ضمیمه : مقدمه ای برنظریه گروه

۱ مقدمه

هدف از این مقدمه آن است که با تعاریف و قضایای مقدماتی در باره گروه‌های متناهی و نمایش های آنها و هم چنین با مفهوم تبدیل فوریه روی یک گروه متناهی آشناشویم. خواننده‌ای که درس نظریه گروه را گذرانده باشد تنها کافی است که به بخش مربوط به تبدیل فوریه مراجعه کند. اما خواننده‌ای که با نظریه گروه آشنا نیست می بایست این ضمیمه را از ابتدا مطالعه کند. دراین ضمیمه بسیاری از قضایا را بدون ذکر اثبات آنها آورده‌ایم تا دنبال کردن مطالب برای این دسته از خوانندگان نیز امکان پذیرباشد.

۲ آشنایی با مفاهیم اولیه در نظریه گروه

تعریف: یک گروه عبارت است از یک مجموعه G بهمراه یک عمل دوتایی $* : G \times G \longrightarrow G$ و یک عنصر $e \in G$ به نحوی که خاصیت های زیررا داشته باشند:
الف : شرکت پذیری :

$$\forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c) \tag{1}$$

ب : عضو خنثی

$$\forall a \in G \quad a * e = e * a = a \tag{2}$$

ج : عضو وارون

$$\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \;\mid\; a^{-1} * a = a * a^{-1} = e \tag{3}$$

ازاین به بعد از نوشتن نماد $*$ صرف نظر می کنیم و ضرب دوعنصر مثل a و b را به صورت ab می نویسیم.
تعریف : هرگاه که خاصیت اضافه $ab = ba$ درگروه وجود داشته باشد، گروه آبلی خوانده می شود.
اثبات خواص زیر آسان است:
الف: عضو خنثی گروه یکتاست.
ب : وارون یک عضو گروه یکتاست.
ج : به ازای هر $g \in G$ ، $(g^{-1})^{-1} = g$.
د : به ازای هر $a, b \in G$، $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

۳ چند مثال ساده

مثال یک: مجموعه اعداد صحیح کوچکتراز n باعمل جمع به پیمانه n تشکیل یک گروه می دهد که آن را با Z_n نمایش می دهیم.

تمام گروه های فوق گروه های آبلی هستند.

مثال دو: هرگاه p یک عدد اول باشد، مجموعه $Z_p^* := \{1, 2, 3, \cdots p-1\}$ با ضرب درپیمانه p یک گروه تشکیل می دهد.

مثال سه: هرگاه a یک عدد صحیح باشد ${Z_a}^*$ مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت کوچک تراز a است که نسبت به آن اول باشند. این مجموعه تشکیل یک گروه می دهد. به عنوان مثال می توان گروه $Z_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\}$ را نام برد که جدول ضرب آن به شکل زیراست:

	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

(4)

هرگاه تعداداعضای یگ گروه محدود باشد آن را یگ گروه محدود ($FiniteGroup$) می خوانیم. دراین صورت تعداد اعضای گروه G را با $|G|$ نشان داده وآن را مرتبه گروه می خوانیم.

مثال چهار: یگ گروه غیرآبلی: گروه پاوولی ماتریس های دو بعدی مربعی موسوم به ماتریس های پاوولی را درنظر بگیرید:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

این ماتریس ها دررابطه زیر صدق می کنند:

$$\sigma_k \sigma_l = i\epsilon_{klm}\sigma_m, \tag{6}$$

که درآن ϵ_{klm} تانسورکاملاً پادمتقارن است و $\epsilon_{123} = 1$. با توجه به ا ین رابطه می توان نشان داد که مجموعه زیر یک گروه غیرآبلی با مرتبه 8 تشکیل می دهد.

$$G_0 = \{\pm I, \pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \pm i\sigma_3\}. \tag{7}$$

هم چنین گروه زیر یگ گروه غیرآبلی بامرتبه 16 است.

$$G_1 = \{\pm I, \pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \pm\sigma_3, \pm iI, \pm i\sigma_1, \pm i\sigma_2, \pm i\sigma_3\} \tag{8}$$

