مقدمات مکانیک کوانتومی

دراین فصل می خواهیم برای کسانی که هیچ نوع آشنایی قبلی با مکانیک کوانتومی ندارند، اصول و ساختمان این نظریه را توضیح دهیم. دانشجویان فیزیک می توانند قسمت های اولیه این فصل را رها کرده و تنها قسمت پایانی آن یعنی بحث مربوط به حالت های مخلوط را مطالعه کنند. روش ما دراین فصل نه یک روش تاریخی است و نه یک روش اصل موضوعی . سعی می کنیم که مجموعه مشاهدات مربوط به دنیای میکروسکوپی را خلاصه کنیم و بگوییم که چگونه برای توضیح این مجموعه نتایج اصول اساسی و ساختمان مکانیک کوانتومی ساخته می شود.

۱ مقدمه ای درباره مشاهده و اندازه گیری

نخستین کاری که برای شناختن یک شی انجام می دهیم آن است که سعی می کنیم خاصیت های معینی از آن را مثل رنگ، اندازه، جرم، سرعت یا تکانه ، بارالکتریکی و نظایرآن را اندازه بگیریم. بعضی از این خصوصیات بطور مستقیم و بعضی از آنها با واسطه های تجربی و نظری مشخص می شوند. به عنوان مثال برای ا ندازه گیری برا ی اندازه گیری سرعت باریکه ای از ذرات باردار می توانیم آنهارا از دومیدان مغناطیسی و الکتریکی عمود برهمخ بگذرانیم. دراین دستگاه اندازه گیری اندازه میدان الکتریکی و مغناطیسی را چنان تغییر می دهیم که مسیر باریکه ذرات هیچ انحرافی حاصل نکند. دراین صورت بااستفاده از قوانین الکترو مغناطیس و یا بااعتماد به این قوانین که درمجموعه وسیعی از پدیده هاو مشاهدات متقابل به صحت آنها مطمئن شده ایم سرعت ذرات را به صورت رابطه $v = \frac{E}{B}$ « استنتاج » می کنیم. طبیعی است که دراینجا اندازه گیری سرعت کاملاً به صورت غیر مستقیم و بااتکاء بریک چارچوب نظری بدست آمده است. درهمین آزمایش می توانیم سرعت ذرات دیگری که انحراف های دیگر ی پیدا می کنند نیز پیدا کنیم . بنابراین ، این دستگاه، یک نوع اندازه گیری است که ذرات را برحسب سرعت آنها از یکدیگر «جدا» می کند.

می توانیم با خاموش کردن میدان مغناطیسی تنها به انحراف ذرات تحت میدان الکتریکی توجه کنیم. دراین صورت بازهم با اتکا به صحت قوانین الکترومغناطیس می توانیم نسبت بارالکتریکی به جرم ذرات یعنی $\frac{q}{m}$ را تعیین کنیم یا به عبارت دیگر این دستگاه اندازه گیری ذرات را برحسب نسبت جرم به بارآنها ازیکدیگر جدا می کند.

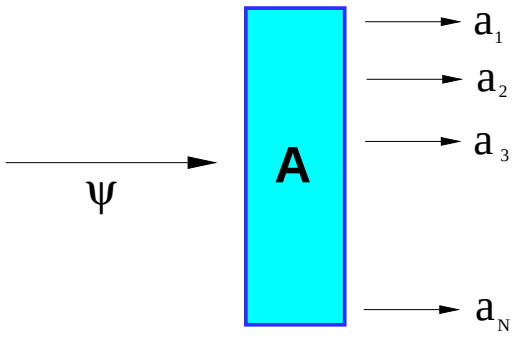
یک مثال دیگر: دریک اتاقک ابر ذرات شتابدار درمسیر حرکت خود بخار اشباع شده را تبدیل به مایع می کنند و رشته ای از قطرات مایع درمسیر خود به جا می گذراند. از آنجا که دراین اتاقک ابر یک میدان مغناطیسی نیز وجود دارد می توان بااستفاده از جهت انحنای مسیر ذرات علامت بارآنها را تشخیص داد. بنابراین ،این دستگاه ذرات را برحسب علامت بارالکتریکی آنها از هم «جدا» می کند. می توان با استفاده از ضخامت مسیر ایجاد شده که نشانگر قطرات آب ایجادشده درمسیر حرکت ذره است و هم چنین شعاع انحنای مسیر حرکت هم انرژی و هم بارالکتریکی ذرات را نیز تعیین کرد.

به یک مثال دیگر توجه کنیم. هرگاه یک توری پراش درمسیر یک پرتو نور قرارگیرد روی پرده ای که درپشت توری پراش قراردارد رشته ای خطوط بسیار باریک بایک نظم مشخص پدیدار خواهد شد. بنابر « نظریه موجی نور» این خطوط ناشی از تداخل سازنده امواج نور با طول موج های معین درراستاهای معین است. بنابراین و با اتکاء برنظریه موجی نور یک توری پراش به عنوان دستگاهی عمل می کند که پرتوهای نور را برحسب طول موج آنها از یکدیگر « جدا » می کند.
به عنوان آخرین مثال دستگاه اشترن — گرلاخ را درنظر می گیریم که بخش عمده آن را یک میدان مغناطیسی متغیر درراستای معین تشکیل می دهد. ذراتی که به این دستگاه می تابند تحت تاثیر میدان مغناطیسی متغیر قرارمی گیرند و منحرف می شوند. با تکیه بررابطه $F = -\nabla(\mu \cdot B) = -\mu \cdot \nabla(B)$ ، و بااندازه گیری مقدار انحراف می توانیم به ذرات یک ممان مغناطیسی μ نسبت دهیم.
از مجموعه مثال های بالا دو نتیجه می توان گرفت. اول آنکه هرنوع اندازه گیری درواقع یک فرآیند است که طی آن یک دستگاه ماکروسکوپی ذرات را برحسب یک خاصیت معین از یکدیگر جدا می کند. ثانیاً هرنوع اندازه گیری و تفسیر نتایج آن متکی بریک نظریه است که بدو ن آن نظریه نمی توان به نتایج آن اندازه گیری معنا و مفهومی نسبت داد.
این امر درمورد اندازه گیری های بسیار معمولی نظیر وزن کردن یک جسم با ترازوی دو کفه ای نیز صدق می کند. دراین جا نظریه ای که به کاربرده شده است متناسب بودن جرم با وزن ازیک طرف و تعادل نیرو و گشتاور از طرف دیگر بوده است. جداکردن نیز دراینجا با دست و توسط انسان انجام می شود. اما درمورد اخیر این دوخصلت بدلیل دم دستی بودنشان توجه چندانی جلب نمی کنند. دراین مورد آنچه را که به واسطه نظریه اندازه می گیریم بقدری به ادراک حسی و بی واسطه ما از سنگینی و سبکی نزدیک است که ما اغلب وجود واسطه نظری را دراین گونه اندازه گیری ها نادیده می گیریم. اماهرچه که اشیای مورد مطالعه ما خرد تر می شوند وازدسترس تجربه مستقیم ما دورتر می شوند واسطه های نظری هم از نظر تعداد و هم از نظر پیچیدگی بیشتر می شوند تا جاییکه دیگر بزحمت می توان گفت آیا آنچه که ما اندازه می گیریم واقعاً همان چیزی است که اگر با حواس خود مستقیماً می توانستیم اندازه بگیریم، بدست می آوردیم. دربعضی از موارد می توانیم با زحمت نسبتاً کمی از صحت روش های اندازه گیری خود مطمئن شویم. به عنوان مثال می توانیم جرم یک اتم را با همان روش های غیر مستقیمی که دربالا به آن اشاره کردیم اندازه بگیریم. حالا می توانیم تعداد خیلی خیلی زیادی از این اتم ها (مثلاًیک مول از آنها) را که به طریقی (بازهم با واسطه) از تعداد آنها مطمئن شده ایم دریک کفه ترازو قراردهیم و با روش های حسی معمولی وزن آن رااندازه بگیریم تا ببینیم که با تجربیات حسی ما واقعا مطابق است یا نه که خوشبختانه جواب مثبت است.
آیا دردنیای میکروسکو پی اندازه گیری خصلت های ویژه ای علاوه برآنچه که دربالا گفته شد دارد؟ دراین بخش می خواهیم به این سوال پاسخ دهیم.
دردنیای ماکروسکوپی بعضی از خواص اشیاء هرنوع مقداری می توانند اتحاذ کنند مثل جرم، اندازه و تکانه و نظایرآن . بعضی از خواص دیگر تنها مقادیر گسسته ای را به خود می گیرند مثل تعداد ، یا امتداد قطبش نور. بنابراین گسسته بودن یا پیوسته بودن به خودی خود یک خاصیت منحصر بفرد میکروسکوپی نیست. آنچه که ویژگی منحصر به فرد دنیای میکروسکوپی است چیست ؟

