رایانش کوانتومی توپولوژیک

وحید کریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۱۷ دی ۱۳۹۷

۱ مقدمه

در این فصل به موضوع رایانش کوانتومی توپولوژیک می پردازیم و آن را بهانه ای قرار می دهیم برای گشت و گذار در موضوعات دیگری که هم به دلیل ارتباط رایانش توپولوژیک با آنها و هم به دلایل دیگر جالب و مهم هستند. این موضوعات گستره نسبتا وسیعی را می پوشانند، از نظریه گره [۱] و گروه گیسو [۲] گرفته تا معادله یانگ باکستر [۳] و نظریه میدان توپولوژیک ، [۴] از نظم توپولوژیک [۵] گرفته تا آنیون های آبلی و غیرآبلی. بدلیل گستردگی این مطالب مرور ما از آنها یک مرور کوتاه است و تنها به بیان تعاریف و خواص کلی بسنده می کند. در نتیجه خواننده برای مطالعه دقیق تر هر کدام از آنها می بایست به مقالات و کتب دیگر نگاه کند. آنچه که در تمامی این حوزه جالب است پیوستگی موضوعات متنوع در ریاضیات و فیزیک با یکدیگر است، پیوندهایی که به غنا و زیبایی مفهومی و ساختاری این حوزه منجر شده است.

[۱] Knot Theory
[۲] Braid Group
[۳] Yang-Baxter equation
[۴] Topological Field Theory
[۵] Topological Order

۲ ناورداهای توپولوژیک

موضوع توپولوژی مطالعه شکل ها و فضاهاست و شاید مهم ترین مسئله در آن این است که تشخیص دهیم آیا دو فضا را از نظر کیفی معادل هستند یا نه. از نظر کیفی در این جا به این معناست که آیا با تغییرات پیوسته ای یک فضا به یک فضای دیگر تبدیل می شود یا نه؟ مثلا یک دایره و یک بیضی توپولوژی یکسانی دارند اما یک دایره با یک پاره خط توپولوژی یکسانی ندارد زیر دایری یک فضای یک بعدی بدون مرز است و پاره خط دو نقطه مرزی دارد. هم چنین سطح کره دوبعدی با سطح یک بیضی گون از نظر توپولوژیک یکسان هستند ولی سطح یک کره با سطح یک چنبره یکسان نیست. وقتی به فضاهای پیچیده تر می پردازیم تشخیص توپولوژی یک فضا یکسان نیست بخصوص وقتی که این فضاها خارج از فضای سه بعدی ما قرار می گیرند و تصورشان برای ما امکان پذیر نیست. با این وجود بازهم می توان به صورت ریاضی دقیق معادل بودن توپولوژیک را تعریف کرد. البته پیش نیاز این تعاریف این است که تعریف فضای توپولوژیک را بشناسیم. در این درس فرصت پرداختن به این تعاریف وجود ندارد و خواننده می بایست به یک کتاب مقدماتی توپولوژی نگاه کند. تنها چیزی که باید بدانیم این است که فضای توپولوژیک یک مجموعه است که می توان در آن مفهوم پیوستگی نگاشت ها از یک فضا به دیگری را تعریف کرد.

- تعریف: دو فضای X و Y را معادل یا همریخت [۶] می گوییم (و می گوییم که توپولوژی یکسانی دارند) هرگاه یک تابع پیوسته و وارون پذیر بین این دو فضا وجود داشته باشد. این همان تناظر یک به یک بین این دو فضاست. معادل بودن دو فضا را به این صورت نشان می دهیم که:

$$X \approx Y. \qquad (۱)$$

علیرغم این تعریف تحقیق این که آیا دو فضای متفاوت توپولوژی یکسانی دارند چندان ساده نیست. در واقع به صورت کلی اصلا مسئله ساده ای نیست. ریاضیدان ها برای تمیز دادن دو فضا از نظر توپولوژیک ابزارهای جالب و دقیقی را طراحی کرده اند. این ابزار ها را ناورداهای توپولوژیک [۷] می گویند. این ناورداها می توانند شکل های متفاوتی داشته باشند. به عنوان مثال گروه هموتوپی اول [۸] نشان می دهد که آیا همه منحنی های بسته درون یک فضا تراکم پذیر [۹] هستند یا نه. یعنی اینکه آیا هر منحنی در این فضا را می توان به طور پیوسته به یک نقطه جمع کرد یا اینکه یک مانع توپولوژیک [۱۰] از این کار جلوگیری می کند. به عنوان مثال تمام منحنی های روی سطح کره دوبعدی تراکم پذیرند و می گوییم که گروه

[۶] Homeomorphic
[۷] Topological Invariants
[۸] First Homotopy Group
[۹] Contractible
[۱۰] Topological Obstruction

هموتوپی اول کره یک گروه بدیهی یک عضوی است

$$\pi_1(S_2) = \{e\}.$$

ولی همه منحنی های بسته روی چنبره چنین نیستند. می توان نشان داد که برای چنبره رابطه زیر برقرار است:

$$\pi_1(Torus) = Z \times Z.$$

ناوردای توپولوژیک همواره چنان تعریف می شود که در تعریف زیر صدق کند:

- تعریف: یک ناوردای توپولوژیک مثل I دارای این خاصیت است که

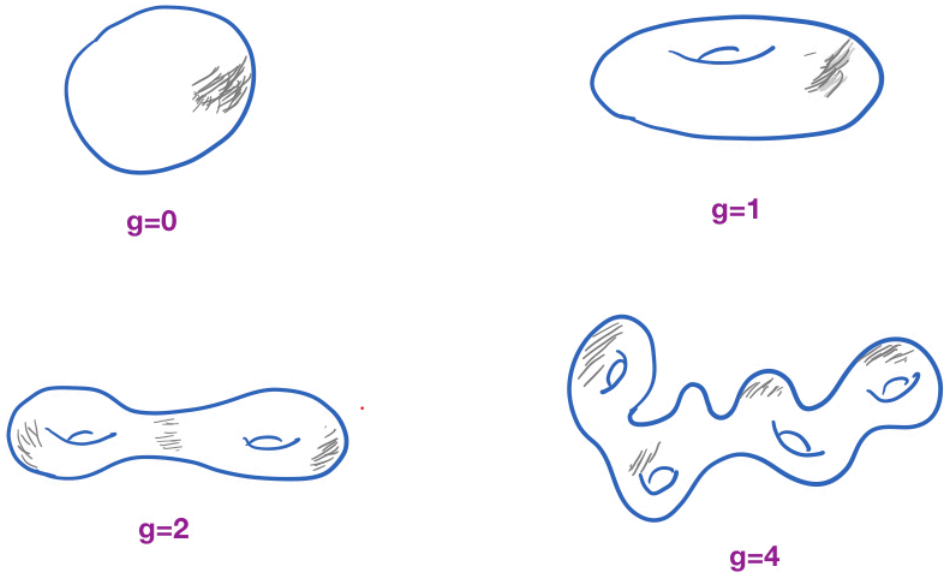
$$if \qquad X \approx Y, \qquad then \qquad I(X) = I(Y). \qquad (۲)$$

فایده پیدا کردن ناورداهای توپولوژیک این است که یک روش محاسبه مشخص (اگر چه نه الزاما آسان) برای آنها وجود دارد و اگر در پایان محاسبه به این نتیجه برسیم که $I(X) \neq I(Y)$ آنگاه قطعا با استفاده از قضیه بالا به این نتیجه می رسیم که X با Y معادل نیست. دقت کنید که ناوردای توپولوژیک نمی گوید که آیا دو فضا باهم یکی هستند بلکه تنها می گوید که دو فضای خاص با هم یکی نیستند. در صورتی که فهرست کاملی از ناورداها داشته باشیم یا این که یک یا چند ناوردای قوی داشته باشیم که این رابطه را به صورت دو طرفه برقرار کنیم می گوییم که یک طبقه بندی از یک دسته از فضاهای توپولوژیک انجام داده ایم. به عنوان مثال تمام فضاهای دو بعدی جهت پذیر و بدون مرز تنها با یک ناوردای توپولوژیک طبقه بندی می شوند. این ناوردای توپولوژیک جنس [۱۱] نامیده می شود. می توان به جای جنس از مشخصه اویلر که رابطه نزدیکی با آن دارد نیز استفاده کرد.

- تمرین: می توان یک سطح دو بعدی را با یک شبکه از چندضعلی ها پوشاند. این شبکه را اصطلاحا مثلث بندی [۱۲] سطح می گویند اگرچه چندضلعی ها لزوما مثلث نیستند. برای این شبکه مشخصه اویلر [۱۳] به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi = V - E + F, \qquad (۳)$$

که درآن V تعداد راس ها، E تعداد اضلاع و F تعداد وجه هاست. ثابت می شود که مشخصه اویلر یک ناوردای توپولوژیک است. مشخصه اویلر را برای این سطوح پیدا کنید: یک کره، یک چنبره با جنس یک . سپس نوع مثلث بندی را به دلخواه خود تغییر دهید و تحقیق کنید که مشخصه اویلر یک سطح ربطی به نوع مثلث بندی ندارد. نشان دهید که برای این سطوح رابطه زیر برقرار است: $\chi = 2 - 2g$.

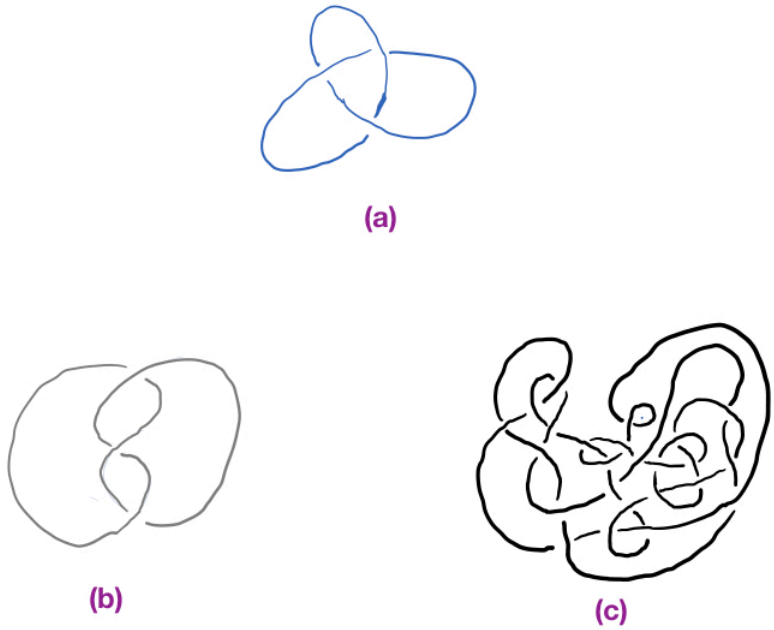


شکل ۱: طبقه بندی تمام سطوح دو بعدی بدون مرز و جهت پذیر

۳ ناورداهای گره ها

یک طناب را می توانید به شکل های مختلفی گره بزنید. خیلی از این گره های مختلف را نمی توانید به طور پیوسته یعنی بدون پاره کردن گره (یا باز کردن کامل گره) به هم تبدیل کنید. این گره ها را گره های غیر معادل می نامیم. دو گره را که بتوانیم بدون پاره کردن به یکدیگر تبدیل کنیم گره های معادل می خوانیم. نخستین بار لرد کلوین با توجه به این خاصیت که به گره نوعی پایداری می دهد تصوری از اتم ها را طرح کرد که در آن هر اتم چیزی نیست جز یک گره . در نظریه او جنس این گره چیزی نیست جز یک تراکم مشخص در اتر که تمام فضا را پر کرده است. بنابراین هیدروژن یک گره ساده در اتر است و هلیوم یک گره کمی پیچیده تر و الی آخر و پایداری اتم ها نیز از تبدیل نشدن این گره ها به یکدیگر ناشی می شود. مثل خیلی دیگر از ایده های فیزیکی این ایده نیز برای خود افت و خیز هایی داشته و در برهه هایی به کلی کنار گذاشته شده و در زمان های دیگر به شکل های دیگر احیا شده است. امروزه می دانیم که تصور کلوین از اتم ها به کلی اشتباه است ولی هر چه که بود نظریه

[۱۱] Genus
[۱۲] Triangulation
[۱۳] Euler Character



شکل ۲: چند نمونه از گره های غیر معادل

او سرآغاز پیونده ریاضیات و فیزیک در مطالعه گره هاست. از نظر ریاضی می توان یک گره را نشاندن [۱۴] یک دایره در فضای سه بعدی در نظر گرفت. معنای این حرف این است که یک گره مثل K در واقع تصویر یک دایره تحت یک نگاشت پیوسته به فضای سه بعدی است. به عبارت دیگر

$$f : S_1 \longrightarrow R^3 \qquad (۴)$$

یک گره را تعریف می کند هرگاه f یک نگاشت پیوسته باشد. تحت این شرایط تصویر دایره در فضای سه بعدی یک گره مثل K است. یعنی $K = f(S_1)$. از نظر ذاتی (یعنی از نظر موجودی که روی دایره زندگی می کند و به فضای سه بعدی بیرون دسترسی ندارد) همه گره ها چیزی جز دایره نیستند. آنچه که آنها را از هم متمایز می کند نحوه نشاندن آنها در فضای سه بعدی است. بنابراین معادل بودن دو گره به این معنی نیست که خود آنها به عنوان موجوداتی که هم ارز دایره هستند با هم معادل باشند بلکه این است که نحوه نشاندن [۱۵] آن ها در فضای سه بعدی باهم معادل باشد. بنابراین دو گره K_1 و K_2 را معادل می خوانیم وقتی که شرط زیر برقرار باشد.

- تعریف : دو گره K_1 و K_2 معادل خوانده می شود هرگاه یک نگاشت پیوسته و وارون پذیر $g : R^3 \longrightarrow R^3$ و جود داشته باشد به قسمی که تحت این نگاشت $g(K) = K'$.

از نظر شهودی این رابطه می گوید که می توانید یک گره را به طور پیوسته تغییر شکل داده و به گره دیگر تبدیل کنید. سوالی که از چندین دهه پیش توجه ریاضیدانان را به خود جلب کرده این است که انواع گره های غیر معادل کدام ها هستند. آیا می توان همه گره ها را طبقه بندی کرد و

[۱۴] Embedding
[۱۵] Embedding

تمام گره های معادل را در یک طبقه جای داد؟ شکل (۲) چند نوع گره را نشان می دهد. شکل (۱) نیز چند نوع سطح دوبعدی را نشان می دهد. در مورد سطوح دو بعدی مدتهاست که یک طبقه بندی کامل انجام شده است یعنی این که می دانیم سطوح دوبعدی بدون مرز و جهت پذیر تنها با یک پارامتر گسسته به نام جنس [۱۶] شناسایی می شوند. در مورد گره ها وضعیت بسیار پیچیده تر است و هنوز هیچ نوع طبقه بندی ای صورت نگرفته است. همین چند شکل ساده از گره ها نیز نشان می دهد که نمی توان امیدی داشت که گره ها با تعداد کمی پارامتر از هم تمیز داده شوند.

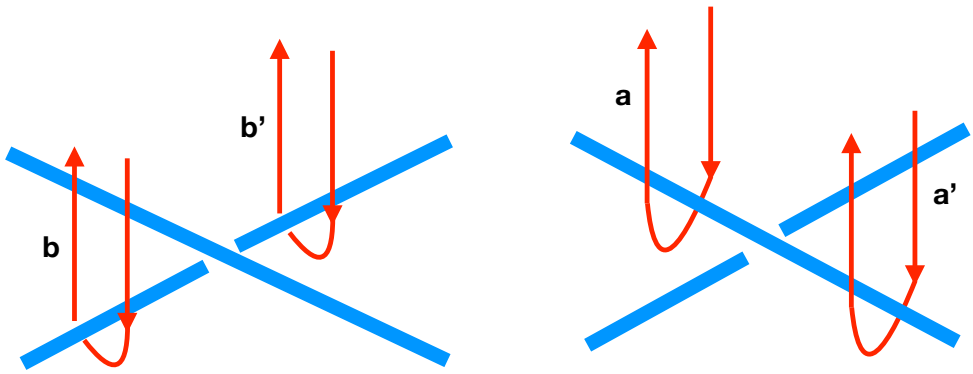
به عنوان مثال ممکن است کسی فکر کند که تعداد تقاطع ها [۱۷] وقتی که گره ها روی یک صفحه دوبعدی تصویر می کنیم ، گره ها را طبقه بندی می کند. ولی کمی تمرین نشان می دهد که می توان با یک تعداد مشخص تقاطع تعداد بسیار زیادی گره های غیر معادل داشت و هر چه که تعداد این تقاطع ها زیاد می شود تعداد گره ها نیز زیادتر خواهد شد.

- تمرین: چند گره غیر معادل رسم کنید که هرکدام دو تا تقاطع داشته باشند. همین کار را برای گره هایی که دارای سه تا تقاطع باشند تکرار کنید.