مثال پنج: گروه جایگشت یک مجموعه از n شی که آنهارا بابرچسب های $1, 2, \cdots n$ مشخص می کنیم، درنظر می گیریم. یک جایگشت از این مجموعه یک نگاشت یک به یک و پوشا از این مجموعه روی خودش است. مجموعه تمام این جایگشت هارا با S_n نمایش می دهیم. می توان یک جایگشت $\alpha \in S_n$ را به شکل زیر نشان داد:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

اگر $\alpha, \beta \in S_n$ دوجایگشت باشند، ضرب آن دو به صورت زیرتعریف می شود:

$$(\alpha\beta)(k) := \alpha(\beta(k)), \tag{10}$$

که درواقع به این معناست که $\alpha\beta$ همان ترکیب دو نگاشت α و β است. ازآنجا که ترکیب دو نگاشت یک به یک و پوشا خودیک نگاشت یک به یک و پوشاست، پس $\alpha\beta$ نیز یک جایگشت است . درنتیجه S_n تحت این ضرب بسته است. هم چنین عضو واحد دراین مجموعه وجود دارد که همان نگاشت همانی است:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

ازآنجایی که وارون یک نگاشت یک به یک و پوشا خود یک نگاشت یک به یک و پوشاست ، وارون هرعضو $\alpha \in S_n$، نیز عضوی در S_n است که آن را با α^{-1} نشان می دهیم. ساده ترین گروه جایگشت S_2 است که دو عضو دارد و آبلی است. بعد از آن گروه جایگشت S_3 است که ٦ عضو دارد و غیر آبلی است.

$$S_3 = \{e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}. \tag{12}$$

این اعضا عبارتند از:

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

خواننده می تواند براحتی جدول ضرب این گروه راتشکیل دهد.
قبل ازآنکه گروه جایگشت n عضو را مطالعه کنیم بهتر است که مفهوم مولد های یک گروه را مرور کنیم.

۱.۳ مولد ها ی یک گروه و رابطه بین آنها

براحتی می توان تحقیق کرد که همه عناصر گروه S_3 از ضرب دو عنصر α و β بدست می آیند. یعنی

$$S_3 = \{e, \alpha, \beta, \alpha\beta\alpha, \beta\alpha, \alpha\beta\}. \tag{14}$$

دراین صورت می گوییم که α و β مولد های گروه S_3 هستند، یعنی تمام عناصراین گروه از ضرب توان های دلخواه از این دو عضو بدست می آیند یابه اصطلاح تولید می شوند. البته باید دقت کرد که بین این دو عنصر رابطه های زیر برقرارند:

$$\alpha^2 = e, \qquad \beta^2 = e, \qquad \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta, \tag{15}$$

که درنتیجه آن هرنوع حاصلضرب قابل تصور ازتوان های مولد ها چیزی بجزهمان ٦ عضو گروه S_3 تولید نمی کند.

تعریف : دریک گروه G زیر مجموعه ای ازعناصرمثل $S = \{g_1, g_2, \cdots g_n\}$ را مولد های گروه می گوییم هرگاه هر عضو گروه را بتوان به صورت حاصلضربی از توان های مثبت و منفی اعضای S نوشت . به عنوان مثال گروه $\{Z, +\}$ توسط $S = \{1\}$ تولید می شود. هم چنین گروه $\{nZ, +\}$ توسط $S = \{n\}$ تولید می شود. دراین حالت ها می نویسیم $G = \langle S\rangle$ و یا $G = \langle g_1, g_2, \cdots g_n\rangle$.

دربعضی موارد بین مولدهارابطه هایی وجود دارد مثل رابطه هایی که درمورد مولد های گروه S_3 دیدیم. اگر این رابطه هارا مجموعاً با R نشان دهیم، دراین صورت می نویسیم $G = \langle S\rangle/R$. به عنوان مثال داریم

$$S_3 = \langle \alpha, \beta\rangle/\{\alpha^2 = \beta^2 = e, \alpha\beta\alpha = \beta\alpha\beta\}. \tag{16}$$

تعریف : اگر یک گروه G تنها توسط یک عضو تولید شود، آن گروه یک گروه دوری $Cyclic\ \ Group$ خوانده می شود. دریک چنین گروهی می توان همه اعضا را به صورت توان های متوالی از یک عضو نوشت. مثالی از یک گروه دوری نامتناهی $Infinite\ \ Cyclic\ \ Group$ عبارت است از:

$$G = \{e, a, a^2, a^3, a^4, \cdots\} \tag{17}$$

یک گروه دوری متناهی شکل زیر رادارد:

$$G = \{e, a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}, \tag{18}$$

که درآن $a^n = e$.

