) = P(g_2(g_1(O)) = P(g_1(O)) = P(O) \tag{۳}$$

بنابراین g_2g_1 نیز یک عمل تقارنی است. با درنظرگرفتن تعریف $e(O) = O$ و اضافه‌کردن معکوس تبدیلات دیده می شود‌که مجموعه اعمال تقارنی یک شی تشکیل یک‌گروه می دهند‌که آن را با G نمایش می دهیم.

درادامه این درس فرض می‌کنیم‌که خواننده با نظریه‌گروه و نمایش های آن آشنایی دارد.

۲ عمل یک‌گروه روی یک خمینه

فرض‌کنید‌که G یک‌گروه و M یک مجموعه باشد دراین صورت عمل‌گروه G روی مجموعه M نگاشتی است‌که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall g \in G, \;\; x \in M \qquad (g,x) \longrightarrow gx \in M \tag{۴}$$

باشرایط زیر:

$$ex = x \qquad g_1(g_2x) = (g_1g_2)x \tag{۵}$$

[1] Symmetry Transformation

هرگاه گروه G یک گروه توپولوژیک و M یک فضای توپولوژیک باشد می توان از پیوستگی نگاشت $gx \longrightarrow (g, x)$ سخن گفت. هم چنین هرگاه که G یک گروه لی و M یک خمینه دیفرانسیل باشد [۲] می توان از مشتق پذیری نگاشت $gx \longrightarrow (g, x)$ سخن گفت.

درتمام مثالهایی که دراین درس با آنها سروکار داریم گروه G یک گروه لی و مجموعه M که نوعا فضا یا فضا زمان است یک خمینه دیفرانسیل است و عمل گروه روی خمینه مشتق پذیر است. در بخش بعد به یکی از مهم ترین گروه های تقارنی می پردازیم. بسیاری از مفاهیم و روش های مربوط در نظریه گروه از مطالعه همین گروه نیز بدست می آید.

۳ گروه دوران

گروه n بعدی ماتریس های متعامد گروه تبدیلات خطی ای است که اندازه بردار های فضای اقلیدسی R^n را ثابت نگاه می دارد وبا $O(n)$ نشان داده می شود. این گروه یک زیرگروه موسوم به $SO(n)$ دارد که با ماتریس های با دترمینان یک مشخص می شود. این زیر گروه همانی است که گروه دوارن نام دارد. گروه $O(n)$ یک پارچه دیگر دارد که با ماتریس های با دترمینان منهای یک مشخص می شود. این پارچه را با $O(n)^-$ نشان می دهیم . واضح است که $O(n)^-$ زیر گروه نیست. ولی با ماتریس وارونی زمان یعنی

$$T := diag(-1, 1, 1, \cdots 1) \tag{۶}$$

می توان بین دو پارچه فوق تناظر یک به یک برقرار کرد. این دوپارچه از یک دیگر جدا هستند و بطور پیوسته نمی توان از یکی به دیگری رفت. حال فرض کنید که $R \in SO(n)$ عضوی است درنزدیکی عنصر واحد. دراین صورت می توان نوشت :

$$R = I + L \tag{۷}$$

که درآن L ماتریس کوچکی است . دراین صورت از رابطه $R^t R = I$ براحتی بدست می آید که $L + L^t = 0$ یعنی L یک ماتریس پاد متقارن است. می توان L را برحسب پایه ای از ماتریس های پادمتقارن بسط داد. یک پایه برای ماتریس های پادمتقارن عبارت است از:

$$M_{ij} := E_{ij} - E_{ji} \qquad i, j = 1 to n \tag{۸}$$

که درآن E_{ij} ماتریسی است که تنهادرایه غیر صفر آن در سطر i ام و ستون j ام واقع است و این درایه برابر با یک است. بنابراین بعد گروه $SO(n)$ برابر است با $n(n-1)/2$.