اما می توان پرسید که طبقه بندی گره ها در ریاضیات چه اهمیتی دارد؟ یکی از پاسخ های این مسئله به طبقه بندی فضاهای توپولوژیک سه بعدی مربوط است. همانطور که طبقه بندی سطوح دوبعدی را می دانیم می توانیم بپرسیم که انواع سطوح بدون مرز و جهت پذیر سه بعدی کدام ها هستند؟ پاسخ این سوال تا کنون داده نشده است. اما یک پیشرفت مهم در آن صورت گرفته است و آن اینکه نشان داده شده هر سطح سه بعدی چیزی نیست جز یک کره سه بعدی که یک جراحی [۱۸] در امتداد یک گره غوطه ور شده در آن صورت گرفته است. این موضوع نیازمند توضیح بیشتری است. نخست آنکه از نظر موضعی یک کره سه بعدی با فضای R^3 معادل است (کافی است به مثال ساده تر سطح کره دوبعدی و فضای R^2 فکر کنیم.). البته از نظر توپولوژیک این دو فضا یکی نیستند ولی از آنجا که یک گره تنها در قسمتی محدودی از فضای R^3 نشانده می شود، این تفاوت نقشی ایفا نمی کند.

به این ترتیب اگر بتوانیم انواع گره های غیر معادل را بشناسیم می توانیم انواع فضاهای سه بعدی غیر معادل را نیز بشناسیم و می دانیم که شناسایی گره ها که نسبت به فضاهای سه بعدی اشیای ملموس تری هستند بسیار ساده تر است. این موضوع انگیزه تلاش های طولانی را برای شناسایی گره ها را روشن می کند. نخستین تلاش این بوده که می توان یک گره را که در فضای سه بعدی غوطه ور است روی یک صفحه تصویر کرد. در این تصویر گره تبدیل می شود به یک منحنی بسته که تعدادی تقاطع دارد. در این تقاطع ها همواره یک خط بر روی خط دیگر قرار می

[۱۶] Genus
[۱۷] Crossings
[۱۸] Surgery



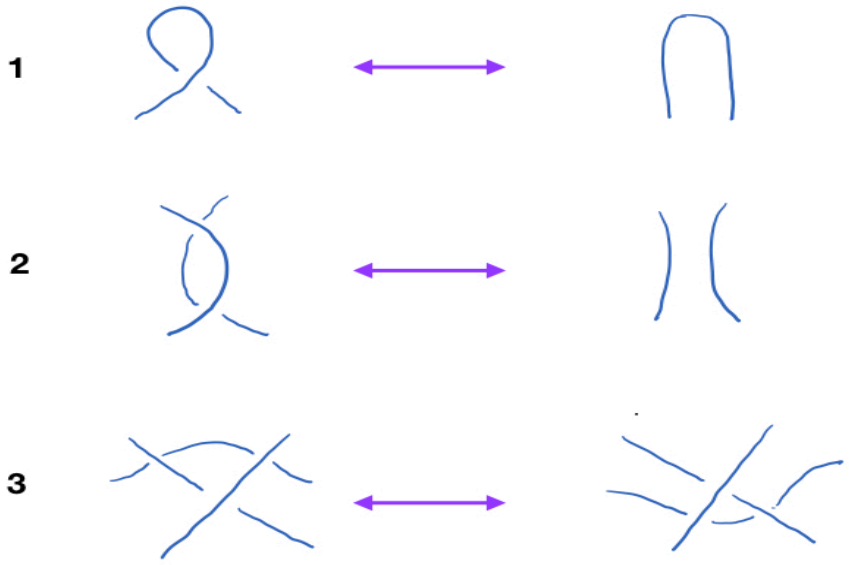
شکل ۳: مولدهای گروه هموتوپی برای گره ها. در هر تقاطع چهار مولد تعریف می شود ولی این مولدها با هم رابطه دارند.

گیرد. می توان به جای خود گره تصویر آن را در فضای دو بعدی مطالعه کرد. وقتی به این تصویر فکر می کنیم مطالعه گره آسانتر می شود. به عنوان مثال می توانیم گروه هموتوپی گره را به شکل زیر مطالعه کنیم. نخست گره را کمی ضخیم می کنیم و به شکل یک تیوب در می آوریم. سپس این تیوب را که در امتداد گره شکل گرفته از فضای سه بعدی خارج می کنیم. آنچه که باقی می ماند فضای سه بعدی است که یک تونل پیچ در پیچ در آن وجود دارد که در جای خالی گره شکل گرفته است. منظور از گروه هموتوپی گره گروه هموتوپی این فضا یعنی فضای $R^3 - K$ است. سپس مطابق با تعریف گروه های هموتوپی یک نقطه ثابت در فضا اختیار می کنیم. این نقطه را معمولا در بالای صفحه ای که گره روی آن تصویر شده و در فاصله خیلی زیاد در نظر می گیریم. (البته مقدار این فاصله اهمیتی ندارد.) سپس به ازای هر تقاطع و مطابق شکل (۳) منحنی هایی از این نقطه رسم می کنیم. به این ترتیب به ازای هر تقاطع i چهارتا از مولدهای گروه هموتوپی تعریف می شوند که آن ها را با a_i, a'_i, b_i و b'_i نشان می دهیم. اما این مولدها مستقل نیستند و همانطور که در شکل دیده می شود به شکل زیر به هم مرتبط اند:

$$a_i = a'_i, \qquad a_i b_i {a'_i}^{-1} = b'_i \tag{۵}$$

به این ترتیب گروه هموتوپی گره با مولدهایش و رابطه هایش تعیین می شود.

- تمرین: نشان دهید که گروه هموتوپی گره بدیهی همان گروه Z یعنی گروه اعداد صحیح است.
- تمرین: گروه هموتوپی گره سه برگی را پیدا کنید.
- تمرین: یگ گره در نظر بگیرید که همان گره بدیهی است ولی یک تاب خورده و به شکل حرف 8 درآمده است. گروه هموتوپی این گره را با استفاده از قواعدی که در شکل ( ) آمده است، پیدا کنید.



شکل ۴: حرکت های سه گانه رایدمایستر

گروه هموتوپی شاید اولین ابزاری باشد که به کمک آن به مطالعه گره ها می رویم. ولی خود این ابزار ممکن است چندان کارایی نداشته باشد زیر مسئله را تبدیل به شناسایی گروه هایی می کند که با مولدها و روابط شان تعریف می شوند که خود این مسئله دشوار است. بنابراین می بایست روش های دیگری را برای شناسایی کلاس های هم ارزی گره ها دنبال کرد. در طول سالیان طولانی پیشرفت های فراوانی در این راستا صورت گرفته است. یکی از اولین پیشرفت ها توسط رایدمایستر [۱۹] در قضیه زیر صورت بندی شده است.

- قضیه رایدمایستر: دو گره با هم معادل اند اگر و فقط اگر تصویرهای آن ها را بتوان با تعداد محدودی از حرکت های سه گانه ای که در شکل ۴ نشان داده شده به یکدیگر تبدیل کرد.

همانطور که در بخش های پیشین شرح دادیم، مثل هر جای دیگری در توپولوژی، در نظریه گره مفهوم ناوردای توپولوژیک اهمیت اساسی دارد. فرض کنید که K یک گره باشد. اگر بتوانیم به این گره یک کمیت مشخص مثل I نسبت دهیم و آن را $I(K)$ بنامیم به طوری که هرگاه K و K' معادل باشند داشته باشیم

$$I(K) = I(K')$$

آنگاه $I(K)$ را یک ناوردای گره می نامیم. به عبارت دیگر $I(K)$ کمیتی است که تحت تغییرات پیوسته گره تغییر نمی کند. فایده هر ناوردای

[۱۹] Reidmeister

توپولوژیک این است که با محاسبه آن بلافاصله می فهمیم که آیا دو گره باهم معادل هستند یا خیر. دقت کنید که اگر بفهمیم که $I(K) = I(K')$ معنایش این نیست گه این دو گره با هم معادل هستند. زیرا تعریف ناوردای توپولوژیک یک طرفه است به این معنا که اگر ناوردای توپولوژیک برای دو گره یکسان نباشد می توان بلافاصله نتیجه گرفت که این دو گره معادل نیستند. ممکن است که دو گره متفاوت ناوردای یکسانی داشته باشند. این به این معناست که ناوردای مزبور یک ناوردای قوی نیست . به همین دلیل است که دائما تلاش می شود تا ناورداهای جدیدتر و قوی تر تعریف شوند که البته کار ساده ای نیست.

---

۴ گروه گیسو و رابطه آن با ناورداهای گره ها

یکی از پیشرفت های مهم ارتباطی است که بین نظریه گره و گروه گیسو پیدا شده است. در این بخش گروه گیسو را معرفی می کنیم و سپس به این ارتباط اشاره می کنیم و نشان می دهیم که چگونه این ارتباط به ساختن ناورداهای جدید از گره ها می انجامد. گروه گیسو [۲۰] یک گروه نامتناهی است که می توان آن را تعمیمی از گروه جایگشت دانست. در یک صفحه n نقطه در نظر بگیرید. در بالای این صفحه نیز عین همین صفحه را تصور کنید. منحنی هایی را تصور کنید که از نقاط صفحه پایینی به نقاط صفحه بالایی می روند. این منحنی ها می توانند خم شوند، دور هم بپیچند، و تاب بخورند ولی نمی توانند یک دیگر یا خود را قطع کنند. هر دسته از این منحنی ها یک عضو از گروه گیسوی n تایی را تشکیل می دهند [۲۱] یعنی

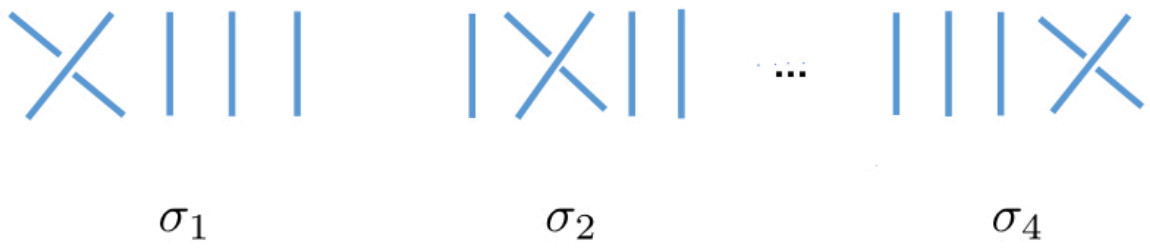
$$\gamma \in B_n, \qquad \gamma : R^2 \times [0,1] \longrightarrow R^2 \times [0,1], \qquad \gamma(t) = \{\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots \gamma_n(t)\} \qquad (۶)$$

که درآن

$$\gamma_i(0) = p_i, \qquad \gamma_i(1) = p_j \qquad (۷)$$

یعنی منحنی γ_i نقطه p_i در صفحه پایین را به نقطه p_j در صفحه بالایی وصل می کند. البته به طور دقیق تر باید بگوییم که γ شکل دقیق این منحنی ها نیست بلکه کلاس توپولوژیک آنهاست به این معنا که اگر γ و γ' دو دسته منحنی باشند که بتوانند بدون پاره شدن به یکدیگر تبدیل شوند

[۲۰] Braid Group
[۲۱] Braid Group on n-strands



شکل ۵: مولدهای گروه گیسو

آنها را یکی می گیریم و کلاس هم ارزی آنها یک عضو از گروه گیسو را تشکیل می دهد. ضرب در این گروه به معنای پشت سر هم قرار گرفتن منحنی ها از پایین به بالا ست.

- تمرین: در کلاس ضرب دو عضو گروه گیسو و وارون یک عضو تعریف شده اند. این تعاریف را به صورت دقیق ریاضی بنویسید.

گروه گیسو دارای $n-1$ مولد است که آنها را با σ_1 تا σ_{n-1} نشان می دهیم. این مولدها در شکل **؟؟** نشان داده شده اند. این مولدها در روابط زیر صدق می کنند.

- تمرین: گروه گیسویی که تا کنون تعریف کرده ایم روی فضای $R_2 \times [0,1]$ استوار بوده است، به این معنا که تمام منحنی ها از صفحه دو بعدی $R^2 \times \{0\}$ شروع شده و به یک صفحه دوبعدی $R^2 \times \{1\}$ به موازات آن ختم می شوند. حال تصور کنید که به جای صفحه دوبعدی R^2 کره دو بعدی قرار دهیم یعنی منحنی ها در فضای $S^2 \times \{0\}$ تعریف شوند. به عبارت دیگر منحنی ها از کره دو بعدی $S^2 \times \{0\}$ شروع شده و به کره دو بعدی $S^2 \times \{1\}$ ختم می شوند. تحت این شرایط روابط بین مولدهای گروه گیسو تغییر می کنند. در واقع یک رابطه جدید به روابط قبلی اضافه می شوند. این رابطه را پیدا کنید.

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad if \qquad |i-j| > 1 \tag{۸}$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \tag{۹}$$

- تمرین: در گروه B_n شکل گیسوهای زیر را رسم کنید:

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}, \qquad \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1.$$

$$\sigma_1{}^{-1}\sigma_2{}^{-1}\cdots\sigma_{n-1}{}^{-1}, \qquad \sigma_{n-1}{}^{-1}\sigma_{n-2}{}^{-1}\cdots\sigma_1{}^{-1}.$$

■ تمرین: در گروه B_n شکل گیسوهای زیر را رسم کنید:

$$\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1}, \qquad \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_1.$$

می توان بستار یک عنصر گروه گیسو [۲۲] را مطابق شکل ۶ تعریف کرد به این معنا که هرکدام از نقاط بالایی را توسط یک منحنی که از دوردست ها می گذرد به نقطه متناظر آن در پایین وصل کرد. آنچه که بدست می آید یک گره است. سوال آین است که آیا هر گرهی به این صورت بدست می آید. پاسخ این سوال مثبت است و یکی از نقاط عطف در مطالعات مربوط به نظریه گره است. در واقع ثابت شده است که هر گرهی حتما بستار یک گیسو است. ممکن است که گیسوهای متفاوت بستارهای یکسان داشته باشند. بازهم یک قضیه مهم پاسخ این سوال را روشن می کند. هرگاه یک گیسو را با b و بستار آن را با $Cl(b)$ نشان دهیم این قضیه بیان می کند که

$$\begin{aligned} Cl(b) &\sim Cl(b') \quad if \quad b=\alpha\beta \quad and \quad b'=\beta\alpha \\ C(b) &\sim Cl(b') \quad if \quad b'=b\sigma_n^{\pm}1. \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

شکل ۷ محتوی این قضیه را بیان می کند. از روی این شکل می توان ایده کلی پشت این قضیه را دریافت.

این قضیه در ضمن راه تعریف ناورداهای جدیدی برای گره ها را هموار می کند. یک راه این است که نمایشی از گروه گیسو پیدا کنیم و سپس با تعریف یک رد مناسب روی این نمایش به یک ناوردای مناسب برای گره ها برسیم. ایده اصلی این راه هم ارتباطی است که بین بستار یک گیسو به عنوان یک مفهوم هندسی و بستار نمایش ماتریسی آن به عنوان یک مفهوم جبری است. برای آنکه نمایشی از گروه گیسو پیدا کنیم می بایست به هر کدام از مولد های گروه گیسو مثل σ_i یک ماتریس در یک فضای برداری مثل $D(\sigma_i)\equiv B_i$ نسبت دهیم که در همان روابط گروه گیسو صدق کنند. برای آنکه چنین ماتریسی هایی را پیدا کنیم یک راه این است که سعی کنیم معادله زیر را حل کنیم.

$$(B\otimes I)(I\otimes B)(B\otimes I)=(I\otimes B)(B\otimes I)(I\otimes B) \qquad (۱۱)$$

[۲۲] Closure of a braid

دقت کنید که دراین جا V یک فضای برداری است و B ماتریسی است که در فضای زیر تعریف شده است:

$$B : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V.$$

معادله فوق را با نمایش شاخص برای فضا های برداری می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$B_{12}B_{23}B_{12} = B_{23}B_{12}B_{23}. \qquad (۱۲)$$

هرگاه که چنین ماتریس هایی را پیدا کنیم آنگاه می توانیم نمایش های گروه گیسو را به شکل زیر بنویسیم:

$$D(\sigma_i) = B_i := I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes B \otimes I \cdots \otimes I \otimes \otimes I. \qquad (۱۳)$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که ماتریس های فوق نمایشی از گروه گیسو را تشکیل می دهند.