۲ معنای حالت

دردنیای ماکروسکوپی می توانیم خصوصیات گوناگونی از یک شی را یکی پس از دیگری تعیین کنیم واگر این اندازه گیری ها را پشت سرهم وبدون فاصله زمانی انجام دهیم مطمئن هستیم که شی مورد مطالعه خواص تعیین وتثبیت شده قبلی خود را حفظ می کند. وقتی که از یک جعبه سیب نخست سیب های درشت و سپس سیب های سبز را جدا می کنیم مطمئن هستیم که درپایان سیب های درشت سبز دردست داریم. بنابراین رنگ و اندازه خصلت هایی هستند که به طورتوامان می توانند تعیین شوند. ممکن است بگوییم که ویژگی منحصر به فرد دنیای میکروسکو پی آن است که خصلت هایی وجود دارند که نمی توان آنها را به صورت توامان تعیین کرد. اما این نتیجه گیری کمی عجولانه است؟ زیرا دردنیای ماکروسکوپی نیز چنین خصلت هایی وجود دارند. برای مثال به قطبش نورتوجه می کنیم. نخست به «تعریفی» که از قطبش نور می کنیم باید توجه کنیم. کاری که می کنیم آن است که یک پولاروید درمسیر باریکه نور قرار می دهیم و و ضمن تغییر دادن جهت پلاروید شدت نورخروجی را ثبت می کنیم . جهتی که درآن بیشترین شدت نور خروجی را ثبت می کنیم جهت قطبش نورنام دارد. بنابراین با یک پلاروید x (یعنی پلارویدی که جهت آن منطبق با محور x است) ما می توانیم نورهای قطبیده درراستای x را جدا کنیم (درست مثل جدا کردن سیب های سبز).. دقت کنید که این اندازه گیری محتاج دانستن هیچ چیزی راجع به ساختمان پلاروید و یا یک مدل نظری راجع به نورنیست. حال می توان نورخروجی از پلاروید اول را از یک پلاروید دیگر مثلاً درراستای $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{z})$ عبورداد. همان منطق اندازه گیری و جداسازی که دربا لا از آن استفاده کردیم به ما خواهد گفت که نور خارج شده از این دستگاه قطبش یا خاصیت $\mathbf{n}$ دارد . بنابراین به نظر می رسد که نورخروجی از دو پلاروید پشت سرهم هم خاصیت $\mathbf{x}$ دارد وهم خاصیت $\mathbf{n}$ دارد. ولی درعمل می بینیم که چنین نیست. زیرا هرگاه باریکه نور نهایی را از یک پلاروید x عبور دهیم شدت نور ماکزیمم مقدار خود را نخواهد داشت. دراینجا ما با دو خاصیت ناسازگارسروکار داریم و نمی توانیم هردو آنها را توامان تعیین کنیم. می توانیم باریکه نوری که از پلاروید x خارج می شود را نوری درحالت $|x\rangle$ بنامیم و باریکه نوری که از پلاروید n خارج می شود را نوری درحالت $|n\rangle$ بنامیم ولی نمی توانیم نوری درحالت $|x, n\rangle$ تهیه یا تصور کنیم. این مثال به مانشان می دهد که خاصیت های ناسازگار نیز یک ویژگی منحصر به فرد دنیای میکروسکوپی و کوانتومی نیست. جستجوی خود را برای پیداکردن وجه‌تمایز اساسی دنیای میکروسکوپی و ماکروسکوپی ادامه می دهیم. اماقبل از آن بهتراست آنچه را که تاکنون فهمیده ایم مرتب و منظم کنیم. یک دستگاه اندازه گیری A ذرات را برحسب خاصیتی از آنها که توسط این دستگاه و معمولا و لی نه الزاماً با توجه به یک مدل نظری تعریف می شود از یکدیگر جدا می کند. برای سادگی می توان فرض کرد که این دستگاه خروجی هایی دارد که برچسب خورده اند. به عنوان مثال ذراتی که از خروجی i بیرون می آیند اندازه آنها از خاصیت A برابر با مقدار حقیقی a_i است. می توانیم بگوییم که چنین ذراتی اکنون درحالت $|a_i\rangle$ قراردارند، شکل (۱).

برای تعیین کامل حالت ذرات می بایست تمام خاصیت های سازگاربامِ آنهارا تعیین کرد ولی برای سادگی روابط بعدی ما فرض می کنیم که ذرات فقط با یک خاصیت معین می شوند. بنابراین می توانیم تصور کنیم که ذرات دریکی از حالت های $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots |a_N\rangle\}$ (اگر بلافاصله از دستگاه اندازه گیری A بیرون آمده اند) قراردارند و یا دریکی از حالت های $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \cdots |b_N\rangle\}$ قراردارند (اگربلافاصله از دستگاه اندازه گیری B بیرون آمده اند) و نظایر آن. آزمایشگر می تواند درآزمایشگاه ذرات درحالت $|b\rangle$ را از دستگاه A عبوردهد. دراین جا اولین وجه افتراق دنیای کوانتومی خود راآشکارمی سازد وآن این است که با وجودی که تمامی شرایط آزمایش یکسان است و تمام دقت های لازم اعمال شده است نتیجه این اندازه گیری



شکل ۱: دستگاه اندازه گیری A ذرات را به حالت های مختلف $|a_1\rangle$ تا $|a_N\rangle$ تجزیه می کند. حالت $|\psi\rangle$ یک حالت ناشناخته است.

هربار یک چیز است. یعنی ذره درحالت $|b\rangle$ کاملاًبَه طور تصادفی خود را درحالت های $|a_1\rangle$ تا $|a_N\rangle$ نشان خواهد داد. ممکن است که این تصادفی بودن نتیجه متغیرهای بازهم خردتری باشد که دسترسی به آنها و یکسان کردن آنها هنگام تکرار آزمایش فعلاًبَرای ما مقدورنباشد. این فرض را فعلاًنمی توان آزمود ودرغیاب آن تنهاکاری که می توان کرد آن است که‌درآزمایشگاه احتمالات گذار را که تعینی و تکرارپذیر هستند تعیین کرد. بنابراین مرحله دوم آن است که می توان جداولی از همه احتمالات گذار برای خصوصیات مختلف تعیین کرد . ازاین به بعد احتمال گذار حالت $|a\rangle$ به $|b\rangle$ را با

$$P(b,a) \tag{1}$$

نشان می دهیم. واضح است که شرط زیر برآورده می شود:

$$\sum_{j=1}^{N} P(b_j,a) = 1. \tag{2}$$

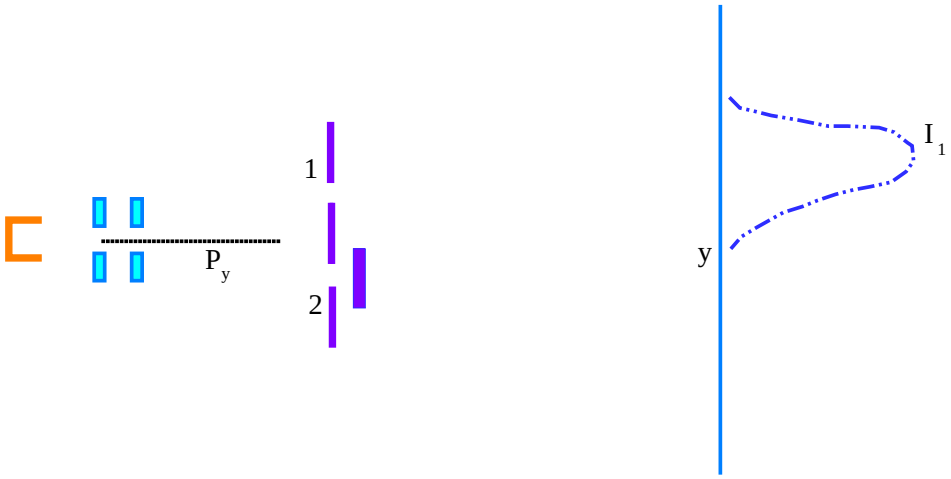
این هم یک نتیجه آزمایشی است که بین احتمالات تقارن وجود دارد یعنی اینکه :

$$P(a_i,b_j) = P(b_j,a_i). \tag{3}$$

هم چنین رابطه زیر ناشی از آزمایش است:

$$P(a_j,a_i) = \delta_{ij} \tag{4}$$

این رابطه به این معناست که تعریف حالت به شکلی که دربالا انجام شد معنا دارد یعنی ذره ای که دریک آزمایش A درحالت a_i جدا شده است اگر دوباره تحت همان آزمایش قرارگیرد (البته بدون اینکه زمان برآن بگذرد) بازهم همان خصلت a_i را از خود نشان خواهد داد .