قضیه: هرگروه G مجموعه ای ازمولد ها دارد که تعداد آنها ازمرتبه لگاریتمِ $|G|$ است.

اثبات: فرض کنید که $\{g_1, g_2, \cdots g_k\} \subset G$، اما $G \neq \langle g_1, g_2, \cdots g_k\rangle$. دراین صورت مجموعه عناصر $\{gg_1, gg_2, \cdots gg_k\} \subset G$ رادرنظرمی گیریم. واضح است که هیچ کدام ازعناصراین مجمومه متعلق به $\langle g_1, g_2, \cdots g_k\rangle$ نیستند زیرا اگر چنین بود g نیز متعلق به $\langle g_1, g_2, \cdots g_k\rangle$ می شد. بنابراین با اضافه کردن هریک عضو به مجموعهٔ $\langle g1, g_2, \cdots g_k\rangle$ تعداد اعضایی که تولید می شوند تقریبا دو برابرمی شود، یا به عبارت دقیقتر ازدوبرابرکمترمی شود زیرا تکرارها را می بایست درنظربگیریم. این موضوع نشان می دهد که تعداد اعضای G از مرتبه 2 به توان تعداد مولد هاست.

۲.۳ مولد های گروه جایگشت

مولدهای گروه جایگشت S_n، عبارتنداز:

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}\}, \tag{19}$$

که درآن α_i جایگشتی است که تنها جای i و $i+1$ را عوض می کند. به عبارت دیگر:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & i+1 & i & \cdots & n \end{pmatrix}. \tag{20}$$

می توان نشان داد که تمام اعضای S_n از این جایگشت ها تولید می شوند. براحتی می توان دید که بین این مولد ها رابطه های زیر وجود دارد.

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= e, \\ \alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_i &= \alpha_{i+1}\alpha_i\alpha_{i+1}, \\ \alpha_i\alpha_j &= \alpha_j\alpha_i \quad if \quad |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{21}$$

۳.۳ حاصلضرب دکارتی دو گروه

هرگاه دو گروه A و B داشته باشیم می توانیم گروه بزرگتری بسازیم که حاصلضرب دکارتی دو گروه نامیده می شود. بنابرتعریف داریم:

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A, \quad b \in B\}. \tag{22}$$

ضرب دراین گروه به شکل زیر تعریف می شود:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2). \tag{23}$$

عضو خنثی این گروه عبارت است از (e,e') که درآن e عضو خنثی A و e' عضو خنثی B است. هم چنین داریم

$$(a,b)^{-1}=(a^{-1},b^{-1}). \tag{24}$$

۴.۳ زیر گروه ها

تعریف: هرگاه H یک زیرمجموعه دلخواه از گروه G باشد، آن رایک زیرگروه G می نامیم اگر خود یک گروه باشد.

مثال ۱: هرگاه S یک مجموعه دلخواه و $A(S)$ گروه نگاشت های وارون پذیر روی آن باشد آنگاه به ازای هرنقطه دلخواه $x_0\in S$ یک زیرگروه $H_{x_0}\subset A(S)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_{x_0}:=\{\phi\in A(S)|\phi(x_0)=x_0\}. \tag{25}$$

مثال ۲: هرگاه G یگ گروه و $a\in G$ عضوی از آن باشد آنگاه تعریف می کنیم:

$$\langle a\rangle:=\{g\in G|g=a^i,\quad for\ \ some\ \ i\in Z\}. \tag{26}$$

دراین صورت $\langle a\rangle$ یک زیرگروه G است و زیرگروه تولید شده توسط a خوانده می شود.

مثال ۳ : هرگاه G یک گروه و W یک زیر مجموعه G باشد، $\langle W\rangle$ را مجموعه همه عنصرهایی می گیریم که قابل نمایش به صورت حاصل ضرب عنصرهایی از W باشند که به نماهای مثبت، منفی یا صفر رسیده باشند. دراین صورت $\langle W\rangle$ زیرگروه تولید شده توسط W نامیده می شود.