■ تمرین: ماتریس زیر را تشکیل دهید

$$R := PB \qquad (۱۴)$$

که در آن

$$P|i,j\rangle = |j,i\rangle \qquad P_{ij,kl} = \delta_{il}\delta_{jk} \qquad (۱۵)$$

عملگر جایگشت است. نشان دهید که ماتریس R در رابطه زیر صدق می کند:

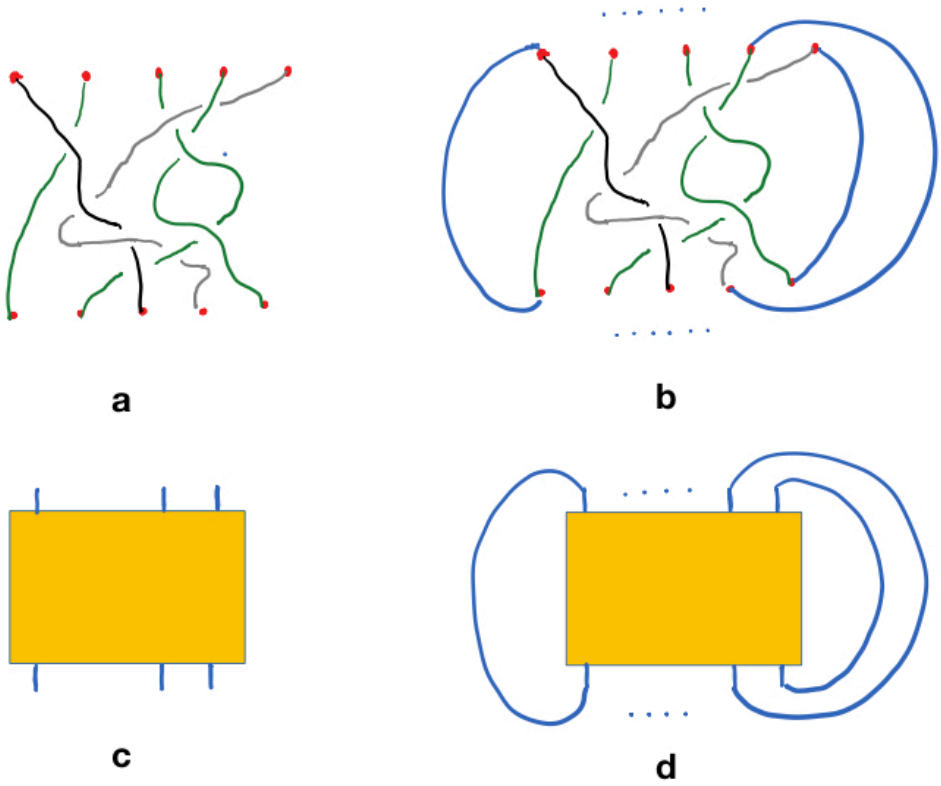
$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \qquad (۱۶)$$

این معادله را معادله یانگ ـ باکستر [۲۳] می گویند.

چنانچه یک نمایش از گروه گیسو یافته شود قدم بعدی این است که بتوان ردّی روی این نمایش چنان تعریف کرد که در خاصیت های نشان داده شده در رابطه ۱۰ صدق کند. می توان به این ترتیب یک ناوردای گره ساخت. ایده کلی این است: گرهِ K بستار یک گیسوی b است. یعنی $K = Cl(b)$. دراین صورت رد مارکوف به عنوان یک ناوردای گره $T(K)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(K) = Tr(Cl(b)) \qquad (۱۷)$$

[۲۳] Yang-Baxter Equation



شکل ۶: بستار یک گیسو

این رد یعنی Tr می بایست دارای چنان خاصیتی باشد که شرط ۱۰ صدق کند. این نوع بخصوص از رد را نخستین بار تورایف [۲۴] تعریف کرده و توانسته ناورداهای گره را تعریف کند.

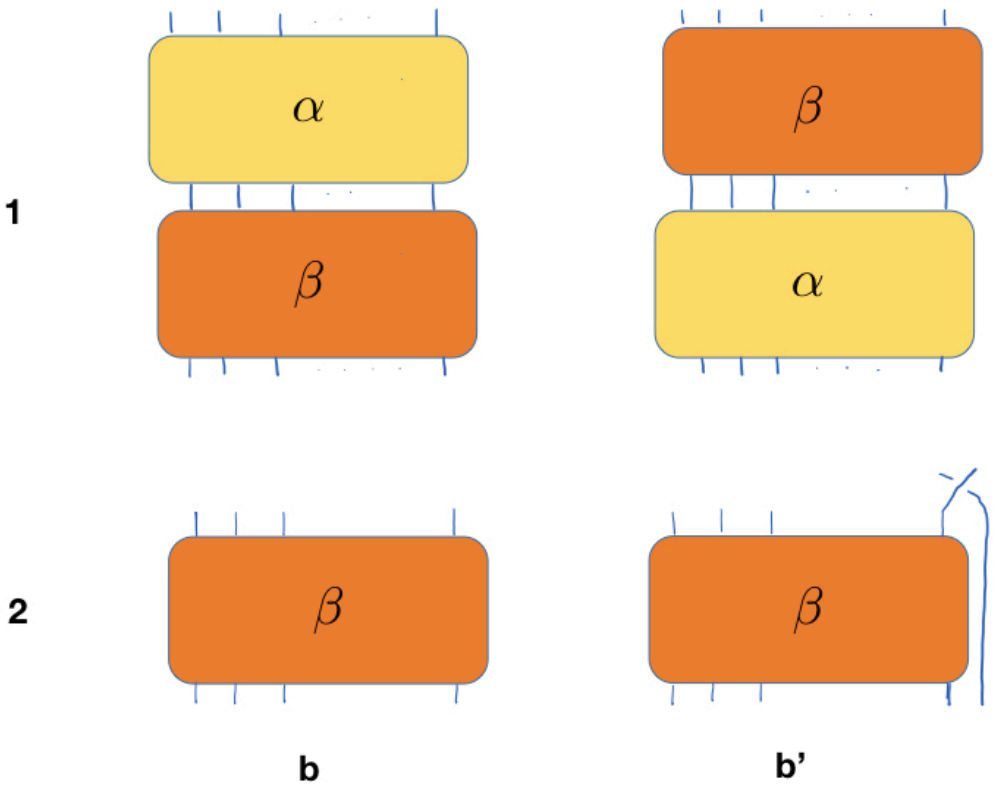
۵ جبر تمپرلی- لیب و رابطه آن با گروه گیسو

■ تعریف: جبر تمپرلی لیبِ [۲۵]

$T_n(d)$ با مولدهای $\{e_1, e_2, \cdots e_{n-1}\}$ و روابط زیر تعریف می شود:

[۲۴] Turaev

[۲۵] Temperly-Lieb



شکل ۷: بستار دو گیسو با هم معادل اند اگر و فقط اگر آن دو گیسو به یکی از دو شیوه نشان داده شده در این شکل با هم رابطه داشته باشند.

$$\begin{aligned} e_i^2 &= de_i & \forall\, i \\ e_i e_j &= e_j e_i & |i-j|>1 \\ e_i e_{i\pm1} e_i &= e_i. \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

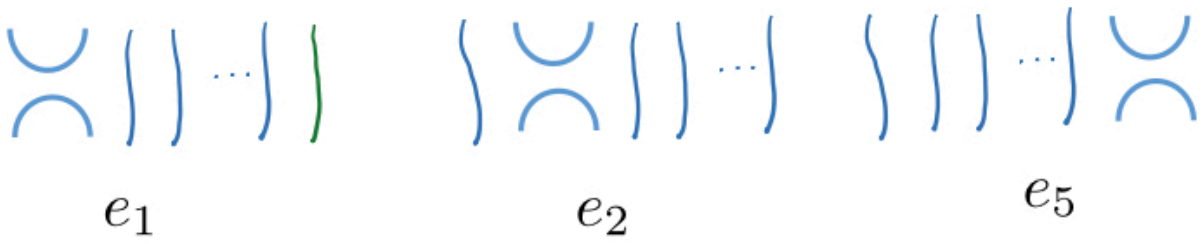
یکی از دلایل اهمیت این جبر رابطه ای است که با گروه گیسو دارد. در واقع هرگاه عناصر زیر را تعریف کنیم:

$$\sigma_i = tI + t^{-1}e_i, \qquad (۱۹)$$

و قرار دهیم

$$d = -(t^2 + t^{-2}) \qquad (۲۰)$$

با کمی محاسبه خواهیم دید که σ_i ها در روابط گروه گیسو صدق می کنند . این ارتباط از یک طرف یافتن نمایش های ماتریسی گروه گیسو را ساده تر می کند (زیرا به هر حال جبر تمپرلی-لیب، جبر ساده تری است). از طرف دیگر این رابطه جبری تبدیل به یک رابطه توپولوژیک بین



شکل ۸: مولدهای جبر تمپرلی-لیب مطابق با کلاس هم ارزی این منحنی ها هستند.

گروه گیسو و کلاس های هم ارزی جدیدی بین منحنی ها می شود. برای این که این رابطه جدید را توضیح دهیم بازهم یک مجموعه n تایی از نقاط را در صفحه دوبعدی و یک نسخه دیگر از همین صفحه با همین نقاط درست در بالای آن در نظر بگیرید. سپس مطابق شکل (؟؟) یک مجموعه منحنی از نقاط پایینی به نقاط بالایی رسم کنید. این منحنی ها یکدیگر را قطع نمی کنند و دور یک دیگر نیز تاب نمی خورند. این منحنی ها می توانند از یک نقطه در صفحه پایینی شروع شده و به نقطه دیگری از همان صفحه پایینی وصل شوند. در همه حال نیز منظور ما از منحنی ها کلاس هم ارزی آنهاست به این معنا که یک منحنی و تغییرشکل پیوسته آن را یکی در نظر می گیریم. حال خواننده براحتی می تواند نشان دهد که مولدهای جبر تمپرلی ـ لیب متناظر با منحنی های نشان داده شده در شکل (؟؟) هستند.

- تمرین: منحنی های متناظر با عناصر زیر از جبر تمپرلی-لیب $T_4(d)$ را رسم کنید:

$$e_1e_2e_1e_2, \qquad e_1e_3e_1e_2e_3, \qquad e_1e_2e_3e_2e_4e_2e_1. \tag{۲۱}$$

- تمرین: ماتریس زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید که در معادله گروه گیسو صدق می کند.

$$B = \begin{pmatrix} q & & & \\ & p^{-1} & q-q^{-1} & \\ & & p & \\ & & & q \end{pmatrix} \tag{۲۲}$$

سپس از روی آن یک جواب برای جبر تمپرلی-لیب پیدا کنید. واقعا تست کنید که جوابی که پیدا کرده اید در روابط جبر تمپرلی ـ لیب صدق می کند. مقدار d را برای جبر تمپرلی ـ لیب پیدا کنید.

$$e_n e_{n+1} e_n = e_n \qquad e_n^2 = d\ e_n$$

a b

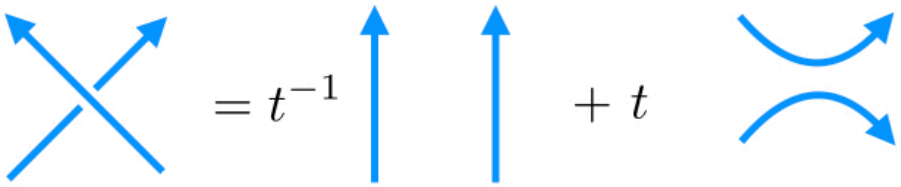
شکل ۹: روابط بین مولدهای جبر تمپرلی_لیب یک معنای توپولوژیک دارد.

۶ براکت کافمن و ناورداهای گره

رابطه ای که بین جبر تمپرلی_لیب و گروه گیسو پیدا کردیم به ما کمک می کند که به روش دیگری برای پیداکردن ناورداهای گره ها تلاش کنیم. این کار نخست توسط لویس کافمن [۲۶] ریاضیدان امریکایی انجام شده است و به چیزی که برای گره بدست می آید اصطلاحا براکت کافمن [۲۷] گفته می شود.

اگر روی یک گره جهتی اختیاری را در نظر بگیریم و به تصویر مسطح این گره فکر کنیم آن را به صورت مجموعه ای از تقاطع ها [۲۸] خواهیم دید که در آن خط سمت چپ یا از رو و یا از زیر خط سمت راست رد شده است. هر کدام از این تقاطع ها را می توانیم به صورت یک گیسوی بسیار ساده و کوچک در نظر بگیریم. اگر بقیه گره را به کلی فراموش کنیم و فقط به این گیسوی کوچک فکر کنیم می توانیم از رابطه (۱۰) استفاده کنیم و این گیسو را باز کنیم. این باز کردن به صورت دقیق تر به این معناست که هر نمایشی که برای گیسو ها (یا تقاطع ها) در نظر

[۲۶] Luis Kauffman
[۲۷] Kauffman Braket
[۲۸] Crossing



شکل ۱۰: قواعد کافمن برای بازگردن تقاطع ها و بدست آوردن ناوردای یک گره: وقتی که این کار را برای همه تقاطع ها یکی پس از دیگری انجام دهیم نهایتا به یک چندجمله ای برحسب t و t^{-1} می رسیم.

بگیریم، نمایش ماتریسی این گره به صورت نمایش ماتریسی دو عضو دیگر نوشته می شود. از آنجا که این نمایش ماتریسی قرار است که نهایتا منجر به یک ناوردای توپولوژیک برای گره شود، این رابطه رابطه ای خواهد شد بین ناورداهای دو شکل ساده تری که دیگر دارای آن تقاطع بخصوص نیستند. وقتی که این کار را یک به یک برای همه تقاطع ها انجام دهیم سرانجام به رابطه ای بین ناوردای گره اولیه و مجموعه ای از گره های کاملا باز شده می رسیم که به ما این امکان را می دهد که ناوردای گره اولیه را پیدا کنیم. قواعد کافمن در شکل (۱۰) نشان داده شده اند. وقتی که این قواعد را برای همه تقاطع ها یکی پس از دیگری انجام دهیم نهایتا به یک چندجمله ای برحسب t و t^{-1} می رسیم که ناوردای گره است. برای آنکه نهایتا به یک چندجمله ای برسیم لازم است که این قواعد را با دو قاعده مهم دیگر تکمیل کنیم: قاعده اول: به هر گره ساده باز مثل یک دایره عدد $d = -(t^2 + t^{-2})$ نسبت داده می شود. بنابراین ناوردای یک گره کاملا بدیهی برابر است با d.

قاعده دوم: برای قاعده دوم احتیاج به یک مفهوم دیگر داریم. اگر قواعد کافمن را برای گره نشان داده شده در شکل (۱۱) به کار ببریم چندجمله ای که بدست می آوریم برابر است با $-t^3 d$. در نگاه اول این یک تناقض به نظر می رسد زیرا که گره نشان داده شده بدیهی است . اما نکته این است که این گره یک تاب [۲۹] دارد و فاکتور t^{-3} به خاطر آن تاب پدید آمده است. اگر گره از یک نخ کاملا نازک پدید آمده باشد تاب قابل شناسایی نیست و بی معناست اما اگر گره از یک نوار با یک ضخامت محدود (مثل یک کمربند) درست شده باشد آنگاه تاب بامعنا و قابل

[۲۹] Twiste, or Writhe

تعریف است. بنابراین درست تر این است که بگوییم ناوردای کافمن به شکل گفته شده در این قواعد نه ناوردای یک گره ، بلکه ناوردای یک نوار را نشان می دهند. نکته جالب این است که اگر یک نوار یا کمربند را در جهت دیگری تاب دهید (مثل آنچه که در شکل ( ) نشان داده شده) آنگاه نواری بدست می آید که از نظر توپولوژیک با نوار تاب داده شده در جهت عکس فرق دارد. این کار را با یک کمربند امتحان کنید. خواهید دید که نمی توانید تاب یک کمربند را بدون پاره کردن آن برعکس کنید. ناوردای کافمن این تفاوت را به خوبی نشان می دهد.

- تمرین : برای نوارهای نشان داده شده در شکل ( ) ناوردای کافمن را حساب کنید و نشان دهید که ناوردای کافمن این دو نوار را از هم تمیز می دهد.

چگونه می توانیم از این ناورداها استفاده کنیم و ناورداهای گره (یعنی منحنی بدون ضخامت) را پیدا کنیم؟ پاسخ این سوال را می توانیم با توجه به تمرین قبلی پیدا کنیم. در واقع همانطور که در این تمرین می بینیم برای تاب منفی (برای تعریف به چند سطر بعد نگاه کنید) یک ضریب $-t^{-3}$ و برای تاب مثبت یک ضریب $-t^3$ در d یعنی ناوردای گره بدون ضخامت ضرب شده است. پس اگر ناوردای کافمن برای یک نوار را با $\langle K\rangle$ نشان دهیم کافی است که ناوردای همان گره را به صورت زیر نشان دهیم: (یعنی کاری کنیم که فاکتورهایی را که به خاطر تاب ها پدیدآمده اند حذف کنیم):

$$J_K(t) := (-t^3)^{W(K)}\langle K\rangle, \qquad (۲۳)$$

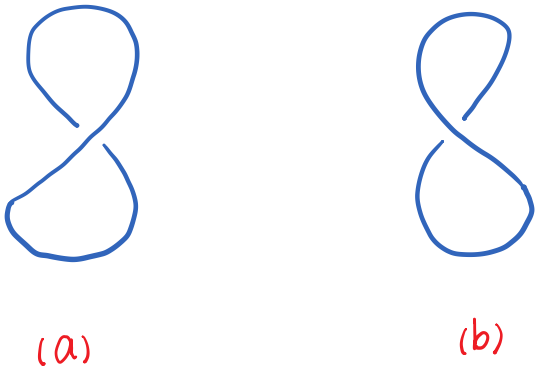
که در آن $W(K)$ عدد پیچش یا عدد تاب [۳۰] آن نوار است. این ناوردا همان چند جمله ای مشهور جونز [۳۱] است که آن را از طریق دیگری بدست آورده و برای آن مدال فیلدز برده است. دلیل اهمیت ناوردای جونز این است که ثابت شده است واقعا یک ناوردای قوی برای تمیز دادن گره هاست، یعنی گره هایی را که تا کنون ناورداهای دیگر نمی توانستند از یکدیگر تمیز دهند، از یکدیگر تمیز می دهد.