شکل ۲: آزمایش دو شکاف : تنها شکاف بالایی باز است و طرح I_1 روی پرده مشاهد ه می شود.

۳ تداخل

حال به مهمتری خصلت دنیای میکروسکوپی می رسیم. درشکل (۲)

درسمت چپ یک فیلامان حرارتی وجود دارد که بخاری از ذرات باریونیزه را از خود متصاعد می کند. میدان های الکتریکی به همراه مجموعه ای از یکسوکننده ها ذرات درحالت $|P_y\rangle$ را جدا می کنند. شکاف پایینی مسدود شده است. هرذره که از شکاف بالایی بگذرد درحالت $|1\rangle$ قرار می گیرد و سپس روی پرده درحالت $|y\rangle$ که نقطه نشستن آن روی پرده را (توسط یک آشکارساز) نشان می دهد ثبت می شود. هرگاه این آزمایش را برای مدت طولانی انجام دهیم دراثر نشستن ذرات روی یک پرده مثلاً یک پرده فلوئورسانس یک طرح I_1 بوجود خواهد آمد. $I_1(y)$ درواقع متناسب با تعداد ذرات نشسته شده روی نقطه y است. درحقیقت داریم :

$$I_1(y) = P(y,1)P(1,P_y). \tag{5}$$

دراین رابطه $P(1,P_y)$ احتمال آن است که ذره‌ای که درحالت $|P_y\rangle$ است ، از درون شکاف 1 بگذرد و درحالت $|1\rangle$ قرارگیرد. هم چنین $P(y,1)$ احتمال آن است که ذره ای درحالت $|1\rangle$ است واز شکاف 1 گذشته است درنقطه y بنشیند یعنی درحالت $|y\rangle$ قراربگیرد. ضرب احتمال ها نیز یک ضرورت منطقی است که ما از رفتار اشیاء دردنیای پیرامون خود فراگرفته ایم. شکل (۳) همان آزمایش را نشان می دهد

بااین تفاوت که این بار شکاف بالایی بسته است. به همان معنای رابطه پیشین این بار داریم :

$$I_2(y) \equiv P(y,2,P_y) = P(y,2)P(2,P_y). \tag{6}$$

شکل (۴) همان آزمایش را نشان می دهد بااین تفاوت که این بارهردوشکاف بازهستند.

انتظارداریم که این بارابطه زیر برقرارباشد:

$$I_{1+2}(y) = P(y,1)P(1,P_y) + P(y,2)P(2,P_y) = I_1(y) + I_2(y). \tag{7}$$

شکل ۳: آزمایش دو شکاف : تنها شکاف پایینی باز است و طرح I_2 روی پرده مشاهد ه می شود.

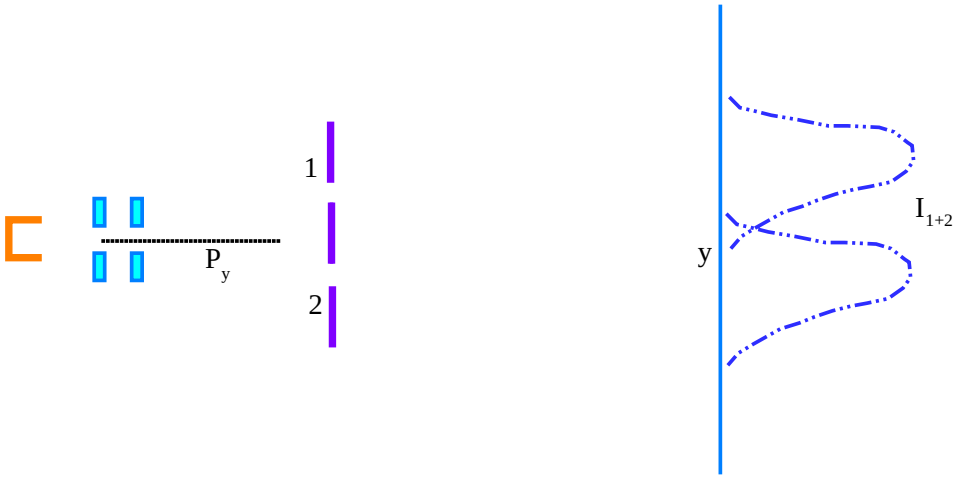
اما آنچه که درآزمایش می بینیم آن است که ذرات مطابق با طرح I_{12} که یک طرح تداخلی است روی پرده می نشینند. دراین طرح چند ین نکته جالب و شگفت انگیز وجود دارد:

الف : درجاهایی از پرده بازکردن هردوشکاف باهم باعث شده است که تعداد حتی کمتری ذرات نسبت به وقتی که تنها یک شکاف بازبود به آن نقطه برسد. درجاهایی نیز مثل وسط پرده تعداد ذرات دوبرابر آن مجموع تعداد ذراتی است که درصورت بازبودن هرکدام از شکاف ها به تنهایی به پرده می رسید.

ب : برعکس درجاهای دیگری از ذرات بازکردن هردوشکاف باعث شده است که تعداد ذراتی که به آن نقطه می رسد بیشتر از مجموع ذراتی شود که درصورتی که هردوشکاف بازمی بود به آن نقطه می رسید.

ج : شکل این طرح تداخلی با رقیق کردن چشمه ذرات بطوریکه درهر آن فقط و فقط یکی از ذرات از شکاف ها عبور کند، تغییر نمی کند. بنابراین نمی توان گفت که ذرات هنگام بازبودن هردوشکاف بایکدیگر طوری برهم کنش می کنند که اثرات بالا دیده شود.

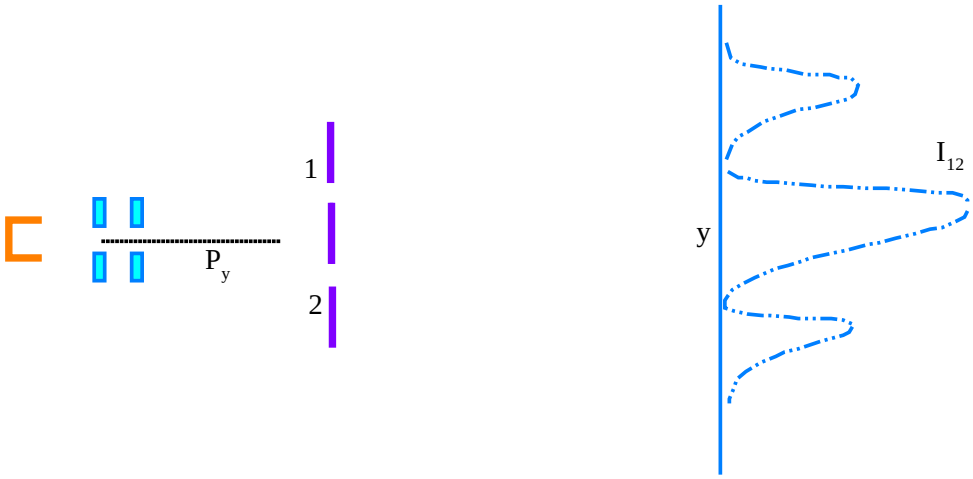
د : هرکدام از ذرات را روی پرده نهایی به طور کامل توسط آشکارساز ثبت می کنیم و آشکارساز ما ماهیت ذره ای آن را بخوبی تایید می کند. بنابراین نمی توان گفت که ذره دراین آزمایش مثل یک موجود پیوستار عمل کرده است و بخشی از آن از یک شکاف و بخشی دیگر از یک شکاف دیگر عبورکرده است.



شکل ۴: آزمایش دو شکاف : هردو شکاف باز هستند . طرح روی پرده یعنی طرح I_{1+2} طرح ای است که انتظار داریم ببینیم.