[۲] Differentiable Manifold

دراین صورت می توان نوشت

$$L = \epsilon\theta_{ij}M_{ij} \tag{۹}$$

که درآن ϵ یک پارامتر کوچک است که کوچکی L راتضمین می‌کند. دراین صورت گروه لی بودن $SO(n)$ تضمین می‌کند که برای تمام اعضایی که دریک همسایگی از عنصر واحد هستند ولزوما بی نهایت کوچک نیستند، بتوان نوشت :

$$R = \lim_{N\longrightarrow\infty}(I + \frac{1}{N}\theta_{ij}M_{ij})^N = e^{\theta_{ij}M_{ij}}. \tag{۱۰}$$

باید دقت کنیم که همسایگی فوق می تواند تمام گروه $SO(n)$ را بجز مجموعه ای با اندازه صفر را بپوشاند. M_{ij} را مولد های گروه $SO(n)$ می نامند.

از نظریه گروه‌های لی و جبر های لی می دانیم که رابطه جابجایی این مولد هااهمیت دارد. با استفاده از رابطه

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj} \tag{۱۱}$$

می توان رابطه بین مولد ها را بدست آورد:

$$[M_{ij}, M_{kl}] = \delta_{jk}M_{il} + \delta_{il}M_{jk} - \delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jl}M_{ik}. \tag{۱۲}$$

■ تمرین: رابطه بالا را ثابت کنید.

۴ نمایش دیفرانسیلی مولد های یک گروه

دربسیاری موارد احتیاج داریم که مولد های یک گروه لی G را به صورت عملگر های دیفرانسیلی نشان دهیم. فضای توابع حقیقی و مشتق پذیر روی M را با $C(M)$ نشان می دهیم. این مجموعه درعین حال یک فضای برداری است. فرض کنید که $f \in C(M)$. دراین صورت $f : M \longrightarrow R$ یک تابع حقیقی و مشتق پذیر روی M است. می توان گروه G را روی این فضا نمایش داد به ا ین صورت که به ازای هر $g \in G$ عملگری مثل $U(g) : C(M) \in C(M)$ تعریف کرد که به ترتیب زیر عمل می کند:

$$U(g) : f \longrightarrow f' \qquad | \qquad f'(x) \equiv (U(g)f)(x) := f(g^{-1}(x)) \tag{۱۳}$$

حال فرض کنید که g عضوی در نزدیکی واحد است یعنی $g = I + \theta^\alpha T_\alpha$. دراین صورت تحت اثر عنصر g نقطه ای با مختصات x^i به نقطه ای درهمان نزدیکی بامختصات $x'^i = x^i + (\delta x)^i$ نگاشته می شود: می توان $(\delta x)^i$ را برحسب پارامترهای گروه بسط داد و نوشت :

$$(\delta x)^i = \theta^\alpha \xi^i_\alpha(x) \tag{۱۴}$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$(gx)^i = x^i + \theta^\alpha \xi^i_\alpha(x) \tag{۱۵}$$

$$(g^{-1}x)^i = x^i - \theta^\alpha \xi^i_\alpha(x) \tag{۱۶}$$

(۱۷)

حال در رابطه (13) جایگزاری می کنیم و بجای $U(g)$ می نویسیم $U(I + \theta^\alpha T_\alpha) = id + \theta^\alpha \mathcal{T}_\alpha$ که درآن $\mathcal{T}_\alpha$ نمایش مولد T_α روی فضای توابع است :

$$f(x) + \theta^\alpha(\mathcal{T}_\alpha f)(x) = f(x^i - \theta^\alpha \xi^i_\alpha) = f(x) - \theta^\alpha \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} f \tag{۱۸}$$

بامقایسه ضرایب θ^α نمایش مولد ها را بصورت عملگر های دیفرانسیل بدست می آوریم :

$$\mathcal{T}_\alpha = -\xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۱۹}$$

رابطه(19) برای هر گروه لی که روی یک خمینه دیفرانسیل عمل می کند صحیح است . درزیر نمایش دیفرانسیلی مولد های گروه دوران را بدست می آوریم :