اما عدد پیچش چطور تعریف می شود؟

- تعریف: عدد پیچش یک تقاطع به صورت نشان داده در شکل (۱۲) نشان داده می شود. عدد پیچش یک گره یا نوار مجموع جبری تمام عددهای پیچش برای همه تقاطع ها ست.

- تمرین : چند جمله ای جونز را برای گره سه برگی و تصویر آینه ای آن حساب کنید.

[۳۰] Write number
[۳۱] Jones Polynomial



شکل ۱۱: استفاده از قواعد کافمن برای این دو گره منجر به دو مقدار متفاوت می شود که نشان می دهد این دو شکل با یک گره کاملا بدیهی فرق دارند.

چندجمله ای جونز اگر چه براحتی قابل تعریف است ولی براحتی قابل محاسبه نیست. دلیل اش را براحتی با مراجعه به قواعد کافمن می توان فهمید. وقتی که قواعد کافمن را برای گرهی که دارای n تا تقاطع است به کار می بریم در طرف راست نهایتا 2^n تا گره بدیهی بوجود می آید که می بایست ضرایب مربوط به آن ها را جمع کنیم تا چندجمله ای نهایی بدست بیاید. بنابراین حجم محاسبه ای که می بایست انجام شود نسبت به تعداد تقاطع ها به طور نمایی بزرگ می شود.

---

۷ رایانش توپولوژیک

رایانش کوانتومی توپولوژیک [۳۲] چیست؟ چه مزیتی دارد؟ چگونه انجام می شود؟ این ها سوالاتی هستند که سعی می کنیم پاسخ آنها را در این بخش و بخش های آینده پیدا کنیم. علاوه بر این ها می توانیم بپرسیم که رایانش کوانتومی توپولوژیک چه ربطی به مسائل کاملا ریاضی ای که تا کنون طرح کرده ایم دارد؟ آیا رایانش کوانتومی توپولوژیک به یافتن ناورداهای جدید برای گره ها منجر می شود؟ آیا همین ناورداهای تعریف

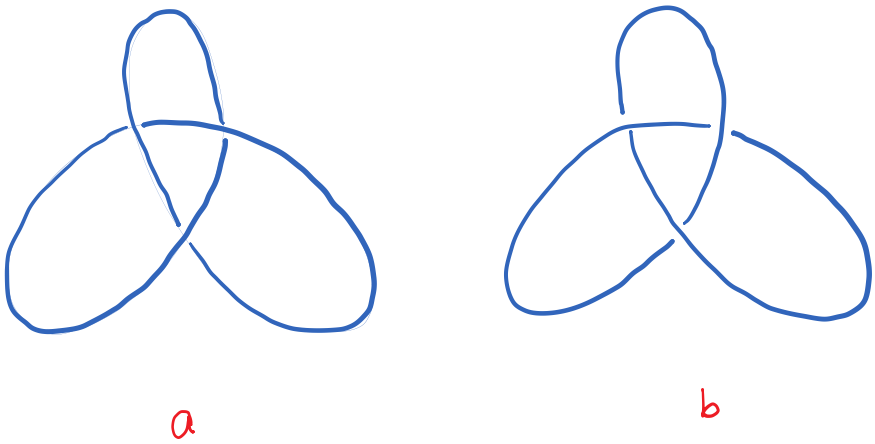
[۳۲] Topological Quantum Computation

شکل ۱۲: تعریف عدد پیچیش برای یک تقاطع. دقت کنید که این عدد ربطی به این که از چه زاویه ای به تقاطع نگاه می کنید ندارد.

شده را به شیوه موثرتری محاسبه می کند؟ سعی می کنیم به اجمال این سوال ها را نیز بررسی کنیم.

نخست به توصیف انگیزه های کلی برای رایانش کوانتومی توپولوژیک می پردازیم. می دانیم که عنصر اساسی رایانش کلاسیک را بیت کلاسیک تشکیل می دهد. بیت کلاسیک چیزی است که می تواند در دو وضعیت مختلف قرار گیرد و این وضعیت را می توانیم با صفر و یک متناظر کنیم. این بیت یک موجود ماکروسکوپی و بس ذره ای است و شامل میلیون ها ذره میکروسکوپی است. حالت جمعی این ذرات مشخص می کند که آیا بیت در حالت صفر قرار گرفته است یا در حالت یک. به همین دلیل اگر حالت یکی از ذرات تغییر کند و به کلی عوض شود در حالت جمعی ذرات تغییر قابل ملاحظه ای پیش نمی آید. به عنوان مثال می توانید بیت کلاسیک را به صورت حالت انبوهی از گشتاورهای مغناطیسی ذرات در نظر بگیرید که مجموعا یک گشتاور مغناطیسی کل تولید می کنند. اندازه این گشتاور کل که ناشی از یک نوع نظم آنهم نظم موضعی [۳۳] است تعیین می کند که بیت صفر است یا یک. منظور از نظم موضعی نیز این است که می توان آن را با یک مشاهده پذیر موضعی تمیز داد. به عنوان در شکل (۱۴) براحتی می توان با مشاهده یک ناحیه کوچک تشخیص داد که آیا در فاز بی نظم هستیم یا فاز منظم و اگر در فاز منظم هستیم این فاز، کدام یک از فازهاست. نکته مهم این است که دو وضعیت یک بیت کلاسیک متناظر با دو وضعیت منظم هستند که با نظم موضعی از یکدیگر تمیز داده می شوند. نکته مهم در بیت کلاسیک این است که نسبت به خطاهایی که در تک تک اتم ها و ذرات ایجاد می شود مقاوم است زیرا یک بودن یا صفر بودن بیت کلاسیک نه ناشی از وضعیت یک اتم منفرد بلکه ناشی از یک حالت جمعی میلیون ها اتم است که در یک حالت منظم قرار گرفته اند. شکل (۱۴) این وضعیت را به خوبی نشان می دهد. از طرف دیگر در درسهای گذشته با کیوبیت و شکنندگی فوق العاده آن آشنا شده ایم . اگر چه با کدهای تصحیح خطا می توانیم با خطاهای کوانتومی مقابله کنیم ولی یک راه خیلی بهتر ممکن است این

[۳۳] Local Order



شکل ۱۳ : گره سه برگی و تصویر آینه ای آن.

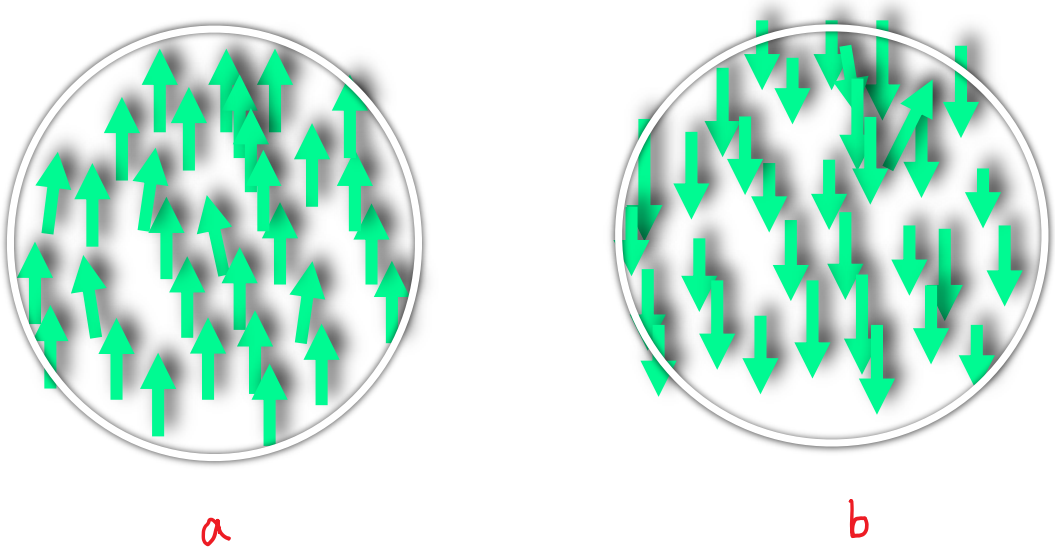
باشد که همین وضعیت های بیت کلاسیک را که ناشی از یک نظم جمعی میلیون ها اتم است در یک حالت برهم نهی قرار دهیم. هرگاه این کار را بکنیم یک کیوبیت درست کرده ایم . این کیوبیت ممکن است مقاوم بودن در مقابل خطا را به طور ذاتی و بدون نیاز به مکانیزم های تصحیح خطا دارا باشد. اما در این جا یک نکته خیلی مهم وجود دارد . این که این دو وضعیت صفر و یک به صورت موضعی از هم قابل تمیز هستند این کیوبیت را در مقابل خطاهای موضعی بشدت آسیب پذیر می کند. برای فهم بهتر این موضوع به مثال زیر توجه کنیم. فرض کنید که این ایده را بخواهیم با ترکیب خطی دو وضعیت یک بیت کلاسیک که ناشی از منظم شدن همه اتم ها یا اسپین ها (به صورت بالا یا پایین) عملی کنیم. به عنوان مثال حالتی از این کیوبیت را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$|GHZ_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\cdots00\rangle + |111\cdots11\rangle\right) \qquad (۲۴)$$

حال فرض کنید که یک اندازه گیری، یک اختلال محیطی ، روی اتم اول اتفاق می افتد. این اندازه گیری اتم اول را یا به حالت 0 یا به حالت 1 می برد و به همراه آن کل حالت به یکی از دو حالت $|000\cdots00\rangle$ یا $|111\cdots11|$ تصویر می شود. این دو حالت با حالت اولیه تفاوت خیلی زیادی دارند و به این ترتیب اثر نوفه محیطی روی یک اتم به کلی برهم نهی کیوبیت را از بین برده و آن را دچار وادوسی کرده است.

اکنون حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(|100\cdots00\rangle + |010\cdots00\rangle + \cdots|000\cdots01\rangle\right) \qquad (۲۵)$$

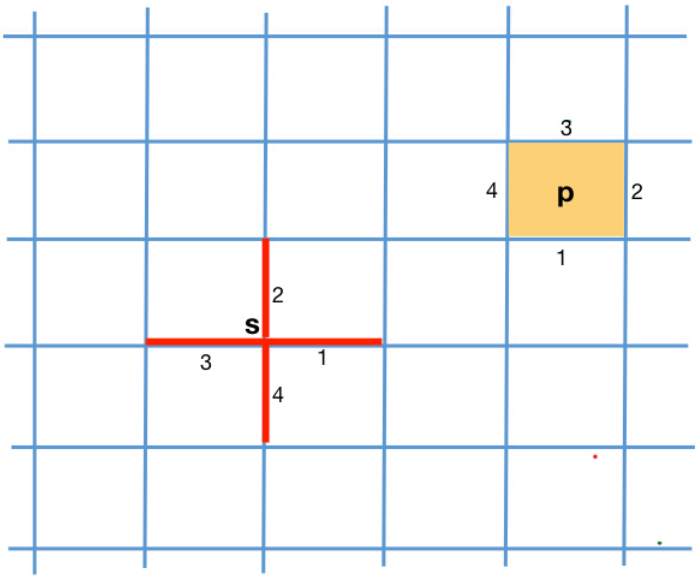


شکل ۱۴: دو وضعیت یک بیت کلاسیک . میلیون ها ذره در یک نظم موضعی خاص وضعیت صفر و در یک نظم موضعی دیگر وضعیت یک را تعریف می کنند. اگر تعداد کمی از این ذرات از این نظم پیروی نکنند بازهم وضعیت بیت تغییری نمی کند. نظم به این دلیل موضعی نامیده می شود که می توان با مشاهده یک بخش کوچک از سیستم آن را تشخیص داد.

این حالت از بر هم نهی حالت هایی تشکیل شده که تقریبا به صورت موضعی از قابل تمیز نیستند. حال اگر همان اتفاقی که در بالا برای اتم اول افتاد برای اتم اول در این جا بیفتد با احتمال $\frac{1}{N}$ این حالت به $|000\cdots0\rangle$ تصویر شده و با احتمال $\frac{N-1}{N}$ به

$$|0\rangle \otimes |W_{N-1}\rangle$$

تصویر می شود که هنوز شباهت خیلی زیادی با حالت اولیه دارد. به این ترتیب قابل تمیز بودن از نظر موضعی مرادف است با این که نوفه موضعی نیز وادوسی یک حالت را از بین ببرد. این مشاهدات ما را به این نکته رهنمون می شود که اگر بخواهیم یک کیوبیت ماکروسکوپی درست کنیم می بایست این کیوبیت از برهم نهی حالت هایی درست شود که از نظر موضعی از هم قابل تمیز نباشند. این مشاهده ارتباط رایانش کوانتومی توپولوژیک را با نظم توپولوژیک نشان می دهد. منظور از نظم توپولوژیک نیز نظمی است که با مشاهده گرهای موضعی قابل شناسایی نیست. در ادامه این درس با مثالهایی از این نوع نظم آشنا خواهیم شد.



$$A_s = X_1X_2X_3X_4$$

$$B_p = Z_1Z_2Z_3Z_4$$

شکل ۱۵: عملگرهای ستاره و پلاکت در مدل کیتائف. همه این عملگرها با هم جابجا می شوند.

۸ مدل کیتایف ـ آنیون های آبلی

مدل کیتایف [۳۴] ساده ترین و شاید اولین مدلی باشد که روی یک شبکه امکان یک نظم توپولوژیک را بیان می کند. هم چنین این مدل اولین مدل بس ذره ای روی یک شبکه دوبعدی است که به صورت دقیق قابل حل است. این مدل را می توان روی هر نوع شبکه دوبعدی حتی شبکه های بی نظم نیز تعریف کرد ولی ما برای وضوح تعریف مدل روی یک شبکه مربعی را در نظر می گیریم. شبکه ای مربعی را با N راس در نظر بگیرید. چنین شبکه ای دارای $2N$ ضلع و N مربع خواهد بود. شرایط مرزی را نیز پریودیک در نظر می گیریم . روی هر ضلع یک ذره اسپین $1/2$ زندگی می کند. به این ترتیب فضای هیلبرت کل دارای بعد $dim(H) = 2^{2N}$ است.