۴ هم مجموعه ها

تعریف: هرگاه H یک زیرگروه G باشد آنگاه رابطه هم ارزی زیر را بین اعضای G تعریف می کنیم:

$$a\equiv b\ \ mod\ H\quad ab^{-1}\in H \tag{27}$$

اثبات این که این رابطه یک رابطه هم ارزی است،آسان است .

تعریف: هرگاه H یک زیرگروه G و $a \in G$ عضوی از G باشدآنگاه به ازای این عضو یک هم مجموعه راست H درG به شکل زیرتعریف می شود:

$$Ha := \{ha|h \in H\}. \tag{28}$$

یک هم مجموعه چپ H در G به طریق مشابه تعریف می شود:

$$aH := \{ah|h \in H\}. \tag{29}$$

ازاین به بعد قضایای مربوط به هم مجموعه ها را برای یکی از دونوع هم مجموعه ها مثلا هم مجموعه راست بیان و اثبات می کنیم.

لم : به ازای هر $a \in G$

$$Ha = \{g \in G|g \equiv a \mod H\}. \tag{30}$$

اثبات : ساده است.

لم : بین هردو مجموعه راست H در G تناظر یک به یک وجود دارد.

اثبات: دوهم مجموعه‌راست Ha و Hb را درنظر می گیریم. باید نشان دهیم که می توان بین این دو یک نگاشت یک به یک و پوشا برقرارکرد. با ستفاده از تعریف Ha و Hb می توانیم نگاشت زیر را بین آنها تعریف کنیم:

$$\phi : Ha \longrightarrow Hb, \quad \phi(x) = xa^{-1}b. \tag{31}$$

این نگاشت یک به یک است زیرا اگر

$$\phi(x) = \phi(y) \longrightarrow xa^{-1}b = ya^{-1}b \longrightarrow x = y. \tag{32}$$

هم چنین این نگاشت پوشاست. زیرافرض کنید که $z \in Hb$. دراین صورت نتیجه می گیریم که $z = hb$ و ازآنجا قرارمی دهیم $\phi(x) = z = hb$ و یا $xa^{-1}b = hb$ و نهایتاً $x = ha$. یعنی یک $x \in Ha$ پیداکردیم به قسمی که $\phi(x) = z$.

قضیه : هرگاه G گروهی متناهی و H یک زیرگروه آن باشد آنگاه $|H| \mid |G|$.

با توجه به تناظریک به یک بین هم مجموعه ها و عدم اشتراک هم مجموعه ها این قضیه بدیهی است.

تعریف : هرگاه $a \in G$ یک عضو از یک گروه باشد، به کوچکترین عدد m که دررابطه $a^m = e$ صدق کند، مرتبه a می گوییم و آن را با $|a|$ نمایش می دهیم. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد می گوییم مرتبه a نامتناهی دارد.

قضیه: مرتبه یک عضو مرتبه گروه را می شمارد، به عبارت دیگر

$$\forall\ a \in G \quad |a| \mid |G|. \tag{33}$$

اثبات : مجموعه $\langle a\rangle := \{e, a, a^2, \cdots\}$ را درنظر می گیریم. این مجموعه می بایست متناهی باشد. با استدلالی که درمورد دومین قضیه این درس کردیم نتیجه می گیریم که $\langle a\rangle$ یک زیر گروه G از مرتبه $|a|$ است و بنابرقضیه قبل نتیجه می گیریم که $|a|$ $|G|$ را می شمارد.

نتیجه‌یک :

$$\forall\ a \in G \quad a^{|G|} = e. \tag{34}$$

اثبات: چون $|G| = k|a|$،

$$a^{|G|} = a^{k|a|} = e^k = e. \tag{35}$$

نتیجه دو: (قضیه اویلر) اگر n یک عدد صحیح مثبت و عدد a نسبت به آن اول باشد آنگاه

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \quad mod\ \ n, \tag{36}$$

که درآن $\phi(n)$ تعداد اعدادکوچکتراز n است که نسبت به n اول هستند.