از رابطه (19) معلوم است برای نمایش دیفرانسیلی هر مولد تنها می بایست تغییر بی نهایت کوچک مختصات را تحت اثر گروه بدست آورد. در مورد دوران داریم :

$$\psi^k_{ij} = \delta^k_i x^j - \delta^k_j x^i \tag{۲۰}$$

توجه کنید که درمورد فضای اقلیدسی جای اندیس ها اهمیت نداردو می توان هر شاخص را بالا یا پایین نوشت. در نتیجه خواهیم داشت :

$$\mathcal{M}_{ij} = -\xi^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} = x_i \partial_j - x_j \partial_i \tag{۲۱}$$

۱.۴ مولد های دیفرانسیلی گروه انتقال

به همین ترتیب می توان مولد های گروه انتقال را بدست آورد. گروه انتقال در فضای n بعدی دارای n مولد است که نمایش دیفرانسیلی آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{P}_i = -\partial_i \tag{۲۲}$$

۲.۴ مو لد دیفرانسیلی گروه تغییر مقیاس

گروه تغییر مقیاس که آن را با S یک پارامتر بیشتر ندارد و هر عضو $s \neq 0 \in S$ روی فضای R^n به ترتیب زیر عمل می‌کند:

$$s : x \longrightarrow sx \tag{۲۳}$$

برای تبدیلات بی نهایت کوچک $s = 1 + \epsilon$ و درنتیجه $x'^i = x^i + \epsilon x^i$.

ϵ تنها پارامتر این گروه است و داریم :

$$\xi^i = x^i \tag{۲۴}$$

بنابراین نمایش دیفرانسیلی تنها مولد گروه تبدیل مقیاس که آن را نیز با S نمایش می دهیم عبارت خواهد بود از:

$$\mathcal{S} = -x^i \partial_i \tag{۲۵}$$

۵ گروه لورنتز

فضای مینکوسکی فضای R^{n+1} است که با متریک $\eta = diagonal(1, -1, -1, \cdots - 1)$ مجهز شده است. این متریک یک ضرب داخلی یا طول بین بردار های فضا تعریف می‌کند که آن را به شکل زیر می نویسیم :

$$\langle x, y \rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{۲۶}$$

مختصات هر نقطه را با $x^\mu,\ \mu = 0, 1, 2, \cdots n$ و درایه های متریک را با $\eta_{\mu\nu}$ نشان می دهیم. با این متریک و معکوس آن که درایه های $\eta^{\mu,\nu}$ دارد می توان شاخص ها را بالا و پایین برد. داریم : $\eta^{\mu,\nu}\eta_{\nu,\alpha} = \delta^\mu_\alpha$.

تبدیل لورنتز تبدیلی است که ضرب داخلی بین دوبردار را تغییر ندهد. هر تبدیل لورنتز $\Lambda : R^{n+1} \longrightarrow R^{n+1} : \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ دررابطه زیر صدق می‌کند:

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{۲۷}$$

تبدیلات بی نهایت‌کوچک لورنتز: می توان نوشت

$$\lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + L^{\mu}_{\nu} \tag{۲۸}$$

و با جایگذاری آن در رابطه بالا به نتیجه زیر رسید:

$$L_{\mu\nu} + L_{\nu\mu} = 0 \tag{۲۹}$$

این رابطه نشان می دهد‌که درفضای $n+1$ بعدی‌گروه لورنتز دارای $n(n+1)/2$ پارامتر است. می توان ماتریس L را برحسب عناصر پایه بسط داد . ماتریس های زیر‌که هر‌کدام با دو شاخص نامگذاری می شوند یک پایه مناسب برای این جبر می سازند. می توان براحتی دید‌که هرکدام این ماتریس ها خاصیت (29) را دارند:

$$\begin{aligned} M_{0i} &= E_{0i} + E_{i0} \quad i = 1, \cdots n \\ M_{ij} &= E_{ij} - E_{ji} \quad i,j = 1 \cdots n \end{aligned} \tag{۳۰}$$

رابطه جابجایی این ماتریس ها را براحتی می توان بدست آورد. خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} [M_{ij}, M_{kl}] &= \delta_{jk}M_{il} + \delta_{il}M_{jk} - \delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jl}M_{ik} \\ [M_{0j}, M_{kl}] &= \delta_{jk}M_{0l} - \delta_{jl}M_{0k} \\ [M_{0j}, M_{0l}] &= M_{jl}. \end{aligned} \tag{۳۱}$$

■ تمرین: روابط بالا را ثابت‌کنید.