هـ: البته می توان درگزاره (د) شک کرد. ممکن است که ذره درحین عبور از دو شکاف به صورت یک پیوستار(چیزی شبیه یک ابر) رفتار می کند وسپس درانتها موقع نشستن روی پرده تمامی این ابر دوباره به صورت یک ذره کوچک متمرکز می شود. برای پی بردن به راز رفتار ذره می توان درست پشت شکاف ها آشکارسازهایی گذاشت تا بفهمیم که ذره درست موقع عبور از شکاف ها چگونه رفتار می کند. اگر چنین کاری بکنیم متوجه می شویم که درآنجا هم ذره به صورت یک ابر یا ژله یا چیزی شبیه به آن رفتار نمی کند بلکه به تمامی (باتمام جرم و بار و دیگر خصوصیات خود) درآشکار ساز ثبت می شود. ولی دراین جا متوجه یک اتفاق مهم می شویم و آن این است که تلاش ما برای پی بردن به راز رفتار ذره باعث شده است که طرح تداخلی I_{12} از بین رفته است و جای خود را به طرح معمولی I_{1+2} داده است. ظاهراً ذره از تلاشی که برای پی بردن به رفتار اسرارآمیزش انجام داده ایم عصبانی شده است و دیگر آن کار شگفت انگیز را نمی کند.

و : حال که ذره تن به مشاهده ظریف خود را نمی دهد ما می توانیم به منطق ساده روی آوریم . بالاخره هر ذره ای که روی پرده می نشیند یا از شکاف ۱ آمده است یا از شکاف ۲. تعداد ذراتی که روی پرده نشسته اند برابرند با تعداد ذراتی که از شکاف ۱ آمده اند + تعداد ذراتی که از شکاف ۲ آمده اند. اما تعداد ذراتی که از شکاف ۱ عبور کرده وروی پرده نشسته اند برابراست با I_1 و تعداد ذراتی که از شکاف ۲ عبور کرده وروی پرده نشسته اند برابر است با I_2. پس حتی بدون مشاهده نزدیکی شکاف ها می توانیم حکم کنیم که طرحی که سرنجام روی پرده ثبت می شود می بایست برابر با $I_1 + I_2$ باشد. درصورتی که اتم ها درست مثل اشیایی که ما با آنها آشنا هستیم مثل توپ فوتبال عمل کرده باشند استدلال بالا صحیح است. بالاخره هراتم یا از شکاف بالایی عبور کرده و به پرده رسیده است و یا از شکاف پایینی و می بایست طرح مشاهده شده همان طرح بدون تداخل یعنی طرح I_{1+2} باشد. درحال حاضر ما نمی توانیم بفهمیم که الکترون ها یا ذرات میکروسکوپی دیگر چرا چنین رفتاری از خود بروز می دهند. مسئله حتی از این هم بدتراست. مانه تنها نمی توانیم چرایی رفتار الکترون ها را توضیح دهیم حتی چگونگی



شکل ۵: آزمایش دو شکاف : هردو شکاف باز هستند . طرح روی پرده یعنی طرح I_{12} طرح ای است که واقعاً روی پرده می بینیم.

رفتار آن را بهتر از این نمی توانیم توضیح دهیم. درمقابل ایراداتی از این نوع که « بالاخره الکترون یا از این شکاف عبور می کند و یا از آن شکاف و دراین صورت نمی بایست طرح تداخلی داشته باشیم » تنها می توانیم به این بسنده کنیم که بگوییم وقتی سوال عبور الکترون از شکاف ها را به صورت عملی و تجربی می خواهیم بپرسیم می بینیم که طرح تداخلی واقعا از بین می رود و ما به تناقضی برنمی خوریم!. بنابراین می گوییم که وقتی الکترون را مشاهده نمی کنیم نمی توانیم مسیری برای آن تعریف و حتی معنا کنیم و هرگاه هم که بخواهیم از نظر تجربی مسیر آن را تعیین کنیم اگرچه عمل ما قرین موفقیت است اما الکترون دیگر آن کارشگفت انگیزی را که درغیاب مشاهده انجام می داد انجام نمی دهد و کاملاً سربه زیر می شود. دستگاه شگفت انگیز مکانیک کوانتومی از این نقطه آغاز می شود که ما کاری به اینکه درحین یک فرایند دقیقاً چه اتفاقی می افتد و این که این اتفاقات با شهود ما سازگارند یا نه نداریم بلکه تنها به آغاز و انجام یک فرایند کارداریم و تنها مجموعه احتمالات گذار از حالات اولیه به حالات نهایی را درآزمایشگاه تعیین می کنیم و سعی می کنیم با یک دستگاه نظری خود سازگار این احتمالات وقوع را به یکدیگر پیوند داده و درنتیجه بعضی از آنهارا از روی بعضی دیگر پیش بینی کنیم. پیش بینی دقیق احتمالات وقوع فرآیند ها نشان دهنده موفقیت دستگاه نظری مکانیک کوانتومی است و این موفقیت اگر با این ملاک سنجیده شود درطول یکصد سال گذشته بسیار عظیم بوده است. اما ما همچنان حق داریم که از خود بپرسیم آیا مکانیک کوانتومی ما را قادر می کند که دنیای میکروسکوپی را بفهمیم یا خیر. این سوال بازی است که دانشجویان علاقمند می توانند سالها خود به جستجوی پاسخ آن بپردازند. اما ما درادامه این درس به همان توصیف رایج درچارچوب مکانیک کوانتومی خواهیم پرداخت.

بنابراین نخستین کار ما آن است که ببینیم آیا نظمی در طرح تداخلی شکل (۵) وجود دارد یا نه. به نظرمی رسد که طرح I_{12} یک طرح ناشی از تداخل امواج باشد. بنابراین برای پیداکردن نظمی که درجستجوی آن هستیم به تجربیات خود درمورد امواج بازمی گردیم . اگر I_1 را مربع یک عدد مختلط ϕ_1 موسوم به دامنه احتمال و I_2 را نیز مربع یک عدد مختلط ϕ_2 بگیریم چه بسا که I_{12} مربع $\phi_1 + \phi_2$ باشد چنان که درمورد امواج چنین است: یعنی

$$I_1 =: |\phi_1|^2, \qquad I_2 =: |\phi_2|^2, \qquad I_{12} =: |\phi_{12}|^2 \tag{8}$$

که درآن

$$\phi_{12} = \phi_1 + \phi_2. \tag{9}$$

تا اینجا این فرض می تواند رفتارعجیب ذرات را که دربند الف به آن اشاره کردیم توضیح دهد زیرا:

$$I_{12} = I_1 + I_2 + \phi_1^* \phi^2 + \phi_2^* \phi_1, \tag{10}$$

وجملات سوم و چهارم که به جملات تداخلی موسوم هستند می توانند هم چنان که درمورد امواج معمولی دلیل کاهش و یا افزایش تعداد ذرات را درجاهای مختلف پرده توضیح دهند.

امااعداد مختلط ϕ_1 یا ϕ_2 چه هستند؟ به یاد می آوریم که مطابق با آنچه که دربالا گفتیم قرار است ما سوالی درباره چگونگی طی کردن یک فرایند نپرسیم و تنها به ابتدا وانتهای فرآیند بپردازیم . بنابراین ϕ_{12} دامنه احتمالی است که یک حالت اولیه یعنی $|P_y\rangle$ را به یک حالت نهایی یعنی $|y\rangle$ رب‌ط می دهد. بنابراین فعلاً می نویسیم

$$\phi_{12} = \langle y|P_y\rangle \tag{11}$$

بدون اینکه از نماد گذاری فوق هیچ چیزی نظیر ضرب داخلی بردارها و یاچیزی شبیه به آن را درذهن داشته باشیم. اما ϕ_1 دامنه احتمال دو فرایند متوالی است که درآن ذره از حالت $|P_y\rangle$ به حالت $|1\rangle$ و سپس از حالت $|1\rangle$ به حالت $|y\rangle$ تحول پیداکرده است. باتوجه به اینکه درفرآیند های متوالی خود احتمالات نیز درهم ضرب می شوند می توانیم فرض کنیم که دامنه های احتمال نیز درهم ضرب می شوند. درنتیجه قرارمی دهیم :

$$\phi_1 = \langle y|1\rangle\langle 1|P_y\rangle \qquad \phi_2 = \langle y|2\rangle\langle 2|P_y\rangle \tag{12}$$

که بازهم تاکید می کنیم که درحال حاضر این تنها یک نمادگذاری است که شبیه ضرب داخلی است ولی هیچ نوع بستگی منطقی با آن ندارد. با کنارقرار دادن همه این استدلال ها و فرض ها می توانیم نهایتاً رابطه زیر را برای توصیف طرح آزمایش دوشکاف بنویسیم :

$$\langle y|P_y\rangle = \langle y|1\rangle\langle 1|P_y\rangle + \langle y|2\rangle\langle 2|P_y\rangle \tag{13}$$