اثبات: می دانیم که Z_n^* با عمل ضرب یک گروه است. مرتبه این گروه یعنی تعداد اعدادصحیح کوچکتراز n که نسبت به آن اول هستند. این تعداد برابراست با $\phi(n)$. حال اگر a عددی بزرگ تراز n باشد باقیمانده تقسیم آن بر n را با a' نشان می دهیم و درنتیجه $a = kn + a'$ که a' عددی است که نسبت به n اول است (زیرااگر چنین نباشد a نیز نسبت به n اول نخواهد بود،)و ازآن نیز کوچکتراست. درنتیجه $a' \in Zn^*$. باتوجه به نتیجه یک خواهیم داشت:

$$a'^{\phi(n)} \equiv 1 \quad mod\ \ n. \tag{37}$$

حال باجایگذاری $a' = a - kn$ واستفاده از بسط دو جمله ای بدست می آوریم که

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \quad mod\ \ n. \tag{38}$$

نتیجه سه: (قضیه کوچک فرما) اگر p عددی اول باشد و a هرعدددلخواهی باشد آنگاه

$$a^p \equiv a \quad mod \quad p. \tag{39}$$

اثبات : اگر a نسبت به p اول نباشد، چون p خود عدداول است، معنایش این است که به طور کامل دارای فاکتور p است و بنابراین برآن قابل تقسیم است. درنتیجه خواهیم داشت $a^p \equiv a \equiv 0 \quad mod \quad p$. اگر a نسبت به p اول نباشد آنگاه بااستفاده از قضیه اویلر و اینکه $\phi(p) = p - 1$، خواهیم داشت

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad mod \quad p, \tag{40}$$

و ازآنجا باضرب کردن طرفین در a بدست می آوریم که $a^p \equiv a \quad mod \quad p$. درنتیجه برای هر عدد دلخواه a تساوی 39 را ثابت کرده ایم.

قضیه: هرگاه G گروهی متناهی و ازمرتبه عدد اول p باشد، آنگاه G یک گروه دوری است.

اثبات : اگر G عضوی غیر از e نداشته باشد که قضیه بدیهی است. پس فرض می کنیم که عضوی غیراز e مثل a دارد. می دانیم که $\langle a \rangle := \{e, a, a^2, \cdots\}$ یک زیرگروه G است. چون گروه G متناهی است، این زیرگروه نیز باید متناهی باشد. اگر مرتبه آن از مرتبه G کمترباشد باید عدد p را بشمارد که باتوجه به اول بودن عدد p تنها وقتی ممکن است که مرتبه آن مساوی با خود p باشد. درنتیجه زیرگروه $\langle a \rangle$ با خود G یکی می شود و G گروه دوری می شود.

۵ زیر گروه های بهنجار و گروه های خارج قسمت

تعریف : زیر گروه N از گروه G را بهنجار می گوییم هرگاه

$$\forall \ g \in G, \ \forall n \in N \quad gng^{-1} \in N. \tag{41}$$

لم : زیر گروه N از G بهنجاراست اگر و فقط اگر

$$\forall \ g \in G \ \ gNg^{-1} = N. \tag{42}$$

اثبات : فرض کنید که زیر گروه بهنجاراست. بنابرتعریف واضح است که $gNg^{-1} \subset N$. حال باید ثابت کنیم که $N \subset gNg^{-1}$. برای این کار یک عضو مثل $n \in N$ درنظرمی گیریم . می نویسیم:

$$n = g(g^{-1}ng)g^{-1} = gn'g^{1} \in gNg^{-1}, \tag{43}$$

که درتساوی وسط از بهنجاربودن N استفاده کرده ایم. بنابراین ثابت کرده ایم که N و gNg^{-1} زیر مجموعه یکدیگر هستند ودرنتیجه این دوباهم مساوی هستند.

حال فرض کنید که شرط بالابرقراراست. آنگاه بهنجاربودن زیرگروه N واضح می شود.

لم : زیرگروه N در G بهنجاراست اگر و فقط اگر هر هم مجموعه چپ N درG یک هم مجموعه راست N در G باشد.
اثبات : نخست فرض می کنیم که N در G بهنجاراست.