می توان تمام روابط جابجایی فوق را به شکل زیر نوشت :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = \eta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} + \eta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\alpha}M_{\nu\beta} - \eta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} \tag{۳۲}$$

■ تمرین: رابطه بالا را ثابت کنید.

یک راه دیگر بدست آوردن مولد های گروه لورنتز و روابط بالا آن است که به رابطه (۲۹) توجه کنیم که مطابق آن L ماتریسی است که در شرط $L_{\mu\nu} + L_{\nu\mu} = 0$ صدق می کند. پایه این ماتریس ها را با $\{M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}\}, \mu, \nu = 0, 1, \cdots n$ نمایش می دهیم. دقت کنید که هر $M_{\mu\nu}$ خود یک ماتریس است و L بسطی برحسب این ماتریس ها دارد: یعنی

$$L = \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \tag{۳۳}$$

تعداد این ماتریس ها برابر است با $n(n+1)/2$. حال می خواهیم بدانیم که درایه های این ماتریس ها یعنی $(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ چه هستند: تنها تانسوری که دردست داریم $\eta_{\mu\nu}$ هست بنابراین تنها راهی که می توان از این تانسور یک تانسور با خاصیت های $(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ نوشت این است:

$$(M_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} \tag{۳۴}$$

ازاین رابطه می توان تمام روابط جابجایی (۳۲) را بدست آورد.

۱.۵ مولد های دیفرانسیلی گروه لورنتز

یک تبدیل بی نهایت کوچک لورنتز به صورت زیر مختصات را تبدیل می کند:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + L^\mu_\nu) x^\nu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{۳۵}$$

اما می دانیم که

$$\delta x^\mu = L^\mu_\nu x^\nu = \omega^{\alpha\beta} (M_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu = 2\omega^\mu_\nu x^\nu \tag{۳۶}$$

که در قسمت آخر از رابطه (۳۴) استفاده شده ا ست. بنابراین بنابراین بامقایسه با (۱۵) بدست می آوریم :

$$\xi^\mu_{\alpha\beta} = (M_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu \tag{۳۷}$$

و درنتیجه با استفاده از رابطه (۱۹) بدست می آوریم :

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = -\xi^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu = -(M_{\alpha\beta})^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu = x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha \tag{۳۸}$$

یعنی

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial \qquad (۳۹)$$

حال با استفاده از این رابطه واین‌که $[\partial_\mu, x_\nu] = \eta_{\mu\nu}$ می توان به روش راحت تری روابط جابجایی بین مولد ها را بدست آورد.

۶ ساختمان‌کلی نمایش های‌گروه لورنتز در چهاربعد

در چهار بعد مولد های‌گروه لورنتز را می توان به شکل زیر نشان داد:

$$k_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۴۰)$$

$$J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۴۱)$$

یا به صورت فشرده تر:

$$K_i := E_{0i} + E_{i0} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (۴۲)$$

$$J_i := \epsilon_{ijk} E_{jk} \qquad (۴۳)$$

رابطه جابجایی این مولد ها به شکل زیر است:

$$[K_i, K_j] = \epsilon_{ijk} J_k$$

$$
\begin{aligned}
[K_i, J_j] &= -\epsilon_{ijk} K_k \\
[J_i, J_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}
\tag{۴۴}
$$

هر عضو گروه لورنتز در چهاربعد به صورت زیر نوشته می شود:

$$
\Lambda = e^{\overrightarrow{\theta}\cdot J + \overrightarrow{\beta}\cdot K}
\tag{۴۵}
$$

که درآن $\overrightarrow{\theta}$ ها پارامتر های دوران و $\overrightarrow{\beta}$ پارامترهای خیز [۳] هستند.