این رابطه رابطه اصلی ای است که بسیاری از ساختمان نظری مکانیک کوانتومی براساس آن بیان می شود. می توان شکل کلی آن را به صورت زیر نوشت :

$$c_k|a_i\rangle = \sum_j \langle c_k|b_j\rangle\langle b_j|a_i\rangle. \tag{14}$$

آنچه که درآزمایشگاه قابل حصول است آن است که می توانیم با انجام آزمایش های گوناگون روی یک حالت احتمال گذار آن حالت را به حالت های دیگر اندازه گیری کنیم. به عنوان مثال روی حالت $|\psi\rangle$ می توانیم با انجام آزمایش A احتمالات گذار به حالت های $|a_i\rangle$ را تعیین کنیم. می توانیم این دامنه ها را دریک آرایه ستونی مطابق شکل زیر مرتب کنیم و اسم این آرایه را $|\psi\rangle_A$ بگذاریم که شاخص A برای یادآوری آن است که اعداد داخل این آرایه از اندازه گیری های A بدست آمده اند:

$$|\psi\rangle_A = \begin{pmatrix} \langle a_1|\psi\rangle \\ \langle a_2|\psi\rangle \\ . \\ \langle a_N|\psi\rangle \end{pmatrix} \tag{15}$$

باانجام مشاهدات دیگر آزمایشگر می تواند به همین ترتیب مجموعه ای از آرایه ها مثل $|\psi\rangle_B$ ، $|\psi\rangle_C$ ونظایرآن را تعیین کند. حال سوال این است که این آرایه ها چه ربطی به هم دارند؟ نخست باید به این اشاره کنیم که مشاهد ات تجربی نشان می دهد که دامنه گذار یک حالت $|a_i\rangle$ به حالت متفاوت دیگر برابر با صفراست (البته اگر این اندازه گیری را بلافاصله انجام دهیم که فرض ما هم همین است.) بنابراین خواهیم داشت:

$$|a_1\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_2\rangle_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad |a_N\rangle_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

یادآوری این نکته لازم است که آزمایشگر می بایست با مجموعه ای از آزمایشهای به هم مرتبط دامنه هارا پیدا کند زیرا دانستن مربع یک عدد مختلط تنها اندازه آن عدد را بدست خواهد داد و نه فاز آن را. نمونه ای از این آزمایشها را درادامه خواهیم دید.

آیا آزمایشگر می بایست بصورت منفعل تنها به جمع آوری این آرایه ها بپردازد ویااینکه می تواند خود قدرت پیشگویی پیدا کند. این سوالی است که در بخش آینده به آن پاسخ خواهیم گفت.

۴ بردارهای حالت

اگر دراین لحظه به رابطه (14) توجه کنیم و آن را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\langle b_j|\psi\rangle = \sum_i \langle b_j|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle, \tag{17}$$

متوجه شباهت تام و تمام رابطه درایه ها درآرایه های $|\psi\rangle_A$ و $|\psi\rangle_B$ با مولفه های یک بردار می شویم. درست مثل این است که آرایه N بعدی $|\psi\rangle_A$ مولفه های یک بردار را دریک پایه که آن را برای سادگی پایه A می نامیم و آرایه N بعدی $|\psi\rangle_B$ مولفه های همان بردار را درپایه B نشان می دهند. درنتیجه می توانیم شاخص $A, B, \cdots$ را از $|\psi\rangle$ حذف کنیم و بگوییم که حالت یک ذره توسط یک بردار $|\psi\rangle$ تعیین می شود و اندازه گیری آن ذره توسط آزمایش A درحقیقت دامنه های گذار آن حالت به حالت

های مختلف $\langle a_i|\psi\rangle$ را به عنوان مولفه های مختلف آن بردار دریک پایه بدست می دهد. دراین جا می بایست به یک نکته مهم اشاره کنیم و آن این است که هرگاه تمام دامنه های $\langle a_i|\psi\rangle$ را دریک فاز ضرب کنیم هیچ تغییری دراحتمالات $P(a_i,\psi)$ بوجود نخواهد آمد بنابراین با آزمایش A نمی توان به این پی برد که آیا فازی دردامنه ها ضرب شده است یا نه. حال نکته مهم این است که بنابر رابطه (14) همان فاز درتمام دامنه های دیگر یعنی $\langle b_i|\psi\rangle$ نیز ضرب خواهد شد و بنابراین با هیچ آزمایش فیزیکی نمی توان ضرب شدن فاز را تشخیص داد. درنتیجه این آرایه ها را همواره می توان دریک فازکلی ضرب کرد بدون اینکه اثری به بارآورد.
هم چنین باقبول رابطه (17) به عنوان رابطه ای بین مولفه های یک بردار درپایه های مختلف می توانیم از این به بعد به دامنه احتمال $\langle b|a\rangle$ به عنوان ضرب داخلی دو بردار یا همان براکت $\langle b|a\rangle$ نگاه کنیم. ضمناً از تقارن $P(a,b)=P(b,a)$ بدست می آوریم که:

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*. \tag{18}$$

علاوه برآن بدلیل رابطه (4) فرض می کنیم که درهرپایه ای

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{19}$$

البته این رابطه ساده ترین فرضی است که می توان درمورد رابطه دو دامنه احتمال درنظرگرفت.

۵ عملگرها

تا کنون یادگرفته ایم که وقتی ذره درحالت $|\psi\rangle$ است اندازه گیری خصلت A مقادیر a_i را با احتمال $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$ تولید می کند. حال می توانیم مقدار متوسطی را که پس از چند باراندازه گیری بدست می آید حساب کنیم. این مقدار را که با $\langle A\rangle_\psi$ نشان می دهیم برابر است با:

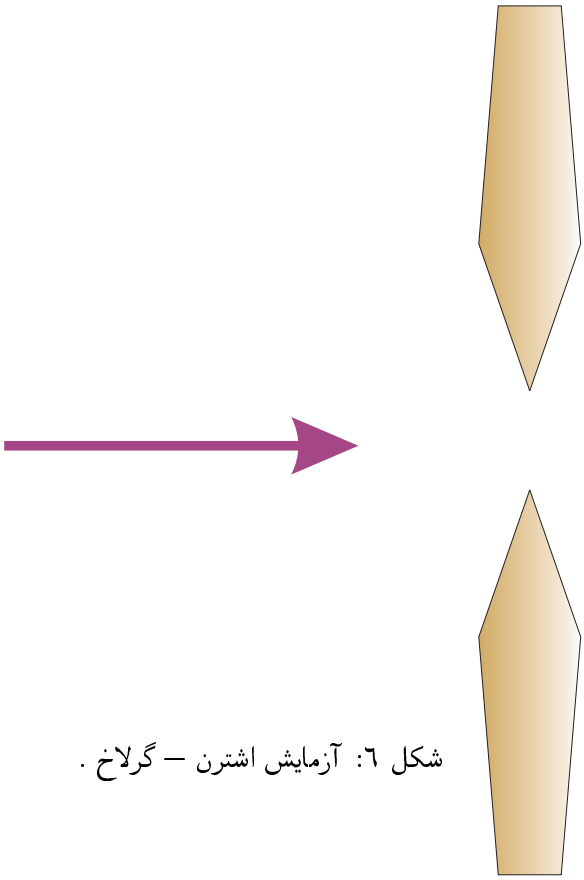
$$\langle A\rangle_\psi = \sum_{i=1}^{N} a_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{N} a_i \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle$$
$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle, \tag{20}$$

که درآن $\hat{A}$ عملگری است که به این اندازه گیری نسبت داده شده است و به شکل زیراست:

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} a_i |a_i\rangle\langle a_i|. \tag{21}$$

مسلم است که این عملگردرپایه خودش یعنی پایه A قطری است و شکل زیر را دارد:

$$\hat{A}_A = \begin{pmatrix} a_1 & . & . & . \\ . & a_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & a_N \end{pmatrix} \tag{22}$$



شکل ٦: آزمایش اشترن – گرلاخ .