یک هم مجموعه aN درنظر می گیریم. آنگاه

$$g \in aN \longrightarrow g = an \quad for \;\; some \;\; n \in N \longrightarrow g = ana^{-1}a = n'a \longrightarrow g \in Na. \tag{44}$$

درنتیجه $aN \subset Na$. بااستدلال مشابه نتیجه می گیریم که $Na \subset aN$ و باترکیب این دو $Na = aN$.
حال فرض کنید که هر هم مجموعه چپ یک هم مجموعه راست است ، یعنی $Na = aN$. دراین صورت یک عضو دلخواه مثل $g \in G$ درنظر می گیریم

$$aNa^{-1} = aa^{-1}N = N, \tag{45}$$

٦ نمایش گروه های متناهی

تعریف : فرض کنید که G یک گروه است و ما بتوانیم به هر عضو آن مثل g یک ماتریس مربعی مثل $D(g)$ نسبت دهیم به قسمی که

$$D(g)D(g') = D(gg'). \tag{46}$$

دراین صورت می گوییم گروه را به وسیله ماتریس ها نمایش داده ایم. بعد ماتریس ها را بعد نمایش می گوییم. هرگاه به ازای هرg، $D(g)$ یک عملگریکانی باشد، نمایش را یکانی می خوانیم. برای نمایش یکانی معمولاً از نمادِ U بجای D استفاده می کنیم.
همینجا تذکرمی دهیم که ممکن است که یک گروه تنها نمایش هایی با بعدهای مشخص داشته باشد.

نتیجه ها: ازتعریف بالا نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} D(e) &= I \\ D(g^{-1}) &= D(g)^{-1}. \end{aligned} \tag{47}$$

۷ مثال های ساده ای ازنمایش

مثال ۱ : فرض کنیدکه G گروه دوری $G=\{e,a,a^2\}$ است. D_1 یک نمایش یک بعدی برای این گروه است.

$$D_1(e)=1, \qquad D_1(a):=e^{\frac{2\pi i}{3}}, \qquad D_1(a^2):=e^{\frac{4\pi i}{3}}. \tag{48}$$

مثال ۲: G راهمان گروه مثال ۱ می گیریم. D_2 یک نمایش سه بعدی از این گروه است:

$$D_2(e):=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a):=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2(a^2):=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

مثال ۳: G را گروه دوری $G=\{e,a,a^2,\cdots a^{n-1}\}$ بگیرید. دراین صورت یک نمایش یک بعدی برای این گروه عبارت است از:

$$D_1(a^k)=e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k=0,1,2,\cdots n. \tag{50}$$

دقت کنیدکه چون گروه دوری است و تنها شرطی که دارد آن است که $a^n=e$ است تنها می بایست ماتریسی پیدامی کردیم که درشرط $D(a)^n=1$ صدق می کرد که این شرط با ماتریس یک بعدی $D_1(a)=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ برآورده شد.
یک نمایش n بعدی ازهمین گروه به صورت زیرساخته می شود: یک فضای n بعدی بابردارهای پایه $\{|0\rangle,|1\rangle,\cdots|n-1\rangle\}$ درنظرمی گیریم. آنگاه ماتریس S را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$S|i\rangle=|i+1\rangle \tag{51}$$

که درآن عمل جمع به سنج n انجام می شود. واضح است که $S^n|i\rangle=|i\rangle$. بنابراین $S^n=I$. درنتیجه یک نمایش n بعدی به شکل زیرداریم:

$$D_2(e)=I, \quad D_2(a)=S, \quad D_2(a^2)=S^2,\cdots. \tag{52}$$

تعریف نمایش کاهش پذیر: D کاهش پذیر است هرگاه بتوان با یک تبدیل تشابهی تمام ماتریس های $D(g)$ را به صورت بلوکه قطری نوشت. بنابراین نمایشی که نتوان درهیچ پایه ای آن را به صورت بلوکه قطری نوشت ، نمایش کاهش ناپذیرخوانده می شود.