جهت بردار $\overrightarrow{\beta}$ جهت خیز لورنتز و جهت بردار $\overrightarrow{\theta}$ جهت دوران را نشان می دهند. هم چنین اندازه این دو بردار $\infty > \overrightarrow{\beta} \leq 0$ و $\pi \leq \overrightarrow{\theta} \leq 0$ اندازه خیز و دوران را نشان می دهند.

می توان ترکیب جدیدی از این مولد ها به شکل زیر ساخت:

$$
A_k := \frac{1}{2}(J_k + K_k) \qquad B_k := \frac{1}{2}(J_k - K_k)
\tag{۴۶}
$$

براحتی معلوم می شود که رابطه جابجایی مولد های جدید به شکل زیر است:

$$
\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= i\epsilon_{ijk} A_k \\
[B_i, B_j] &= i\epsilon_{ijk} B_k \\
[A_i, B_j] &= 0
\end{aligned}
\tag{۴۷}
$$

این روابط نشان می دهند که جبر گروه لورنتز در چهاربعد با جبر $su(2) \oplus su(2)$ یکسان است. درنتیجه می توان بااستفاده از نمایش های کاهش ناپذیر جبر $su(2)$ نمایش های کاهش ناپذیر جبر و درنتیجه نمایش های گروه لورنتز را ساخت.

قبل از ساختن این نمایش ها به یک روش دیگر نیز می توانیم این تناظر را نشان دهیم. درواقع نشان می دهیم که گروه لورنتز با گروه $SL(2, C)$ یکسان است که خود این امر یک باردیگر نشان می دهد که جبر لورنتز با جبر $su(2) \oplus su(2)$ یکسان است. روش اثبات [۴] کاملاً شبیه به روشی است که برای اثبات تناظر گروه $SO(3)$ و گروه $SU(2)/Z_2$ به کاربرده می شود، به این ترتیب که به ازای هر چهاربردار x^μ ماتریس هرمیتی دو

[۳] Boost

[۴] Special Linear Group of Complex 2*2 matrices

بعدی ای به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$P = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{۴۸}$$

این ماتریس هم چنین دارای این خاصیت است‌که $det(P) = x^\mu x_\mu$. حال به ازای تبدیل لورنتز $x \longrightarrow x' = \Lambda x$، می توان یک تبدیل روی این ماتریس به شکل زیر اعمال‌کرد:

$$P \longrightarrow P' = U(\Lambda) P U^\dagger(\Lambda) \tag{۴۹}$$

که درآن $U(\Lambda)$ یک ماتریس دو در دوی مختلط با دترمینان یک است یعنی یک ماتریس متعلق به‌گروه $SL(2,C)$ است. واضح است‌که P نیز یک ماتریس هرمیتی است. هم چنین داریم $det(P') = det(P) = x^\mu x_\mu$. بنابراین ماتریس P' را نیز می توان با یک چهاربردار x' با همان طول چهاربردار x متناظر‌کرد یعنی:

$$P' = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix} \qquad x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \tag{۵۰}$$

یعنی چهاربردار x' دوران یافته چهاربردا ر x است. برای‌کامل بودن این تناظر لازم است‌که تبدیلات متوالی لورنتز نیز درنظر‌گرفته شوند‌که این امر منجر به رابطه زیر می شود:

$$U(\Lambda) U(\Lambda') = U(\Lambda \Lambda') \tag{۵۱}$$

یعنی $U(\Lambda)$ می بایست یک نمایش از‌گروه لورنتز باشد. می توان رابطه بالا را به شکل‌کاملتری نیز نوشت: ماتریس های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_\mu := (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{۵۲}$$

که درآن $\sigma_0 = I$. می توان P را به شکل زیر نوشت:

$$P = x^\mu \sigma_\mu \tag{۵۳}$$

هم چنین تعریف می‌کنیم:

$$\overline{\sigma}_\mu := (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) \tag{۵۴}$$