هامیلتونی این مدل به شکل زیر تعریف می شود:

$$H_{Kitaev} := -\sum_s A_s - \sum_p B_p \qquad (۲۶)$$

که در آن s نشان دهنده یک راس (star) و p نشان دهنده یک مربع یا (plaqutte) است. هم چنین عملگرهای A_s و B_p به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A_s := \prod_{i\in s} X_i, \qquad B_p := \prod_{i\in p} Z_i. \qquad (۲۷)$$

[۳۴] Kitaev Model

در این عبارت ها

$$Z_i = \sigma_{z,i}, \qquad X_i = \sigma_{x,i}$$

ماتریس های پاوولی هستند و منظور از $i \in s$ تمامی اضلاعی است که از راس s می گذرند و منظور از $i \in p$ تمام اضلاعی است که پیرامون p هستند. این عملگرها دارای خاصیت های زیر هستند:

$$A_s^2 = I, \qquad B_p^2 = I, \qquad [A_s, B_p] = 0 \tag{۲۸}$$

هم چنین به دلیل شرایط مرزی پریودیک دو قید زیر روی این عملگرها وجود دارد:

$$\prod_s A_s = I, \qquad \prod_p B_p = I. \tag{۲۹}$$

به این ترتیب در این مدل 2^{2N-2} عملگر مستقل وجود دارند که با یک دیگر و با هامیلتونی جابجا می شوند. می توان تمام این عملگرهای مستقل جابجاشونده را در یک پایه قطری کرد. عناصر این پایه را موقتا به شکل زیر نشان می دهیم:

$$|\{\alpha\};\{\beta\}\rangle := |\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{N-1}; \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{N-1}\rangle, \tag{۳۰}$$

و در نتیجه

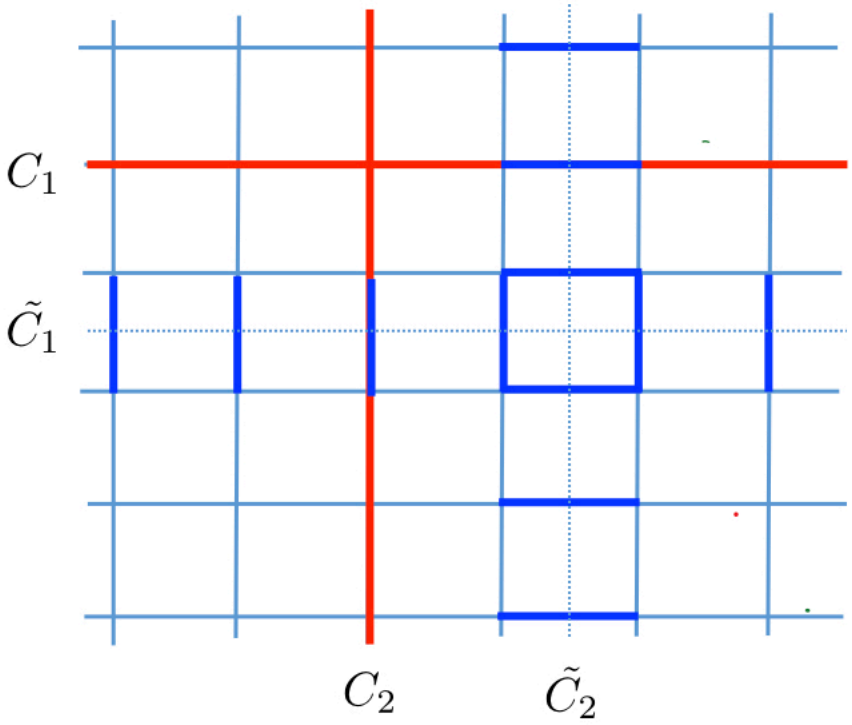
$$H|\{\alpha\};\{\beta\}\rangle = -E_{\{\alpha\};\{\beta\}\rangle}|\{\alpha\};\{\beta\}\rangle, \tag{۳۱}$$

که در آن

$$E_{\{\alpha\};\{\beta\}\rangle} = -\sum_i \alpha_i - \sum_i \beta_i \tag{۳۲}$$

تعداد عناصر این پایه برابر است با 2^{2N-2} که از بعد فضای هیلبرت کمتر است. می توان به α_s ها و β_p ها به عنوان بارهای موضعی این حالت نگاه کرد چرا که این اعداد ویژه مقدارهای عملگرهای پایسته ای هستند که با هامیلتونی جابجا می شوند. این شمارش نشان می دهد که این بارهای موضعی برای شمارش کلیه حالت های فضای هیلبرت کافی نیستند. بنابراین می بایست در جستجوی بارهای پایسته ای باشیم که بر حسب این بارهای موضعی قابل بیان نیستند و توسط توپولوژی چنبره تعیین می شوند. در واقع چنین بارهایی وجود دارند. برای شناختن این بارها به عملگرهای زیر دقت می کنیم:

$$C_{1,z} = \prod_{j \in C_1} Z_j, \qquad C_{2,z} = \prod_{j \in C_2} Z_j, \tag{۳۳}$$



شکل ۱۶: به ازای هر سیکل (یعنی منحنی بسته ای که مرز جایی نیست) می توان یک عملگر C_z و یک عملگر C_x تعریف کرد.

دراین جا C_1 و C_2 دو منحنی در امتداد سیکل های چنبره هستند. این سکیل ها دارای این خاصیت مهم هستند که مرز یک ناحیه نیستند، به اصطلاح از نظر همولوژی این سیکل ها غیربدیهی هستند. یک چنبره از نظر توپولوژیک دو سیکل غیر بدیهی دارد. از انجا که این سیکل ها مرز یک ناحیه نیستند پس بر حسب عملگرهای پلاکت نیز قابل نوشتن نیستند با این وجود خاصیت مهم آنها این است که با همه عملگرهای راس و پلاکت و در نتیجه با هامیلتونی جابجا می شوند.

بنابراین ویژه حالت های انرژی علاوه بر ویژه مقدارهای $\{\alpha, \beta\}$ می بایست ویژه مقدار عملگرهای فوق را نیز داشته باشد. اما این کافی نیست چرا که با در دست داشتن تنها دو عملگر تعداد حالت های بدست آمده با بعد فضای هیلبرت مساوی نخواهد شد. در این مرحله متوجه می شویم که دو عملگر مشابه دیگر نیز می توانیم بسازیم. در واقع عملگرهای فوق برحسب عملگرهای پلاکت قابل نوشتن نیستند. می توانیم فکر کنیم که چرا به پلاکت ها در این جا نقش ویژه ای داده شده و از عملگرهای راس استفاده نشده است؟ این مسئله ما را به دو عملگر مشابه دیگر می رساند:

$$\tilde{C}_{1,x} = \prod_{j \in \tilde{C}_1} X_j, \qquad \tilde{C}_{2,x} = \prod_{j \in \tilde{C}_2} X_j. \tag{۳۴}$$

هر چهار عملگر در شکل (۱۶) نشان داده شده اند. خواننده براحتی می تواند نشان دهد که این عملگرها نیز بر حسب عملگرهای راس قابل نوشتن نیستند و هم چنین می تواند نشان دهد که هر چهار عملگر $C_{1,x}$، $C_{2,x}$، $C_{1,z}$، $C_{2,z}$ با هم و با هامیلتونی جابجا می شوند. بنابراین

ویژه مقدارهای هامیلتونی دارای یک درجه واگنی چهار هستند و به ترتیب زیر نشان داده می شوند:

$$H|\{\alpha\};\{\beta\},c_1,c_2,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\rangle = -E_{\{\alpha\};\{\beta\}\rangle}|\{\alpha\};\{\beta\},\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\rangle, \qquad c_i=\tilde{c}_i=\pm 1. \tag{۳۵}$$

به این ترتیب ویژه مقدارهای علمگرهای توپولوژیک درجه واگنی انرژی را تعیین می کنند.

حال می توانیم از خود بپرسیم که شکل صریح ویژه حالت های انرژی کدامند؟ برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم: نخست حالت زیر را تعریف می کنیم:

$$|\Omega\rangle = |+\rangle^{2N}, \tag{۳۶}$$

که در آن $|+\rangle$ ویژه حالت عملگر x است. این حالت ویژه حالت همه عملگرهای A_s است ولی ویژه حالت عملگرهای پلاکت نیست. برای آنکه ویژه حالتی از همه عملگرهای راس و پلاکت بسازیم حالت زیر را در نظر می گیریم:

$$|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{|F|}}\prod_p (1+B_p)|\Omega\rangle \tag{۳۷}$$

■ تمرین : الف: نشان دهید که حالت بالا حالت پایه هامیلتونی است.

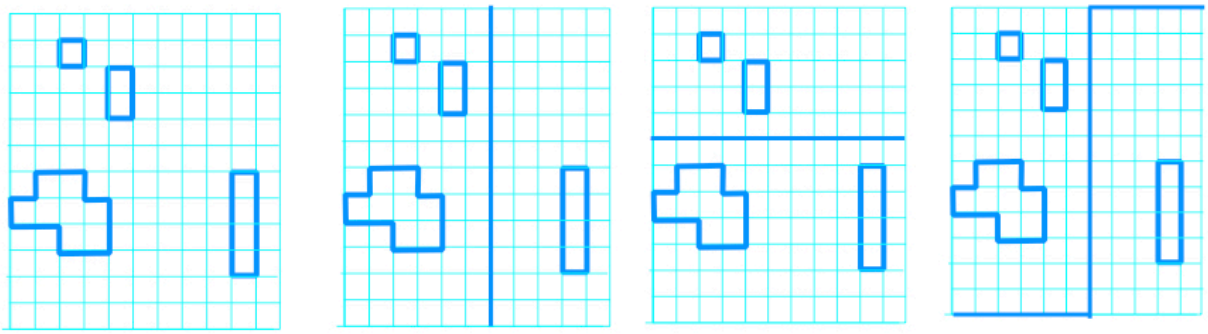
ب: این حالت را بهنجار کنید.

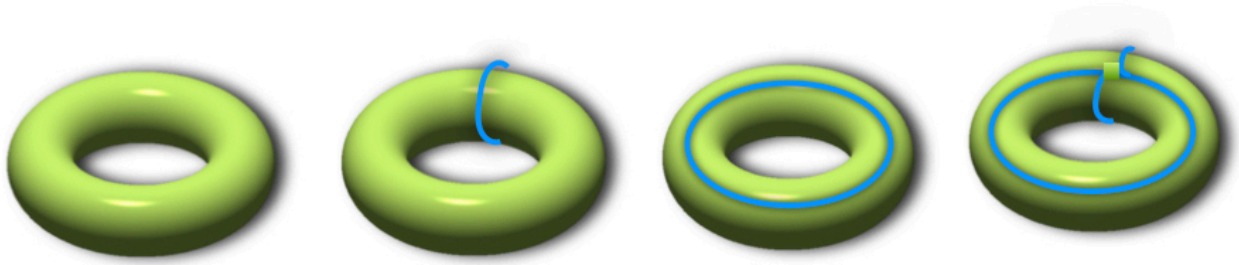
از آنجا که ویژه حالت های هامیلتونی می بایست واگن باشند حالت پایه نیز می بایست واگنی درجه چهار داشته باشد. این حالت ها عبارتند از:

$$|\Psi_{i,j}\rangle := {C_{1,z}}^i {C_{2,z}}^j |\Psi_{00}\rangle. \tag{۳۸}$$

به این ترتیب می توانیم از حالت های پایه مدل کیتایف روی چنبره برای کد کردن دو کیوبیت استفاده کنیم. در واقع می توانیم کیوبیت های منطقی را به صورت زیر نشان دهیم:

$$|i,j\rangle := |\Psi_{ij}\rangle. \tag{۳۹}$$





شکل ۱۷ : حالت های پایه واگن در مدل کتیائف روی چنبره. هر حالت یک برهم نهی بسیار بزرگ از حلقه های اسپین − در دریایی از اسپین های + است. فرق حالت های پایه واگن در وجود یک حلقه از اسپین های − در این دریاست که از نظر توپولوژیک غیر بدیهی است.

■ تمرین : الف: نشان دهید که حالت های بالا حالت پایه هامیلتونی هستند.

ب: این حالت ها را بهنجار کنید.

پ: نشان دهید که اگر عملگرهای $C_{i,z}$ را به طور پیوسته و بدون پاره کردن منحنی های مربوطه تغییر شکل دهید هیچ تغییری در حالت های بالا پدیدار نخواهند شد.

ت: نشان دهید که حالت های زیر نیز ویژه حالت های هامیلتونی هستند اگر چه حالت پایه نیستند. سپس انرژی آنها را پیدا کنید:

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{|F|}} \prod_p (1 + (-1)^{s_p} B_p)|\Omega\rangle, \qquad s_p = 0,\ 1. \tag{۴۰}$$

این حالت ها را نیز بهنجار کنید.

■ تمرین: عملگرهای منطقی زیر را تعریف می کنیم:

$$Z_1 := \tilde{C}_{x,1}, \qquad Z_2 := \tilde{C}_{x,2}, \qquad X_1 := C_{z,1}, \qquad X_2 := C_{z,2}. \tag{۴۱}$$

نشان دهید که این عملگرها روی کیوبیت های منقطی $|i,j\rangle$ واقعا مثل عملگرهای منطقی پاوولی عمل می کنند.

■ تمرین: حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\tilde{\Omega}\rangle := |0\rangle^{2N} \tag{۴۲}$$

الف: حال با اثر دادن عملگرهای مناسب روی این حالت سعی کنید یک حالت پایه از سیتم بسازید.

ب: سپس با اعمال عملگرهای توپولوژیک مناسب چهار حالت پایه واگن بسازید.

پ: این حالت های پایه چه ربطی به حالت های پایه ای که قبلا پیدا کردیم دارند؟ آیا می توانید این حالت ها را بر حسب حالت های قبلی بسط دهید.

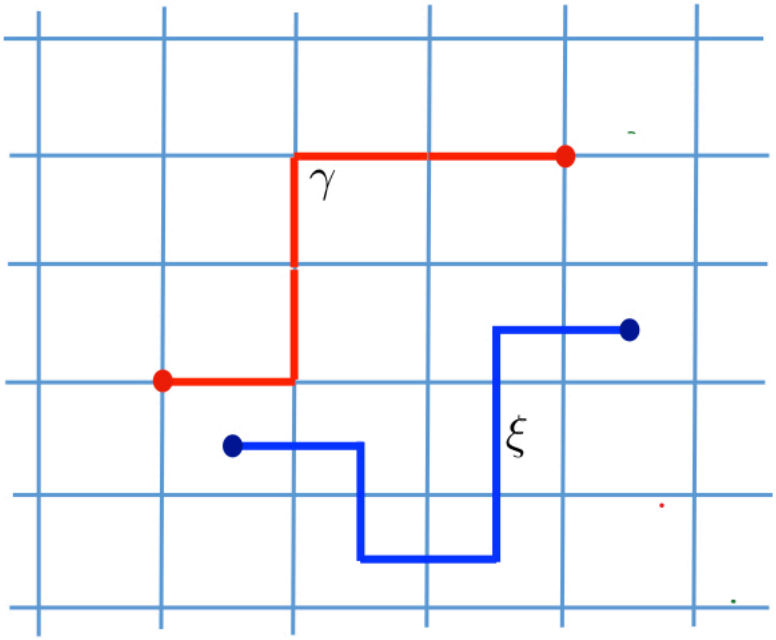
ت: اگر این حالت ها را به صورت کیوبیت های منطقی در نظر بگیریم، اثر عملگرهای منطقی X_i و Z_i را روی آنها پیدا کنید.

حال از خود می پرسیم که حالت های برانگیخته این سیستم چه هستند و چه خواصی دارند؟ پاسخ این سوال یکی از جنبه های خیلی جالب مدل کیتایف را روشن می کند. یک منحنی باز مثل آن که در شکل (۱۸) نشان داده شده در نظر بگیرید. در امتداد این منحنی عملگرهای z را اعمال کنید. هرگاه منحنی باز را با γ نشان دهیم عملگر مربوطه عبارت است از:

$$C_\gamma = \prod_{i\in\gamma} Z_i. \tag{۴۳}$$

■ تمرین : الف: حالت $C_\gamma|\Psi_{00}\rangle$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که انرژی این حالت برابر است با E_0+4 که در آن E_0 انرژی حالت پایه است.

ب: نشان دهید که اگر منحنی γ را تغییر شکل دهید ولی دو سر آن را ثابت نگاه دارید حالتی که بدست می آید هیچ تفاوتی با حالت قبلی نمی کند. بنابراین حالت بدست آمده تنها به دو سر منحنی بستگی دارد و نه به شکل خود منحنی . به ازای هر سر منحنی نیز انرژی به مقدار ۲ واحد بالا رفته است. می توانیم بگوییم که هر منحنی باز به این صورت به مثابه وجود دو شبه ذره است که هر شبه ذره نیز ۲ واحد انرژی دارد. این شبه ذره ها را با e نشان می دهیم. دقت کنید که هر شبه ذره در یک راس زندگی می کند. به دلیلی که در ادامه خواهیم دید این



شکل ۱۸ : هر منحنی باز دو انیون تولید می کند. بسته به این که منحنی باز از عملگرهای z یا x ساخته شده باشد، انیون ایجاد شده از نوع e یا از نوع m است. انیون های e در راس ها و انیون های m در پلاکت ها زندگی می کنند.

شبه ذرات را آنیون های از نوع e می خوانیم.

شبه ذرات e تنها یک نوع از برانگیختگی های این سیستم را نشان می دهد. نوع دیگری از شبه ذرات نیز در این مدل وجود دارد. برای دیدن این شبه ذرات یک منحنی باز مثل ξ در شکل (۱۸) را در نظر بگیرید. در امتداد این منحنی عملگرهای x را اعمال کنید:

$$\tilde{C}_\xi = \prod_{i\in\xi} X_i. \qquad (۴۴)$$

■ تمرین : الف: حالت $\tilde{C}_\xi|\Psi_{00}\rangle$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که انرژی این حالت برابر است با E_0+4 که در آن E_0 انرژی حالت پایه است.

ب: نشان دهید که اگر منحنی ξ را تغییر شکل دهید ولی دو سر آن را ثابت نگاه دارید حالتی که بدست می آید هیچ تفاوتی با حالت قبلی نمی کند. بنابراین حالت بدست آمده تنها به دو سر منحنی بستگی دارد و نه به شکل خود منحنی . به ازای هر سر منحنی نیز انرژی به مقدار ۲ واحد بالا رفته است. می توانیم بگوییم که هر منحنی باز به این صورت به مثابه وجود دو شبه ذره است که هر شبه ذره نیز ۲ واحد انرژی دارد. این شبه ذره ها را با m نشان می دهیم. دقت کنید که هر شبه ذره در یک پلاکت زندگی می کند. به دلیلی که در ادامه خواهیم دید

این شبه ذرات را آنیون های از نوع m می خوانیم.