٦ مثال : اسپین

شکل (٦) بطورشماتیک آزمایشی را نشان می دهد که درآن اتم های یک عنصر مثل نقره از درون یک میدان مغناطیسی که گرادیان آن درراستای z است عبور داده می شوند. این نوع آزمایش را آزمایش اشترن گرلاخ درراستای z می خوانیم و به طور اختصار این اندازه گیری یا آزمایش را با S_z نمایش می دهیم. این آزمایش ذرات را دو دسته می کند. می گوییم اتم هایی که به جهت بالا منحرف می شوند درحالت $|z+\rangle$ و اتم هایی که به طرف پایین منحرف می شوند درحالت $|z-\rangle$ قرارگرفته اند. حال درآزمایشگاه می توان احتمالات زیررا بدست آورد:

$$P(z+,x+) = P(z-,x+) = \frac{1}{2}, \tag{23}$$

که از آن نتیجه می شود

$$|\langle z+|x+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\langle z+|x+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{24}$$

و درنتیجه

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\beta}|z-\rangle. \tag{25}$$

با بازتعریف حالت های $|z+\rangle$ و $|z-\rangle$ می توانیم فازهای فوق را از بین ببریم . بنابراین رابطه فوق به صورت زیر درمی آید:

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|z-\rangle. \tag{26}$$

به طریق مشابه از روابط تجربی

$$P(z+,x-) = P(z-,x-) = \frac{1}{2}, \tag{27}$$

می توان نتیجه گرفت

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|z-\rangle. \tag{28}$$

فازهای فوق را دیگر نمی توان بابازتعریف حالت های $|z\pm\rangle$ از بین برد. تنها یکی از آنها را می توان با بازتعریف $|x-\rangle$ از بین برد و درنتیجه خواهیم داشت:

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|z-\rangle. \tag{29}$$

دراینجااز رابطه تجربی $P(x+,x-) = 0$ ویا $\langle x+|x-\rangle = 0$ استفاده می کنیم و بدست می آوریم :

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|z-\rangle. \tag{30}$$

به همین ترتیب با استفاده از روابط تجربی مشابه برای آزمایش اشترن گرلاخ درراستای y می توان نوشت :

$$\begin{aligned} |y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma}|z-\rangle, \\ |y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|z-\rangle. \end{aligned} \tag{31}$$

حال از رابطه $\langle y+|y-\rangle = 0$ بدست می آوریم $e^{i\delta} = -e^{i\gamma}$. آخرین چیزی که باید تعیین کنیم مقدار γ است. برای این کار از یک رابطه تجربی باقیمانده استفاده می کنیم و آن اینکه

$$P(x+,y+) = \frac{1}{2}. \tag{32}$$

این رابطه الزام می کند که

$$|\langle x+|y+\rangle|^2 = \frac{1}{4}|(1+e^{i\gamma})|^2 = \frac{1}{2} \tag{33}$$

که نتیجه می دهد $\gamma = \pm i$. بدون هیچ ارجحیت خاصی جواب i را انتخاب می کنیم. بنابراین خواهیم داشت :

$$
\begin{aligned}
|y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i|z-\rangle, \\
|y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}i|z-\rangle.
\end{aligned} \tag{34}
$$

هرگاه از نمایش صریح بردارها درپایه S_z استفاده کنیم روابط فوق به شکل زیر درمی آیند:

$$
\begin{aligned}
|z+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |z-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|x+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
|y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad |y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

با الهام از فیزیک کلاسیک و نحوه برهم کنش یک میدان مغناطیسی نایکنواخت با ممان های مغناطیسی و هم چنین رابطه ممان مغناطیسی با گشتاورزاویه ای به همان شکلی که درمقدمه این فصل گفته شد، درآزمایش اشترن گرلاخ S_z ذراتی را که درحالت $|z+\rangle$ قراردارند چنین تفسیر می کنیم که مولفه گشتاورزاویه ای آنهادرامتداد z برابر با $\frac{\hbar}{2}$ است و ذراتی را که درحالت $|z-\rangle$ قراردارند چنین تفسیر می کنیم که مولفه گشتاورزاویه ای آنهادرامتداد z برابر با $\frac{-\hbar}{2}$ است که درآن $\hbar$ ثابت پلانک و برابر با $\frac{h}{2\pi}$و است و h 6.627×10^{-34} ژول ثانیه است. درنتیجه می توانیم باتوجه به رابطه (21) عملگرهای S_x، S_y و S_z را به شکل زیر بنویسیم :

$$
\begin{aligned}
S_x &= \frac{\hbar}{2}(|x+\rangle\langle x+| - |x-\rangle\langle x-|) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \\
S_y &= \frac{\hbar}{2}(|y+\rangle\langle y+| - |y-\rangle\langle y-|) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \\
S_z &= \frac{\hbar}{2}(|z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-|) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{36}
$$

بایک محاسبه ساده می توان نشان داد که روابط زیر بین این عملگرها برقرارهستند:

$$
[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \qquad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \qquad [S_z, S_x] = i\hbar S_y. \tag{37}
$$

این رابطه بسیاربه رابطه ای است که بین مولفه های گشتاورزاویه ای درمکانیک کلاسیک وجود دارد بااین تفاوت که درمکانیک کلاسیک کمیت های S_x, S_y, S_z عملگرنیستند و رابطه بین آنها نیز رابطه کروشه پوآسون است و نه رابطه جابجایی.

۷ دینامیک کوانتومی

دینامیک کوانتومی را می توان با اتکا براصول و یافرض های بسیاربسیط وساده ای بدست آورد. فرض کنید که بردارحالت یک دستگاه کوانتومی درلحظه t را با $|\psi(t)\rangle$ نمایش دهیم. دراثر هرنوع برهم کنش این بردار حالت درلحظه t' عبارت خواهد بود از

$|\psi(t')\rangle$. فرض اساسی دینامیک کوانتومی آن است که این بردار حالت جدید را می توان با یک عملگر خطی از بردار حالت قدیمی بدست آورد یعنی :

$$|\psi(t')\rangle = U(t',t)|\psi(t)\rangle. \tag{38}$$

ازآنجا که هردو بردار می بایست نرمالیزه باشند این شرط حکم می کند که عملگر U می بایست یک عملگر یکانی باشد. بنابراین

$$U(t',t)U(t',t)^\dagger = I. \tag{39}$$

هم چنین با استفاده از دو تحول پی درپی از زمان t تا t' و سپس از زمان t' تا "t بدست می آوریم:

$$U(t",t')U(t',t) = U(t",t). \tag{40}$$

علاوه براین واضح است که :

$$U(t,t) = I \tag{41}$$

هرگاه تحول فقط به اندازه زمان بی نهایت کوچکی مثل ϵ انجام شود، می توان $U(t+\epsilon,t)$ را برحسب ϵ بسط داد ونوشت :

$$U(t+\epsilon,t) = I - i\epsilon H(t) + O(\epsilon^2) \approx e^{-i\epsilon H(t)} \tag{42}$$

یکانی بودن U الزام می کند که H هرمیتی باشد. حال بااستفاده از رابطه (40) می توان عملگر تحول را برای هر بازه زمانی نوشت. خواهیم داشت:

$$U(t',t) \approx e^{-i\epsilon H(t+(N-1)\epsilon)} e^{-i\epsilon H(t+(N-2)\epsilon)} \ \cdots \ e^{-i\epsilon H(t)} \tag{43}$$

ویا درحد $\epsilon \longrightarrow 0$ و $N \longrightarrow \infty$ با شرط $N\epsilon = (t'-t)$:

$$U(t',t) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \prod_{i=0}^{N-1} e^{-i\epsilon H(t+i\epsilon)} := T(e^{-i\int_t^{t'} H(\tau)d\tau}) \tag{44}$$

که درآن آخرین عبارت سمت راست عبارت نمایی مرتب شده نام دارد و به صورت حد طرف چپ تعریف می شود. مهمترین حالت خاص حالتی است که درآن H تابع زمان نباشد. دراین صورت همه عبارت های نمایی باهم جابجامی شوند و می توان نماهای آنها را باهم جمع کرد و نوشت:

$$U(t',t) = e^{-i(t'-t)H}. \tag{45}$$

۸ حالت های خالص و حالت های مخلوط

تا کنون فرض کرده ایم که حالت دستگاه کوانتومی با یک بردار $|\psi\rangle$ مشخص می شود. بنابراصول مکانیک کوانتومی این امر مستلزم آن است که اولاً ما از آخرین اندازه گیری ای که روی دستگاه کوانتومی انجام شده است وطی آن حالت دستگاه مشخص شده است مطلع هستیم وثانیاً در طی این دستگاه کوانتومی از محیط خود منزوی باقیمانده است. برای دستگاه های واقعی هیچ کدام از این دوفرض صحیح نیستند. باریکه ای از اتم ها که از بخار ناشی از یک فیلامان گرم شده بوجود آمده اند وسپس بوسیله همسو کننده ها دریک راستا جمع شده اند یک دستگاه رایج کوانتومی است و نمی توانیم بگوییم که اتم های آن دریک حالت خاص هستند. هم چنین است باریکه ای از فوتون ها که از هیچ پولارویدی رد نشده اند و ما راجع به قطبش آنها چیزی نمی دانیم. درچنین شرایطی تنها می توانیم بگوییم که کسر p_i از اتم ها درحالت $|\psi_i\rangle$ هستند. معمولا این کسر ها را یا از یک اصول دیگر مثل اصول مکانیک کوانتومی بدست می آوریم. درغیاب هر گونه اطلاعات که یک حالت رابردیگر حالت ها ترجیح دهد می توانیم بااطمینان قید کنیم که توزیع اتم ها روی حالات مختلف کاملاًیکنواخت است مثل وقتی که باقطبش یک باریکه از فوتون ها سروکارداریم و می گوییم که ۵۰ درصد از آنها جهت قطبش x و ۵۰ درصد آنها جهت قطبش y دارند. می خواهیم ببینیم که درچنین حالت هایی دستگاه کوانتومی را چگونه می بایست توصیف کنیم. فرض کنید که خاصیتی مثل خاصیت M را می خواهیم اندازه گیری کنیم. برای یک دستگاه مخلوط مطابق فوق متوسط خاصیت M به شکل زیر محاسبه خواهد شد:

$$\langle M\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|M|\psi_i\rangle = tr(\rho M) \tag{46}$$