براحتی می توان تحقیق کرد که

$$tr(\sigma_\mu \overline{\sigma}_\nu) = 2\eta_{\mu\nu}. \tag{۵۵}$$

درنتیجه می توان رابطه مستقیمی بین درایه های یک ماتریس لورنتز Λ و درایه های $U(\Lambda)$ بدست آورد. با تلفیق روابط فوق می توان دریافت که :

$$x'^\mu = \frac{1}{2} tr(\overline{\sigma}^\mu U \sigma_\nu U^\dagger) x^\nu \tag{۵۶}$$

۱.۶ نمایش های جبر لورنتز

می دانیم که هر نمایش کاهش ناپذیر گروه $su(2)$ با یک عدد نیمه صحیح مشخص می شود. بنابراین هر نمایش کاهش ناپذیر گروه لورنتز درچهاربعد با یک زوج عدد نیمه صحیح مشخص مثل (j, j') مشخص می شود: به عبارت دقیق تر اگر نمایش اسپین j برای گروه $su(2)$ را با U_j نمایش دهیم آنگاه :

$$U_{(j,j')}(A_a) := U_j(A) \otimes I \qquad , U_{(j,j')}(B_a) := I \otimes U_{j'}(B_a) \tag{۵۷}$$

بعد هر نمایش (j, j') برابر است با $(2j+1) \times (2j'+1)$.

درزیر هرجا صحبت از نمایش می کنیم منظور ما نمایش کاهش ناپذیر است مگر آنکه خلاف آن را صراحتا ذکر کنیم.

– ساده ترین نمایش گروه لورنتز نمایش $(0,0)$ است که درآن $A_i = B_i = 0$. این نمایش یک بعدی است و همان نمایش بدیهی گروه لورنتز است که به هر عضو گروه عدد یک نسبت داده می شود.

– نمایش بعدی نمایش $(1/2.0)$ است . دراین نمایش $A_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ و $B_i = 0$. این نمایش دوبعدی است و درآن داریم :

$$K_a = \frac{1}{2}\sigma_a \qquad J_a = \frac{-i}{2}\sigma_a \tag{۵۸}$$

با توجه به رابطه (۴۵) یک تبدیل لورنتز دراین نمایش به صورت زیر درمی آید:

$$U_{(1/2.0)}(\Lambda)=e^{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\theta}-i\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\sigma}} \tag{۵۹}$$

– یک نمایش دیگر عبارت است از نمایش $(0,1/2)$. دراین نمایش $B_i=\frac{1}{2}\sigma_i$ و $A_i=0$. این نمایش نیز دو بعدی است و خواهیم داشت:

$$K_a=\frac{1}{2}\sigma_a \qquad J_a=\frac{i}{2}\sigma_a \tag{۶۰}$$

با توجه به (۴۵) یک تبدیل لورنتز دراین نمایش به صورت زیر درمی‌آید:

$$U_{(1/2.0)}(\Lambda)=e^{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\theta}+i\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\sigma}} \tag{۶۱}$$

– حال نمایش $(1/2,1/2)$ را درنظر می‌گیریم. دراین نمایش داریم :

$$K_a:=\frac{1}{2}(\sigma_a\otimes I+I\otimes\sigma_a) \qquad J_a=\frac{-i}{2}(\sigma_a\otimes I-I\otimes\sigma_a) \tag{۶۲}$$

همه نمایش های دیگر نیز به همین ترتیب ساخته می شوند. مطابق با هرنمایش می توان میدانی تعریف کرد که دردستگاه های مختصات مختلف طبق آن نمایش تبدیل می شود. نمایش های دو شاخصی فوق را می توان به نمایش های معروف و ساده تری که می شناسیم ربط دهیم. البته دراین جا به این موضوع فقط اشاره می‌کنیم. خواننده می تواند برای فهم بهتر و کامل تر این موضوع به کتاب نظریه میدان واینبرگ جلد یک صفحه ۲۲۹ مراجعه کند.