اکنون وقت آن رسیده که از خود بپرسیم چرا به این ذرات آنیون می گوییم. پاسخ این سوال را می توانیم با مطالعه خواص تابع موج وقتی که این ذرات را جابجا می کنیم پیدا کنیم. یکی از حالت های پایه را در نظر بگیرید. این حالت را با $|\psi\rangle$ نشان می دهیم. با اعمال یک عملگر C_γ یک حالت برانگیخته درست می شود که دارای دو شبه ذره e در نقاط a و b یعنی در نقاط ابتدا و انتهای منحنی γ است. این حالت را با $|\psi(a,b)\rangle$ نشان می دهیم. بنابراین داریم:

$$|\psi(a,b)\rangle := C_\gamma|\psi\rangle. \qquad (۴۵)$$

شکل (۱۸) این حالت را نشان می دهد. می توانیم یکی از این شبه ذرات را حول ذره دیگر بچرخانیم. برای این کار می بایست عملگر ی که کار این چرخش را انجام می دهد روی این حالت اثر دهیم: حالت جدید عبارت است از:

$$C_{\gamma'}|\psi(a,b)\rangle \qquad (۴۶)$$

که در آن γ' یک منحنی است که این چرخش را انجام می دهد.

- تمرین: الف: نشان دهید که حالت جدید یعنی حالتی که پس از این چرخش بدست می آید تفاوتی با حالت قبل از چرخش ندارد. به اصطلاح می گوییم که چرخاندن یک انیون از نوع e حول یک انیون دیگر فاز $+1$ تولید می کند. یعنی دو انیون از نوع e نسبت به هم آمار بوزونی دارند.

  ب: با استدلال مشابه نشان دهید که دو انیون از نوع m نیز نسبت به هم آمار بوزونی دارند.

  پ: نشان دهید که هرگاه یک انیون از نوع e را حول یک انیون m بچرخانیم تابع موج فاز -1 می گیرد.

تمرین بالا نشان می دهد که چرا این ذرات را انیون می نامیم زیرا رفتار کاملا متفاوتی با بوزون ها و فرمیون ها دارند. این ذرات نسبت به ذرات هم جنس خود مثل بوزون ها رفتار می کنند ولی نسبت به ذرات غیر هم جنس خود مثل فرمیون ها رفتار می کنند.

۱.۸ رایانش کوانتومی با آنیون های آبلی در مدل کیتایف

آنچه که تا کنون در باره حالت های برانگیخته و شبه ذرات انیونی گفته ایم راهی را برای رایانش کوانتومی توپولوژیک نشان می دهد. مطابق با این راه می توانیم یک جفت آنیون از نوع e در یک نقطه از چنبره تولید کنیم. (با اعمال یک عملگر z روی یکی از اسپین ها در یکی از اضلاع شبکه). سپس می توانیم بااعمال عملگرهای C_γ این انیون ها را حرکت دهیم تا پس از دور کامل روی یکی از سیکل های چنبره به هم نزدیک شده و در اخرین مرحله باز هم با اعمال یک عملگر z روی آخرین ضلع ، سیکل را کامل کرده و به اصطلاح دو تا انیون های تولید شده را نابود کنیم. حاصل این کار این است که یک عملگر $C_{1,z}$ را روی حالت پایه اعمال کرده ایم. اما این عملگر چیزی نیست جز عملگر منطقی X_1. به روشهای مشابه می توانیم عملگرهای $X_2,\ Z_1,$ و Z_2 را روی این کیوبیت ها اعمال کنیم.

به طور خلاصه می توانیم با تولید انیون ها به صورت موضعی، حرکت دادن آنها و در نهایت نابود کردن آنها یک مجموعه گیت کوانتومی را روی دو کیوبیتی که در حالت های پایه مدل کیتایف ذخیره شده اند اعمال کنیم.

چه چیز توپولوژیکی در این گیت ها نهفته است؟ به چه معنا این نوع رایانش نسبت به خطا مقاوم است؟ برای پاسخ به این سوال می بایست به تمرین زیر توجه کنید.

- تمرین: فرض کنید که در جابجایی انیون ها دچار خطا شویم و وقتی انیون ها را حول سیکل های چنبره حرکت می دهیم یک منحنی بسته ولی تغییرشکل یافته را طی کنیم. نشان دهید که این نوع تغییر شکل ها تا وقتی که منحنی پاره نشود هیچ تغییری در گیت های اعمال شده ندارد.

متاسفانه این ها تنها گیت های کوانتومی ای هستند که می توانیم با انیون های آبلی اعمال کنیم. به این معنی مدل آبلی کیتایف یک مدل عمومی برای رایانش کوانتومی نیست چرا که اجازه اعمال گیت های دلخواه یک کیوبیتی را نمی دهد. برای اینکه بتوانیم رایانش کوانتومی توپولوژیک را به صورت عمومی یا به اصطلاح یونیورسال انجام دهیم می بایست از انیون های آبلی فراتر رویم .

۹ رایانش توپولوژیک با آنیون های غیرآبلی

محدودیت مهم مدل آبلی این بود که با چرخاندن آنیون ها به دور هم توابع موج به شکل خیلی ساده ای تغییر می کردند. برای آنکه این محدودیت را برطرف کنیم می بایست به مدل غیر آبلی فکر کنیم. ما نخست مدل غیر آبلی را به صورت نظری مطالعه می کنیم با این امید که نهایتا این مدل ها، هر چند با تغییراتی، از نظر تجربی ساخته خواهند شد. امروزه شواهد تجربی برای این که آنیون های غیرآبلی در بعضی سیستم های ماده چگال مثل اثر کوانتومی کسری هال وجود دارد وجود دارد. مدل غیر آبلی آنیونی چیست؟ برای پاسخ به این سوال از آنچه که از مدل آبلی آموخته ایم الهام می گیریم. می توان به دو صورت مختلف در این باره فکر کرد. صورت اول ادامه منطقی آنچیزی است که در مدل آبلی کیتایف آموخته ایم که متاسفانه به دلایلی که بر من معلوم نیست در مقالات مربوط به این موضوع مورد بحث قرار نگرفته است. صورت دوم ادامه منطقی مدل آبلی کیتایف نیست و با صورت اول در نحوه ذخیره کردن کیوبیت های منطقی تفاوت دارد و آن چیزی است که در نوشتارها و مقالات به وسعت مورد بررسی قرار گرفته است. در این جا نخست صورت اول را به اختصار شرح می دهیم و سپس به صورت دوم می پردازیم.

۱.۹ صورت بندی اول از مدل غیرآبلی رایانش

در این صورت بندی از مدلِ غیر آبلی کیوبیت ها درست مثل مدل کیتایف در حالت های پایه واگن کد می شوند. برای این منظور نخست باید یک سیستم دو بعدی بس ذره ای یا به صورت اسپین هایی روی شبکه یا به صورت دیگر مثلا گاز یا مایع الکترونی داشته باشیم که دارای خصلت های زیر باشد:

یک: دارای حالت پایه واگن باشد. این حالت های پایه را با

$$\Psi_\alpha, \qquad \alpha = 1, \cdots g \tag{۴۷}$$

نشان می دهیم. اگر g برابر با 2^n باشد این حالت ها را به مثابه حالت های n کیوبیت در نظر می گیریم و به طریق مناسبی آن ها را نامگذاری می کنیم. این واگنی مثل مدل کیتایف ناشی از توپولوژی سطحی است که سیستم را در بر می گیرد. می توان با ایجاد حفره هایی در یک محیط مسطح دوبعدی توپولوژی سطح را به دلخواه پیچیده کرد و در نتیجه واگنی حالت پایه و بعد فضای هیلبرت کیوبیت ها را افزایش داد.

ب: این سیستم دارای یک گاف معین باشد که فضای پایه را از حالت های برانگیخته جدا کند.

پ: حالت های برانگیخته این سیستم (مثل مدل کیتایف) دارای خاصیت شبه ذره ای و جایگزیده باشند به طوری که بتوانیم به طریق تجربی این شبه ذرات را کنترل کنیم. به عبارت دیگر یک حالت برانگیخته را بتوانیم به صورت زیر نشان دهیم:

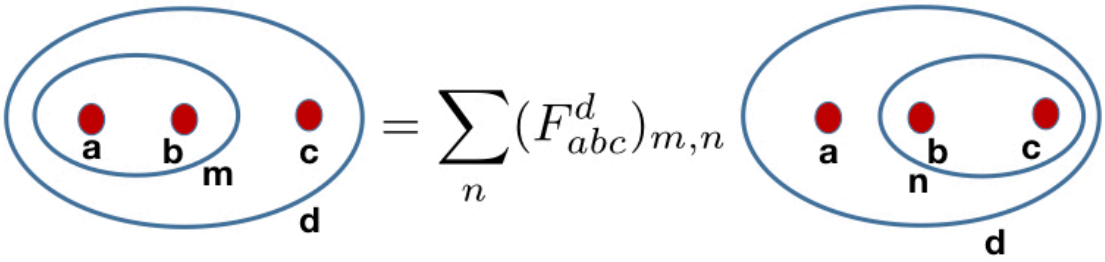
$$\Psi_\alpha(a,b) \tag{۴۸}$$

نشان دهیم که به این معناست که این حالت، یک حالت برانگیخته است که با ایجاد دو انیون a و b روی حالت پایه $|\Psi_\alpha\rangle$ ساخته شده است. معنای کنترل کردن نیز این است که بتوانیم به روش تجربی این شبه ذرات را خلق کنیم (یعنی با صرف انرژی حالت پایه را به یک حالت برانگیخته معین ببریم) ، آنها را در مسیرهای دلخواه حرکت دهیم و سرانجام آنها را از بین ببریم (یعنی با گرفتن انرژی از آنها حالت های برانگیخته را به حالت های پایه برگردانیم.).

ت: این شبه ذرات دارای آمار انیونی غیر آبلی باشند. معنای این حرف چیست؟ فرض کنید که در یکی از حالت های پایه مثل Ψ_α هستیم و دو انیون a, b روی این حالت درست می کنیم. سپس به وسیله ای (با اعمال پتانسیل موضعی توسط نوک یک میکروسکوپ اتمی، یا هر چیز دیگر) انیون a را در یک مسیر حول انیون b می چرخانیم و سپس انیون a را به جای اولش برمی گردانیم. در این صورت معنای غیرآبلی بودن آنیون ها این است که حالت $|\Psi_\alpha\rangle$ تبدیل به حالت زیر می شود:

$$|\Psi_\alpha\rangle \longrightarrow U(a,b)|\Psi_\alpha\rangle = \sum_\beta U(a,b)_{\alpha,\beta}|\Psi_\beta\rangle. \tag{۴۹}$$

به این ترتیب با صرف انرژی دو انیون تولید کرده ، آنها را دور یک دیگر چرخانده ایم و این عمل باعث ایجاد یک عملگر یکانی روی فضای حالت های پایه شده است. تقاضای ما این است که این عملگریکانی یا مجموعه عملگرهای یکانی ای که در اثر چرخاندن این انیون ها یا انیون های دیگر تولید می شوند یک مجموعه یونیورسال از گیت ها را ایجاد کنند. دقت کنید که در اینجا ممکن است انیونb نشان دهنده هیچ یعنی آنیون خنثی باشد (یعنی این که حالت فوق تنها یک انیون دارد). با گردش این انیون حول مدارهایی معین می توانیم ترکیبی خطی از حالت های دیگر درست کنیم. در این مدل از رایانش، کیوبیت ها در حالت های واگن پایه ذخیره می شوند و انیون ها تنها برای ایجاد گیت ، حرکت داده شده و سپس از بین می روند. ماحصل این کار نیز این است که یک گیت یکانی غیربدیهی روی حالت های پایه که همان فضای کد است عمل می کند.



شکل ۱۹: ماتریس F یک پایه را بر حسب پایه دیگر بسط می دهد.

۲.۹ صورت بندی دوم از مدل غیر آبلی رایانش

این صورت بندی همان صورت بندی معمولی است که در همه مقالات و نوشتارها از آن گفتگو می شود. ممکن است که این دو صورت بندی از رایانش توپولوژیک باهم مرتبط باشند ولی در حال حاضر این ارتباط برای من روشن نیست. بنابراین آن ها را به صورت دو فرمول بندی جداگانه طرح می کنم. برای احتیاط نیز باید بگویم که من فهم خود از صورت بندی دوم را بیان می کنم که ممکن است در آینده دچار کمی تحول و تصحیح شود. . در این صورت بندی حالت پایه خود دارای آنیون است. آنچه که در این صورت بندی مورد نیاز است این ها هستند:

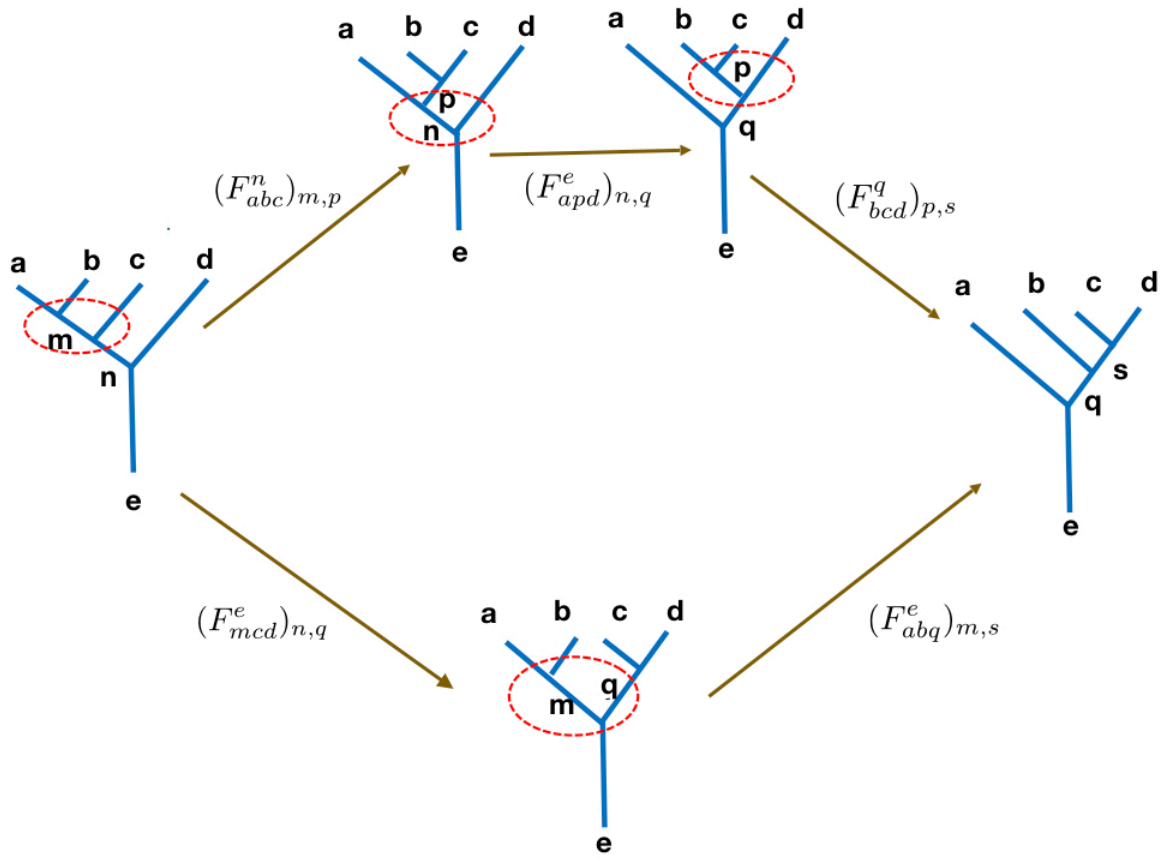
یک : یک مدل بس ذره ای در دو بعد که دارای آنیون است. و فرض این است که میتوان این انیون ها را کنترل کرد یعنی اینکه آنها را تولید کرد، حرکت داد، دور هم چرخاند و سرانجام نابود کرد. به این ترتیب این ویژگی در هر دو صورت بندی مشترک است.

ب: حالت پایه این سیستم حالتی است که دارای شبه ذراتی جایگزیده با نوع معین و تعداد معین است. احتمالا می توان یک مدل بس ذره ای را با اعمال پتانسیل موضعی چنان تغییر داد که به جای حالت های برانگیخته، حالت یا حالت های پایه اش دارای چنین شبه ذراتی باشند. هر آنیون یک نوع بار یا عدد کوانتومی دارد که آن را با $a, b, c, \cdots$ نمایش می دهیم.

با این تفاصیل می توان پرسید که پس فضای هیلبرت منطقی چنین سیستمی یعنی فضایی که کیوبیت های منطقی در آن ذخیره می شوند چیست؟ برای پاسخ به این سوال باید کمی به خصوصیات انیون ها آنهم به طور مجرد بپردازیم. البته این خصوصیات از تجربه و سیستم های واقع ماده چگال یا ذرات بنیادی الهام می گیرند.