که درآن ρ عبارت است از:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{47}$$

و ماتریس چگالی دستگاه کوانتومی خوانده می شود. بنابراین حالت چنین دستگاهی بجای آنکه با یک بردار حالت مشخص شود با یک ماتریس چگالی مشخص می شود. این ماتریس چگالی دربردارنده تمام اطلاعاتی است که ما می توانیم از دستگاه کوانتومی کسب کنیم. نخست بهتر است که خواص ماتریس چگالی را بررسی کنیم. خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که ماتریس چگالی خاصیت های زیررادارد:

$$\begin{aligned} tr(\rho) &= 1 \\ \rho^\dagger &= \rho \\ \rho &\geq 0. \end{aligned} \tag{48}$$

می توان ماتریس چگالی ρ را درپایه ویژه بردارهای خودش نوشت . دراین صورت خواهیم داشت:

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|, \tag{49}$$

که درآن N بعد فضای هیلبرت است. دقت کنید که شکل (47) یک تجزیه طیفی نیست و به همین دلیل بردارهای $|\psi_i\rangle$ یک مجموعه متعامد تشکیل نمی دهند و تعداد آنها نیز هیچ ربطی به بعد ماتریس ρ ندارد، اما رابطه 49 تجزیه طیفی ماتریس

چگالی را بیان می کند و بردارهای $|\alpha_i\rangle$ ویژه بردارهای ماتریس چگالی هستند و تعداد آنها نیز برابر با بعد ماتریس چگالی یا بعد فضای هیلبرت است.
ازتجزیه طیفی یک خاصیت دیگر را نیز می توان بدست آورد و آن اینکه :

$$tr(\rho^2) \equiv \sum_i \lambda_i^2 \leq 1, \tag{50}$$

که درآن از مثبت بودن λ_i ها و اینکه مجموع همه آنها برابر با یک است استفاده کرده ایم. هم چنین از تجزیه طیفی قضیه زیر را بدست می آوریم که اثبات آن ساده است :

قضیه : حالت ρ یک حالت خالص است اگر وفقط اگر $tr(\rho^2) = 1$.

تاکنون توانستیم متوسط خاصیت M را وقتی که دستگاه درحالت ρ قرار دارد بدست آوریم. حال می پرسیم دراندازه گیری خاصیت M احتمال اینکه مقدار m بدست بیاید چقدراست و بعد از اندازه گیری، دستگاه درچه حالتی است. برای آنکه احتمال اندازه گیری m را بدست آوریم به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$P(m) = \sum_i p_i \langle\psi_i|P_m|\psi_i\rangle = tr(P_m\rho) \tag{51}$$

که درآن ازاین موضوع استفاده کرده ایم که احتمال بدست آوردن مقدار m برای وقتی که دستگاه کوانتومی درحالت خالص $|\psi\rangle$ است برابراست با $\langle\psi|P_m|\psi\rangle$. بالاخره می خواهیم بفهمیم که بعد از اندازه گیری خاصیت M ویافتن مقدار m دستگاه کوانتومی درچه حالتی است. پاسخ این امر ساده است. دستگاه کوانتومی با ماتریس چگالی P_m توصیف می شود. البته این درحالتی است که مقدار m را بدست آورده باشیم وبا اندازه گیری خود این دسته از ذرات را (به عنوان دستگاه های کوانتومی) از دیگر ذرات جدا کرده باشیم. هرگاه چنین جداسازی ای انجام نداده باشیم حالت دستگاه بعد از اندازه گیری به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_1 := \sum_m q_m P_m \tag{52}$$

که درآن q_m احتمال این است که مقدار m بدست آمده باشد. با توجه به رابطه (51) که این احتمال را تعیین می کند می توان این رابطه را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_1 = \sum_m tr(P_m\rho)P_m. \tag{53}$$

از یک زاویه دیگر نیز می توان به ماتریس چگالی نگاه کرد . فرض کنید که دوذره اسپین یک دوم داریم و این دوذره درحالتی مثل حالت زیر قراردارند:

$$|\psi\rangle_{AB} = a|+,+\rangle + b|+,-\rangle + c|-,+\rangle + d|-,-\rangle \tag{54}$$

می پرسیم که حالت ذره A چیست. دراینجا درست است که هردو ذره دریک حالت مشخص قراردارند ولی نمی توان به ذره A بردارحالت مشخصی نسبت داد. دراین مورد و درتمامی موارد مشابه که دستگاه کوانتومی مورد نظر ما جزئی از یک دستگاه

بزرگتر است حالت آن با یک ماتریس چگالی مشخص می شود. برای اینکه این موضوع را به طور کلی مورد بحث قراردهیم فرض کنید که دو دستگاه A و B دریک حالت کوانتومی مشخص $|\psi\rangle_{AB}$ قراردارند که برحسب بردارهای پایه فضای هیلبرت سیستم A و سیستم B بسط آن به شکل زیراست:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} |i,\mu\rangle. \tag{55}$$

حال هر عملگر M_A روی دستگاه A چیزی نیست جز عملگری به شکل $M \otimes I$. درنتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \langle M\rangle_A &= \langle\psi|M\otimes I|\psi\rangle = tr_{AB}((M\otimes I)|\psi\rangle\langle\psi|) = tr_A\left(tr_B((M\otimes I)|\psi\rangle\langle\psi|)\right) \\ &= tr_A(M\rho_A) \end{aligned} \tag{56}$$

که درآن

$$\rho_A = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \tag{57}$$

ماتریس چگالی دستگاه A نامیده می شود. به این ترتیب هر عنصر ماتریسی روی دستگاه A را می توان به صورت $tr(M\rho)$ نوشت که درآن ρ از رابطه بالا تعیین می شود و جانشین حالت کوانتومی دستگاه A است. به طریق مشابه ماتریس چگالی دستگاه B با رابطه $\rho_B = tr_A(|\psi\rangle\langle\psi|)$ داده می شود. می توان فرم صریح تر ماتریس چگالی را نیز بدست آورد. با توجه به رابطه (55) خواهیم داشت:

$$\rho_A = \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle\langle j| \tag{58}$$

که درآن

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_{\mu} \psi_{i\mu}\psi^*_{j\mu}, \tag{59}$$

و

$$\rho_B) = \sum_{\mu;\nu} \rho_{\mu\nu} |\mu\rangle\langle n|, \tag{60}$$

که درآن

$$(\rho_B)_{\mu\nu} = \sum_{i} \psi_{i\mu}\psi^*_{i\nu}. \tag{61}$$

با توجه به این عبارت ها براحتی می توان خواص سه گانه ماتریس چگالی را تحقیق کرد یعنی این که ρ یک ماتریس هرمیتی مثبت با رد برابر با واحد است.