فرض بر این است که یک انیون دارای یک نوع بار پایسته است که در تغییر و تحولاتی که پیش می آید ثابت باقی می ماند. ماهیت این بارها فعلا برای ما مهم نیست. می توانیم به آنها به مثابه بارالکتریکی یا مغناطیسی یا اسپین یا چیزی شبیه به آن نگاه کنیم. ولی آنچه که مهم است این است که قاعده ترکیب یا گداخت [۳۵] بارها را بفهمیم. منظور از گداخت نیز به معنای جوش خوردن آنیون ها با یکدیگر نیست (در واقع آنیون ها

[۳۵] Fusion



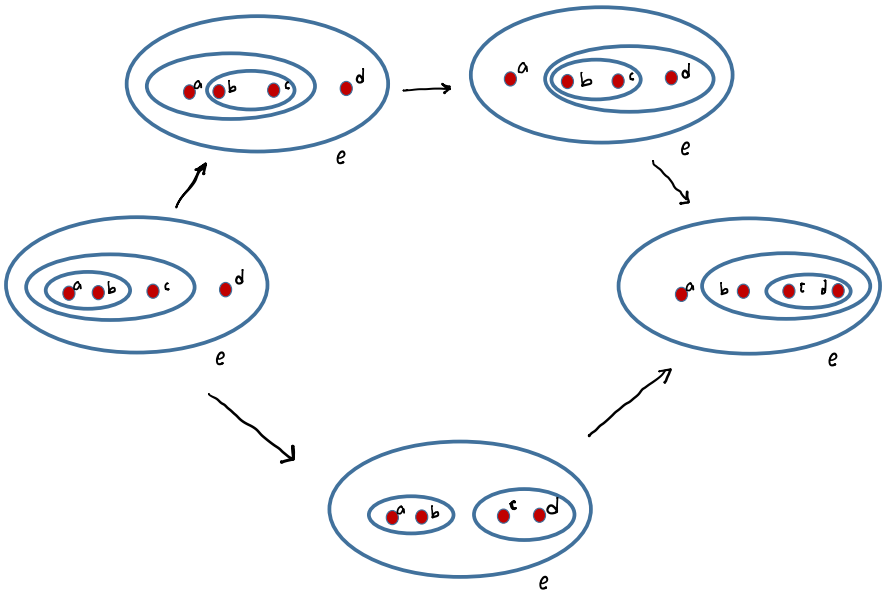
شکل ۲۰: رابطه پنج ضلعی. این رابطه یک قید مهم روی ماتریس F اعمال می کند. هر نوع ماتریسF ای مجاز نیست.

می توانند از هم دور باشند)، بلکه این است که بار کل دو آنیون می تواند مقادیر تنوع به خود بگیرد. همین تنوع در حقیقت منشاء واگنی در حالت پایه و در نتیجه به وجود آمدن فضای هیلبرتی است که می توانیم کیوبیت های منطقی را در آن ذخیره کنیم. ارها می توانند باهم ترکیب شوند. بهترین کار برای فهمیدن این ترکیب توجه به مثال اسپین است. در این جا بار همان اسپین کل است. دو ذره اسپین ۱/۲ را در نظر بگیرید. بنابراین ۱/۲ بار این ذرات است. حال وقتی که دو ذره را در نظر می گیریم بار کل این دو ذره (یعنی همان اسپین کل آنها) می تواند برابر با صفر یا یک باشد. به این معناست که می گوییم بار انیون ها با هم ترکیب می شود یا به اصطلاح بار انیون ها از یک قانون گداخت [۳۶] یا قانون ضرب پیروی می کند:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times = 0 + 1 \qquad (۵۰)$$

در این مرحله با یک خاصیت خیلی مهم و جالب انیون ها مواجه می شویم. برای فهم این خاصیت بازهم به مثال بالا یعنی مثال اسپین ها توجه می کنیم. دو حالت زیر را در نظر بگیرید که اولی اسپین کل اش برابراست با صفر و دومی اسپین کل اش برابر است با یک. می توانیم این دو

[۳۶] Fusion Rule



شکل ۲۱: رابطه پنج ضعلی.

حالت را به ترتیب به عنوان کیوبیت های منطقی صفر و یک در نظر بگیریم. یعنی قرار دهیم:

$$|\overline{0}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle) \equiv |S=0, M=0\rangle$$
$$|\overline{1}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \equiv |S=1, M=0\rangle. \qquad (۵۱)$$

اگر فقط به یکی از اسپین ها دسترسی داشته باشیم حالت های فوق از هم قابل تمیز نیستند. بنابراین کیوبیت های $|\overline{0}\rangle$ و $|\overline{1}\rangle$ نه در وضعیت تک تک اسپین ها بلکه در نوع همبستگی آنها درج شده است. دقت کنید که این تنها یک مثال برای نشان دادن این است که می توان اطلاعات کوانتومی را در همبستگی بین ذرات و نه در نوع خود آنها ذخیره کرد و هدف آن تنها این است که برای فهم آنیون ها و این که چگونه کیوبیت ها را در آنها ذخیره کنیم آماده شویم. پس از این مثال ابتدایی به یک مثال دیگر در همین زمینه یعنی اسپین ها توجه کنیم. فرض کنید به دلایلی علاقمند باشیم که کیوبیت های منطقی را در حالت های چند ذره ای با اسپین کل صفر ذخیره کنیم. به عنوان مثال اگر دو حالت با این خاصیت داشته باشیم یکی را حالت $|\overline{0}\rangle$ و دیگری را حالت $|\overline{1}\rangle$ می نامیم و اگر چهار تا حالت با این خاصیت داشته باشیم از آنها برای ذخیره کردن ۲ کیوبیت منطقی استفاده می کنیم. حال به تمرین زیر توجه کنید.

■ تمرین: چهار ذره اسپین ۱/۲ را در نظر بگیرید. اسپین کل این چهار ذره از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (0+1) \times (0+1) = 0 + 1 + 1' + 0' + 1" + 2. \qquad (۵۲)$$

حالت های اسپین صفر در طرف راست برای کد کردن یک کیوبیت به کار می روند.

الف: شکل صریح این دو حالت را بدست آورید.

ب: حال فرض کنید که ۶ تا ذره اسپین ۱/۲ داریم و هم چنان می خواهیم کیوبیت های منطقی را در حالت های با اسپین کل صفر ذخیره کنیم. این ۶ ذره برای کد کردن چند تا کیوبیت می توانند مورد استفاده واقع شوند؟ پاسخ این سوال را برای وقتی که ۸ ذره و ۱۰ ذره داریم نیز پیدا کنید. (لزومی به پیدا کردن فرم صریح حالت ها نیست).

پ: (قسمت سخت) وقتی که n تا اسپین را در هم ضرب می کنیم تعداد اسپین های 0 را در طرف راست بدست آورید. این تعداد را با D_n نشان می دهیم . برای n های بزرگ، D_n را به صورت $D_n \sim {d_0}^n$ بنویسید. d_0 را بعد کوانتومی این ذرات می خوانیم. دلیل این نام گذاری این است که تشابهی با بعد کیوبیت ها ی مستقل دارد به این معنا که هرگاه n تا کیوبیت مستقل داشته باشیم می دانیم که فضای هیلبرت این مجموعه برابر است با 2^n . در این جا بعد بجای 2 یک عدد کمتر از 2 است.

پس از این تمرین ها می توانیم به موضوع آنیون های غیرآبلی بپردازیم. بهترین کار شروع با یک مثال است. آنیون های موسوم به انیون های فیبوناچی، [۳۷] ساده ترین انیون ها هستند. این انیون ها فقط در یک نوع (یک نوع بار) ظاهر می شوند. این نوع انیون را با 1 نشان می دهیم. می توانیم بگوییم یا قرار بگذاریم که این نوع انیون بار برابر با 1 دارد و خلا یعنی حالتی که هیچ انیونی در آن نیست بار صفر دارد. حدس زده می شود که این نوع انیون ها در شرایط خاصی در اثر کوانتومی هال وجود دارند. قاعده ضرب این انیون ها به این شکل است:

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 1$$

$$1 \times 0 = 1$$

[۳۷] Fibonacci

$$1 \times 1 = 0 + 1. \qquad (۵۳)$$

این قاعده های ضرب نیز کاملا بدیهی هستند به جر مورد آخر که به این معناست که دو انیون فیبوناچی می تواند بار کل شان برابر با صفر یا یک باشد. دقت کنید که یک انیون منفرد با بار صفر واقعا به معنای این است که هیچ انیونی در سیستم بس ذره ای وجود ندارد، ولی دو انیون با بار کل صفر به معنای این نیست که هیچ انیونی وجود ندارد. معنایش فقط این است که بار کل این دو انیون مثل حالتی با هیچ انیون است و اگر این دو انیون را کنار هم بیاورید یک دیگر را از بین خواهند برد.

- تمرین: الف: فرض کنید که می خواهیم کیوبیت های منطقی را در حالت های بس-انیونی با بار کل صفر ذخیره کنیم. از قاعده ضرب فوق استفاده کنید و بگویید که با $4, 5, 6, 7, 10$ انیون بعد فضای هیلبرت منطقی چقدر خواهد شد. یک رابطه کلی برای این بعد بدست آورید و از آنجا بعد کوانتومی d_1 را محاسبه کنید.

  ب: قسمت الف را برای وقتی که می خواهیم کیوبیت های منطقی را در حالت های بس ذره ای با بار ۱ ذخیره کنیم تکرار کنید. به خصوص d_τ را محاسبه کنید.

به طور کلی می توانیم حالتی را در نظر بگیریم که با مجموعه ای از انیون ها سرو کار داریم که در یک مجموعه

$$G = \{a, b, \cdots d\}$$

قرار می گیرند. این مجموعه چنان است که اولا بار 1 که به معنای بار خنثی یا صفر است، متعلق به این مجموعه است. ثانیاً به ازای هر انیون a یک انیون $\overline{a}$ وجود دارد که بارش خنثی کننده بار انیون a است. قواعد ضرب این انیون ها به طور کلی به شکل زیراست:

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c. \qquad (۵۴)$$

اعداد N_{ab}^c اعداد صحیح مثبت یا صفر هستند. مثلا برای مدل فیبوناچی داریم:

$$N_{00}^0 = N_{01}^1 = N_{10}^1 = N_{11}^0 = N_{11}^1 = 1, \qquad all\ others = 0. \qquad (۵۵)$$

این اعداد می توانند بزرگتر از یک نیز باشند. اما این بزرگتر بودن به چه معناست. مثلا معنای اینکه N_{ab}^{c} برابر با ۲ باشد چیست؟ معنایش این است که دو آنیون a و b می توانند در دو حالت مجزا قرار گیرند که بار کل شان برابر با c است ولی این دو حالت در یک عدد کوانتومی دیگر با هم متفاوتند.

می توان این دو حالت را به شکل زیر نشان داد:

$$|ab;1\rangle_c, \qquad\qquad |ab;2\rangle_c. \tag{۵۶}$$

به طور کلی هرگاه N_{ab}^{c} برابر با یک عدد صحیح مثل g باشد خواهیم داشت:

$$|ab;\mu\rangle_c, \qquad\qquad \mu = 1 \cdots g. \tag{۵۷}$$

در این درسنامه این حالت ها را بررسی نخواهیم کرد.

۳.۹ قواعد گداخت

دو باره به مدل ساده انیون های فیبوناچی بازمی گردیم تا معنای قواعد گداخت را بفهمیم. یک حالت در نظر بگیرید که دارای سه تا انیون است. این بار انیون ها را با بارشان نشان می دهیم. بنابراین ، این حالت را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$|1,1,1\rangle. \tag{۵۸}$$

ولی این توصیف از حالت کوانتومی کامل نیست و حالت سه تا انیون را به طور کامل مشخص نمی کند، زیرا نمی گوید که بار کل سه انیون چیست، آی برابر با 0 است یا 1 ؟. بنابراین یک توصیف کامل می بایست به صورت زیر باشد:

$$|111\rangle_0, \qquad or \qquad |111\rangle_1. \tag{۵۹}$$

که اندیس 1 یا 0 بار کل را مشخص می کند. ولی بازهم این توصیف کامل نیست، زیرا بار دو انیون اول می توانسته 0 یا 1 بوده باشد و این بار کل را تولید کند. به عبارت دقیق تر اگر بار کل برابر با 0 باشد آنگاه توصیف کامل به صورت زیر است:

$$|(11)_1,1\rangle_0, \tag{۶۰}$$

اما اگر بار کل برابر با 1 باشد، آنگاه بار کل دو ذره اول به یکی از صورت های زیر است:

$$|(11)_0, 1\rangle_1, \qquad or \qquad |(11)_1, 1\rangle_1. \tag{۶۱}$$

بنابراین زیر فضایی که در آن بار کل برابر با صفر است یک زیر فضای یک بعدی و زیر فضایی که در آن بار کل برابر با یک است یک زیر فضای دو بعدی است.

حال از خود می پرسیم که کدام توصیف کامل تر است؟ اینکه علاوه بر بار کل ، بار کل دو ذره اول و دوم را معین کنیم یا اینکه بار کل دو ذره دوم و سوم را؟ یا بار کل دو ذره اول و سوم را؟ پاسخ این است که این هر سه توصیف معادل هستند و حالت هایی که با این توصیف های مختلف تعریف می شوند همه در یک فضا هستند و آنها را می توان به صورت ترکیب خطی از یک دیگر نوشت. البته دقت کنید که در این جا این فرض نهفته است که توصیفی کامل تر از آنچه که گفته ایم وجود ندارد به این معنا که نمی توان بار کل ذره اول و دوم را به همراه بار کل ذره دوم و سوم هر دو باهم تعیین کرد. به عبارت دیگر اگر عملگر بار کل را با Q نشان دهیم ، پیش فرض این است که :

$$[Q_1, Q_{12}] = [Q_2, Q_{12}] = 0, \qquad [Q_{12}, Q_{23}] \neq 0, \qquad etc. \tag{۶۲}$$

- تمرین: اگر n تا انیون فیبوناچی با بار کل ۱ داشته باشیم چند کیوبیت منطقی می توانیم در آنها کد کنیم. به عبارت بهتر چند حالت داخلی برای این آنیون ها قابل تصور است به قسمی که بار کل آنها برابر با یک باشد. برای n ها زیاد تعداد این حالت ها که همان بعد فضای هیلبرت است را بدست آورید و آن را به صورت ${d_q}^n$ نشان دهید. این فضای هیلبرت اصطلاحا فضای گداخت [۳۸] خوانده می شود و d_1 نیز بعد کوانتومی [۳۹] نامیده می شود.

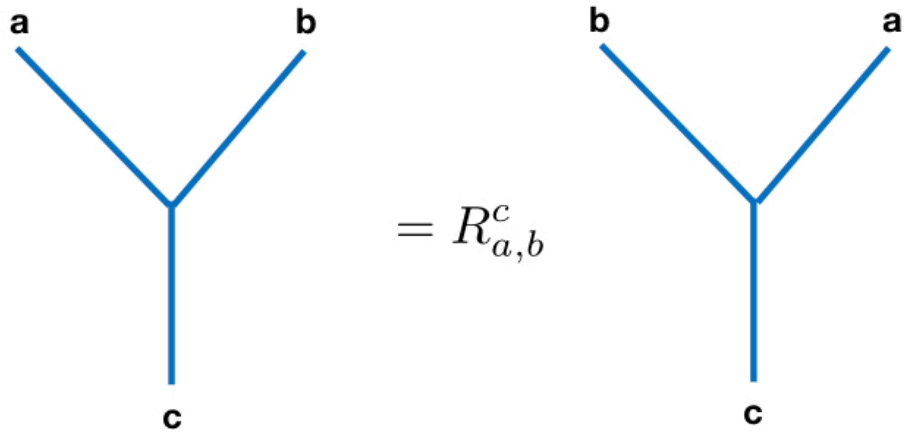
با قبول این فرض ها آنگاه خواهیم داشت:

$$|(1,1)_1, 1\rangle_0 = |1, (1,1)_1\rangle_0, \tag{۶۳}$$

و

$$|(11)_0, 1\rangle_1 \quad = \quad F_{00}|1, (1,1)_0\rangle_1 + F_{01}|1, (1,1)_1\rangle_1,$$

[۳۸] Fusion Space
[۳۹] Quantum Dimension



شکل ۲۲: ماتریس R.

$$|(11)_1, 1\rangle_1 \quad = \quad F_{10}|1,(1,1)_0\rangle_1 + F_{11}|1,(1,1)_1\rangle_1. \tag{۶۴}$$

این روابط در شکل ( ) نشان داده شده اند. تعمیم این روابط به انیون های کلی با بارهای دلخواه به شکل زیر در می آید که اگر چه شامل ماتریس هایی با تعداد اندیس های زیاد است ولی معنای ساده ای دارد و خواننده می تواند همواره به مثال های بالا نگاه کند تا معنای آنها را دریابد:

$$|(a,b)_m, c\rangle_d = \sum_n (F^d_{abc})_{mn} |a,(b,c)_n\rangle_d. \tag{۶۵}$$

این رابطه نیز در شکل ( ) نشان داده شده است.

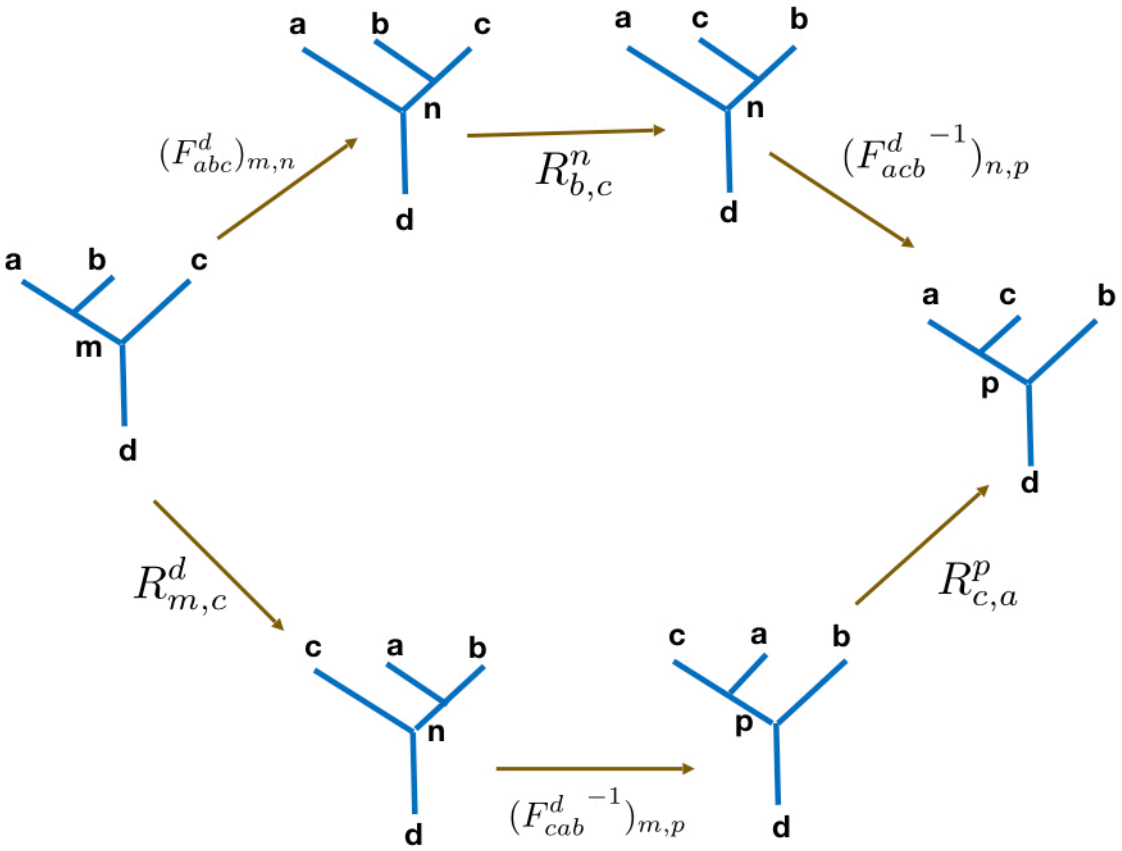
به عنوان مثال نمی گوید که آیا بار کل دو انیون اول برابر با 0 است یا 1 ؟ پس بنابراین توصیف کامل تری از حالت این سه ذره می تواند به صورت زیر باشد:

$$|(1,1)_a, 1\rangle, \qquad a = 0, \qquad or \qquad 1. \tag{۶۶}$$

یعنی این سه انیون می توانند در دو

$$(F^n_{abc})_{mp}(F^e_{apd})_{nq}(F^q_{bcd})_{ps} = (F^e_{mcd})_{nq}(F^e_{abq})_{ms} \tag{۶۷}$$

$$(F^d_{abc})_{mn} R^n_{bc} F^d_{acb})^{-1}{}_{np} = R^d_{mn} F^d_{cab})^{1}{}_{mp} R^p_{ca} \tag{۶۸}$$



شکل ۲۳: رابطه شش ضلعی .

برای مدل فیبوناچی طبیعتا می بایست تمام ماتریس های ۱۶ گانه F^0_{000} تا F^1_{111} را حساب کرد. بسیاری از این ماتریس ها یک بعدی اند و تنها ماتریس دو بعدی ماتریس F^1_{111} است.

چگونه می توان این ماتریس ها را حساب کرد؟ آیا هیچ قیدی روی این ماتریس ها وجود دارد؟ اگر تقاضا کنیم که این حالت های وابسته به توصیف های مختلف به نحو شرکت پذیری (یعنی ساده ای) به هم مرتبط باشند، آنگاه قیود محکمی روی ماتریس های F پدیدار خواهند شد که فرم ماتریس های F را بشدت محدود می کند. برای درک این نکته حالتی مثل حالت زیر را که در آن اندیس ها یا بارهای داخلی را برای سادگی ننوشته ایم در نظر بگیرید:

$$|((a,\ b),\ c),\ d\rangle. \qquad (۶۹)$$

می دانیم که این نوع حالت ها را می توانیم به صورت ترکیبی خطی به حالت ها یی از نوع

$$|a,\ (b,\ (c,\ d))\rangle \tag{۷۰}$$

مرتبط کنیم. ولی این ارتباط را به دو صورت می توانیم انجام دهیم که در شکل های (۲۰) و (۲۱) نشان داده شده اند. حاصل کار می بایست مستقل از شیوه دلبخواهی باشد که ما برای این جابجایی به کار می بریم. این استقلال منجر به رابطه ای بین ماتریس های F می شود که آن را ا تحاد پنج ضعلی یا Pentagon Identity می نامند. نکته اساسی این است که یک بار که این شرط برقرار باشد دیگر نیازی نیست که شرکت پذیری را برای تعداد بیشتری از انیون ها ثابت کنیم و شرکت پذیری برای هر تعدادی نیز برقرار خواهد بود. خواننده دقیق می بایست تا کنون متوجه شده باشد که این اتحاد پنج ضعلی منحصر به انیون ها نیست و اتحادی است در یک محدوده وسیع تر از ریاضیات یعنی هر جایی که عملی شرکت پذیر تعریف شده باشد. به این محدوده وسیع تر ممکن است دوباره برگردیم.

یکی از اعمال مهم دیگر که روی انیون ها انجام می دهیم جابجا کردن آنها ست. در فضای دو بعدی این جابجا کردن با جایگشت فرق می کند زیرا از نظر فیزیکی دو بار جابجا کردن مثل هیچ بار جابجا کردن نیست. کافی است به جهان خط این دو ذره وقتی که جابجا می شوند دقت کنیم و ببینیم که این جهان خط ها به دور هم می پیچند. عوض کردن جای دو ذره در حالت کلی می تواند باعث ایجاد یک فاز شود. این فاز الزاما برابر با ± 1 نیست. بنابراین می نویسیم:

$$|a,b\rangle_c = R^c_{ab}|b,a\rangle_c. \tag{۷۱}$$

این رابطه بیان می کند که وقتی دو انیون را که بار هر کدام به ترتیب a و b و بار کل آن ها برابر با c است باهم جابجا می کنیم فاز توپولوژیکی که در حالت ضرب می شود برابر است با R^c_{ab}.

وقتی که حالت ها تنها با بار انیون ها مشخص نمی شوند و اعداد کوانتومی دیگری نیز برای مشخص کردن حالت ها لازم است رابطه جابجایی به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$|a,b;\mu\rangle_c = (R^c_{ab})_{\mu\nu}|b,a;\nu\rangle_c, \tag{۷۲}$$

که در آن R^c_{ab} یک ماتریس است. در این درس ما این حالت ها را بررسی نمی کنیم. همانطور که شرکت پذیری روی ماتریس های گداخت یک قید اعمال می کند، روی ماتریس های R نیز یک قید اعمال می کند. برای فهم این موضوع حالت زیر را در نظر بگیرید: $|(a,b)_m,c\rangle_d$. می خواهیم جای ذره ab را با ذره c عوض کنیم. برای این کار دو راه در پیش رو داریم. طبیعی است که نتیجه نهایی بستگی به راهی که ما انتخاب

می کنیم نداشته باشد. اما این دو راه کدامند. این دو راه را به صورت سمبلیک بدون توجه به اندیس ها در زیر می نویسیم:

$$|(a,b),c\rangle = F|a,(b,c)\rangle = FR|a,(c,b)\rangle = FRF^{-1}|(a,c),b\rangle. \tag{۷۳}$$

دقت کنید که در این رابطه شکل دقیق اندیس ها نوشته نشده. روش دوم برای این کار به صورت زیر است:

$$|(a,b),c\rangle = R|c,(a,b)\rangle = RF^{-1} \longrightarrow |(c,a),b\rangle = RF^{-1}R|(a,c),b\rangle. \tag{۷۴}$$

به طور دقیق تر این رابطه می بایست به شکل زیر نوشته می شود:

$$(F^d_{abc})_{mn}R^n_{bc}(F^d_{acb})_{np} = R^d_{mc}(F^d_{cab})_{mp}R^d_{pb}). \tag{۷۵}$$

■ تمرین: برای مدل فیبوناچی همه عناصر ماتریس گداخت و ماتریس های R را پیدا کنید. پاسخ : تنها ماتریس های غیربدیهی این ها هستند.

$$F \equiv= F^1_{111} = \begin{pmatrix} \phi & \sqrt{\phi} \\ \sqrt{\phi} & -\phi \end{pmatrix} \tag{۷۶}$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{۷۷}$$

$$R = \begin{pmatrix} R^0_{11} & \\ & R^1_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{4\pi}{5}} & \\ & -e^{i\frac{2\pi}{5}} \end{pmatrix}. \tag{۷۸}$$

حال به مرحله ای رسیده ایم که می توانیم یک گیت یک کیوبیتی را به صورت توپولوژیک بسازیم. نخست باید بگوییم که کیوبیت ما چیست؟ و سپس نحوه ایجاد گیت را بیان کنیم. کیوبیت را به عنوان دو حالت زیر از سه انیون فیبوناچی در نظر می گیریم:

$$|\overline{0}\rangle := |(1,1)_0,1\rangle_1, \qquad |\overline{1}\rangle := |(1,1)_1,1\rangle_1. \tag{۷۹}$$

شکل () دو حالت این کیوبیت را نشان می دهد. حال اگر دو آنیون اول و دوم را جابجا کنیم مطابق با شکل ماتریس R این حالت ها هر کدام در یک فاز بخصوص ضرب می شوند. بنابراین جابجایی آنیون های اول و دوم گیت زیر را ایجاد می کند:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \tag{۸۰}$$

که در آن $\alpha := e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

وضعیت جالب وقتی به وجود می آید که آنیون های دوم و سوم را جابجا کنیم. در این صورت خواننده می بایست از یکی از شاخه های دیاگرام شش ضلعی استفاده کند و ماتریس σ_2 را بدست آورد.

■ تمرین: از یکی از شاخه های دیاگرام شش ضلعی استفاده کنید و ماتریس σ_2 را بدست آورید. راهنمایی: به عنوان مثال نشان دهید که :

$$(\sigma_2)_{0p} = (F)_{0m} R^m_{11} ((F)^{-1})_{mp} \tag{۸۱}$$

که در آن منظور از ماتریس F همان ماتریس F^1_{111} است. درستی جواب خود را می توانید به این شیوه تحقیق کنید که ماتریس های بدست آمده می بایست دررابطه

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \tag{۸۲}$$

صدق کنند. این کار را می توانید با متمتیکا انجام دهید.

به این ترتیب روی یک کیوبیت که از سه انیون تشکیل شده می توانیم دو عمل مقدماتی انجام دهیم. اگر از چپ به راست انیون اول و دوم را جابجا کنیم عملگر σ_1 و اگر انیون دوم و سوم را جابجا کنیم عملگر σ_2 را روی کیوبیت اعمال کرده ایم. نگاه دقیق تری به این دو عملگر می اندازیم. عملگر اول برابر است با:

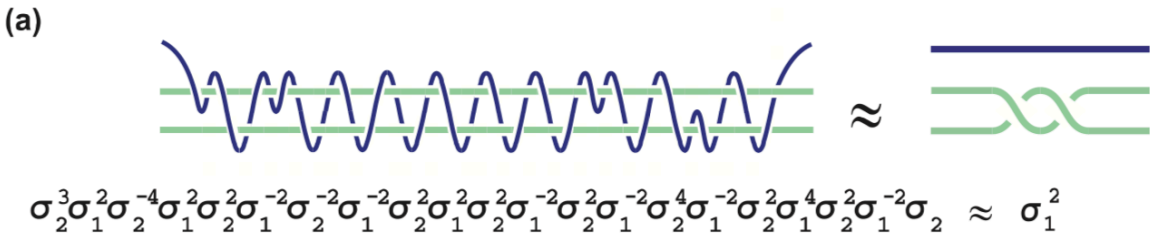
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} e^{\frac{4\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2\pi}{5}} \end{pmatrix} = e^{\frac{11\pi i}{10}} \begin{pmatrix} e^{\frac{-3\pi i}{10}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{3\pi}{10}} \end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{10}\sigma_z} = R_z(\frac{3\pi}{5}). \tag{۸۳}$$

به این ترتیب با جابجا گردن دو انیون اول و دوم می توانیم دوران هایی حول محور z به اندازه مضارب $\frac{3\pi}{5}$ روی کیوبیت منطقی خود اعمال کنیم.

■ تمرین: مجموعه کامل دوران هایی را که می توانیم با جابجا کردن دو آنیون اول و دوم اعمال کنیم بدست آورید. آیا این مجموعه متناهی است؟

با جابجا کردن انیون های دوم و سوم می توانیم یک دوران دیگر را نیز تولید کنیم. این دوران را با $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ نشان می دهیم.

■ تمرین: مشخص کنید که این دوران حول چه محوری و به اندازه چه زاویه ای است. این کار را می توانید با متمتیکا انجام دهید. زاویه و محور دوران را مشخص کنید. خواهید دید که محور این دوران با محور های سه گانه x, y, z موازی نیست.



شکل ۲۴: این شکل از مرجع [۱] برداشته شده است. در این مقاله نشان داده شده است که تنها با جابجایی یکی از انیون ها و ثابت نگاه داشتن دو انیون دیگر می توان همه گیت ها ی تک کیوبیتی را اعمال کرد.

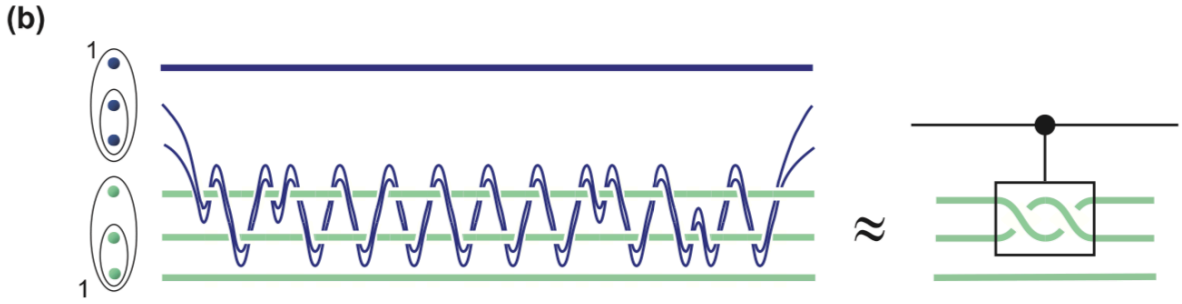
با ترکیب های متوالی و دلبخواه دو دوران مثل $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ و $R_z(\frac{3\pi}{5})$ می توانید هر نوع گیتی را روی کیوبیت منطقی توپولوژیک اعمال کنید. هرگاه دو دسته سه تایی از این انیون های فیبوناچی داشته باشیم، می توانیم با جابجا کردن به روش مناسب، یک گیت کنترلی را نیز اعمال کرد. برای مطالعه بیشتر می توانید به مقاله [۱] و مراجع آن نگاه کنید:

علاوه بر نتایج دیگر، در این مقاله یک نتیجه مهم نیز گزارش شده است و آن اینکه برای اعمال گیت های فوق تنها لازم است یکی از انیون های فیبوناچی را کنترل کرده و حرکت دهیم و انیون های دیگر را می توانیم ثابت نگاه داریم. شکل های زیر که گویای این نتایج اند از همین مقاله گرفته شده اند.

[1] Braid Topologies for Quantum Computation

N. E. Bonesteel, Layla Hormozi, Georgios Zikos, Steven H. Simon,

PhysRevLett.95.140503, arXiv:quant-ph/0505065



شکل ۲۵: این شکل از مرجع [۱] برداشته شده است. در این مقاله نشان داده شده است که چگونه با جابجایی تنها یک انیون می توان یک گیت درهم تننده را نیز اعمال کرد . به همراه گیت های تک کیوبیتی دلخواه این مجموعه یک مجموعه از گیت ها ی یونیورسال کوانتومی را می سازند.