۱.۸ تجزیه اشمیت

فرض کنیدکه دستگاه مرکب $A+B$ دریک حالت خالص $|\psi\rangle_{AB}$ قراردارد. دراین صورت همواره می توان این حالت را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \lambda_i |i, \hat{i}\rangle \tag{62}$$

که درآن λ_i ها اعداد مثبت و $\{|i\rangle\}$ و $\{|\hat{i}\rangle\}$ به ترتیب مجموعه بردارهای متعامد یکه درفضای هیلبرت دستگاه های A و B هستند. این تجزیه را تجزیه اشمیت می خوانند. برای پیداکردن این تجزیه به ترتیب زیرعمل می کنیم. برای فضای هیلبرت H_A پایه‌ای انتخاب می کنیم که درآن ماتریس ρ_A قطری باشد. این پایه را با $\{|i\rangle\}$ نشان می دهیم. درنتیجه بردار حالت به شکل زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i |i\rangle|\phi_i\rangle \tag{63}$$

که درآن بردارهای $\{\phi_i\}$ بردارهایی نه الزاماً متعامد ویا یکه درفضای هیلبرت H_B هستند. حال دقت می کنیم که بنابرتعریف :

$$\rho_A = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) = \sum_i |i\rangle\langle j|\langle\phi_i|\phi_j|. \tag{64}$$

اماچون ماتریس چگالی ρ_A درپایه انتخاب شده قطری است پس بدست می آوریم که :

$$\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \lambda_i^2 \delta_{ij} \tag{65}$$

با تعریف $|\phi_i\rangle = \lambda_i|\hat{i}\rangle$ به تجزیه اشمیت یعنی رابطه (62) می رسیم.

۲.۸ خالص سازی

فرض کنید که دستگاه A توسط یک ماتریس چگالی ρ توصیف می شود. آیا می توان دستگاهی مثل B و حالتی از دستگاه مرکب $A+B$ مثل $|\psi\rangle_{AB}$ چنان یافت که :

$$\rho = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) \tag{66}$$

باشد. اگر چنین حالتی پیدا کنیم حالت $|\psi\rangle_{AB}$ را حالت خالص شده ماتریس چگالی ρ می خوانیم. برای اینکه خالص شده یک ماتریس چگالی ρ_A باویژه مقدارهای p_i را پیدا کنیم به ترتیب زیر عمل می کنیم. دستگاه B را دستگاهی می گیریم که

بعد فضای هیلبرت آن یعنی H_B حداقل با بعد H_A یکی باشد. هرگاه بردارهای $\{|i\rangle\}$ یک پایه متعامد برای دستگاه A باشند قرارمی دهیم:

$$\psi_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}|i,\hat{i}\rangle \tag{67}$$

که درآن $\{|\hat{i}\rangle\}$ یک مجموعه بردار متعامدیکه برای فضای H_B هستند. دراین صورت $|\psi\rangle_{AB}$ یک خالص سازی ρ_A است.

۳.۸ کره بلوخ

کلی ترین حالت یک ذره اسپین یک دوم و یا هرذره دیگری که فضای هیلبرت آن دو بعدی است با یک ماتریس چگالی دو دردو داده می شود. این ماتریس را با ρ نشان می دهیم. ازآنجا که ماتریس یک و ماتریس های پاوولی یک پایه برای فضای ماتریس های دو دردو تشکیل می دهند می توان این ماتریس را به شکل زیر نوشت:

$$\rho = \frac{1}{2}(r_0 I + \overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} r_0+z & x-iy \\ x+iy & r_0-z \end{pmatrix} \tag{68}$$

که درآن $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ ،ماتریس های پاوولی هستند و ضریب $1/2$ برای راحتی بیرون کشیده شده است.

حال دقت می کنیم که:

الف : ρ هرمیتی است. بنابراین ضرایب r_0, $\overrightarrow{r}$ حقیقی هستند.

ب : $tr(\rho) = 1$. بنابراین $r_0 = 1$.

ج : $\rho \geq 0$. برای تامین این شرط می بایست ویژه مقدارهای ρ را حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که ویژه مقدارهای ρ عبارتند از:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm r) \tag{69}$$

که درآن r اندازه بردار $\overrightarrow{r}$ است.

بنابراین برای مثبت بودن کافی است که طول بردار $\overrightarrow{r}$ از یک کمتر باشد: یعنی $\overrightarrow{r} \leq 1$. به این ترتیب بین هرماتریس چگالی و یک نقطه از یک کره به شعاع واحد یک تناظر یک به یک برقرار می شود. این کره کره بلوخ نام دارد که درشکل زیر نشان داده شده است. نقاط روی سطح کره بلوخ نقاطی هستند که درآنها $r = 1$ و بنابراین ویژه مقادیر ρ برابر با یک و صفر هستند. درنتیجه این نقاط متناظر با حالت های خالص هستند. درواقع براحتی می توان نشان داد که هرگاه $r = 1$ باشد یعنی $\mathbf{r}$ برابر با یک بردار یکه $\mathbf{n}$ باشد آنگاه

$$\rho \equiv \frac{1}{2}(I + n\cdot\sigma) = |n\rangle\langle n| \tag{70}$$

که درآن $|\mathbf{n}\rangle$ حالت یک ذره با اسپین درجهت بردار یکه $\mathbf{n}$ است. از طرف دیگر مرکز کره یعنی $r = 0$ متناظر با حالت کاملا مخلوط $\rho = \frac{1}{2}I$ است . هرچه از مرکز کره به طرف مرز پیش برویم به درجه خلوص حالت ها اضافه می شود. می دانیم که یک حالت مخلوط را می توان به صورت مخلوطی از حالت های خالص درنظر گرفت. چگونه می توان یک حالت مخلوط برای یک ذره اسپین یک دوم را تجزیه کرد؟ این تجزیه چگونه روی کره بلوخ نشان داده می شود؟ پاسخ این سوال ساده است. فرض کنید که یک حالت مخلوط متناظر با بردار $\mathbf{r}$ روی کره بلوخ داده شده است. می خواهیم این حالت را به صورت مجموع دوحالت خالص تجزیه کنیم. برای این کار از نوک بردار $\mathbf{r}$ وتری از کره را رسم می کنیم که سطح کره را دردو نقطه $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ قطع کند. هرگاه طول دو پاره خط نشان داده شده درشکل را با l_1 و l_2 نشان دهیم آنگاه یک محاسبه ساده نشان می دهد که می توان حالت مخلوط $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma)$ را به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\rho = p_1|n_1\rangle\langle n_1| + p_2|n_2\rangle\langle n_2| \tag{71}$$

که درآن $p_1 = \frac{l_1}{l_1+l_2}$ و $p_2 = \frac{l_2}{l_1+l_2}$. از آنجا که وتر مربوطه را به بی نهایت طریق می توان رسم کرد، پس بی نهایت تجزیه دوتایی برای حالت مخلوط وجود دارد. آیا تجزیه های بیش از دو تایی هم وجود دارد؟ پاسخ این سوال هم مثبت است. فرض کنید که نقاط $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots \mathbf{n}_N$ روی سطح کره داده شده اند. حال ضرایب $p_1, p_2, \cdots p_N, \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ را چنان تعیین می کنیم که شرط زیر تحقق یابد :

$$\sum_{i=1}^{N} p_i n_i = r \tag{72}$$

دراین صورت می توان نوشت :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(I + r\cdot\sigma) = \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{1}{2}(I + n_i\cdot\sigma) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_i |n_i\rangle\langle n_i| \end{aligned} \tag{73}$$

به این ترتیب حالت مخلوط ρ را می توان به بی نهایت طریق به صورت مجموعی از حالت های خالص و یا حتی به صورت انتگرالی از حالت های خالص تجزیه کرد که درحالت اخیر خواهیم نوشت:

$$\rho = \int d\phi \; d\cos\theta \; p(\theta,\phi)|n(\theta,\phi)\rangle\langle n(\theta,\phi)| \tag{74}$$

بااین شرط که $\int d\phi d\cos\theta p(\theta,\phi) = 1$.

۹ تمرین ها:

۱ – تشابه دو حالت کوانتومی ρ و σ به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(\rho,\sigma) = \sqrt{tr(\sigma^{1/2}\rho\sigma^{1/2})}. \tag{75}$$

الف: تشابه دو حالت ِکیوبیتی ِρ و σ را که به ترتیب متناظر با بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ هستند محاسبه کنید.

ب: نشان دهید که اگر $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ و $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$، آنگاه

$$F(\rho,\sigma) = F(\rho_1,\sigma_1)F(\rho_2,\sigma_2). \tag{76}$$

۲ – حالت $\psi = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta\cos\phi|01\rangle + \sin\theta\sin\phi|11\rangle$ بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است. ماتریس چگالی آلیس و باب را بدست آورید. تجزیه اشمیت ِاین حالت را بدست آورید.

۳ – حالت $|\psi\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle$ که درآن $\rho = (1-x)\frac{I}{2} + x|\psi\rangle\langle\psi|$ بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده است. ماتریس چگالی کیوبیت هایی که در دست آلیس و باب هستند را محاسبه کنید.
ویژه مقدارهای این دو ماتریس را حساب کنید. یک خالص سازی از حالت ِρ را بدست آورید.

۴ – نشان دهید که یک حالت ِρ خالص است اگر و فقط اگر $tr(\rho^2) = 1$ باشد.