مثال: برای گروه دوری $Z_2 := \{e, a\}$ دونمایش یک بعدی می توانیم تعریف کنیم: نمایش ِ

$$D_0(e) = 1, \qquad D_0(a) = 1, \tag{53}$$

و نمایش ِ

$$D_1(e) = 1, \qquad D_1(a) = -1. \tag{54}$$

هم چنین می توانیم یک نمایش دوبعدی به صورت زیرتعریف کنیم:

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

اما این نمایش یک نمایش کاهش پذیراست زیرا باتبدیل تشابهی

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

خوااهیم داشت:

$$SD_2(e)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad SD_2(a)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

که به این معناست که

$$D_2(g) = D_0(g) \oplus D_1(g) \quad \forall g. \tag{57}$$

مثال : نمایش منظم

برای هرگروه متناهی G یک نمایش یکتاکه آن را با D^R نشان می دهیم و بعد آن بامرتبه G یعنی $|G|$ برابراست، به شکل زیرتعریف می شود. V را فضای برداری ای می گیریم که بردارهای پایه متعامد آن متناظربا عناصرگروه هستند. این بردارهای پایه را با

$$\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, \cdots |g_{|G|}\rangle\}, \quad \langle g_i|g_j\rangle := \delta_{g_i,g_j} \tag{58}$$

نشان می دهیم. حال به ازای هر $g \in G$ $D^R(g)$ روی بردارهای پایه این فضا به شکل زیراثرمی کند:

$$D^R(g)|g'\rangle := |gg'\rangle, \quad \forall g, g' \in G. \tag{59}$$

براحتی معلوم می شود که D^R یک نمایش است زیرا:

$$D^R(g)D^R(h)|k\rangle = D^R(g)|hk\rangle = |g(hk)\rangle = |(gh)k\rangle = D^R(gh)|k\rangle. \tag{60}$$

۸ کاراکترهای یک نمایش

فرض کنید که D یک نمایش از گروه G است . کلاس های تزویجی این گروه را $C_1, C_2, \cdots C_K$ نمایش می دهیم. کاراکتر i ام نمایش D که آن را با χ_i نمایش می دهیم عبارت است از:

$$\chi_i := tr(D(g)) \quad g \in C_i \tag{61}$$

این که کاراکتر به یک کلاس و نه به اعضای آن بستگی دارد به این دلیل است که هردوعضو یک کلاس تزویجی مثل $x, y \in C_i$ دررابطه $y = g^{-1}xg$ برای یک $g \in G$ صدق می کنند و

$$tr(D(y)) = tr(D(gxg^{-1})) = tr(D(g)D(x)D(g)^{-1}) = tr(D(x)). \tag{62}$$

دراین درس خواهیم دید که کاراکترهانقش مهمی درنظریه نمایش گروه های متناهی بازی می کنند.
دراین جا به ذکر یک قضیه مهم بدون اثبات آن می پردازیم. این قضیه بیان می کند هرگاه فضای V یک ضرب داخلی باشد همواره نمایش یک گروه متناهی یکانی خواهد بود.
به عبارت بهتر بایک تغییرپایه مناسب تمام ماتریس های نمایش را می توان تبدیل به ماتریس های یکانی کرد.

۹ قضایایی بدون اثبات در مورد نمایش ها

در نظریه نمایش های یک گروه متناهی با مسایلی روبرو هستیم که مهم ترین آنها را در زیر ذکر می کنیم:

سوال ۱: یک گروه متناهی مشخص چه تعداد نمایش کاهش ناپذیر غیر معادل دارد و این نمایش ها چه ارتباطی با یکدیگر دارند.

سوال ۲: چگونه می توان این نمایش ها را ساخت.

سوال ۳: چگونه می توان تشخیص داد که آیا یک نمایش معین کاهش ناپذیراست یا کاهش پذیر؟ و اگر کاهش پذیر بود چگونه می توان تشخیص داد که به چه نمایش هایی تجزیه می شود؟

دراین بخش پاسخ این سوالات را بیان می کنیم بدون این که به اثبات پاسخ ها بپردازیم. برای اثبات درستی این پاسخ ها خواننده می تواند به درسنامه نظریه گروه مراجعه کند. دراینجا بهتراست نمادگذاری خود را مشخص کنیم. تامل برسراین نامگذاری دراینجا فهم مطالب آینده را آسان خواهد کرد. این نامگذاری درجدول زیرآمده است.

N	تعداد نمایش های کاهش ناپذیر
K	تعداد کلاس های تزویجی
D^μ	نمایش کاهش ناپذیر μ
n^μ	بعد نمایش کاهش ناپذیر μ
C_i	کلا س تزویجی i
$\|C_i\|$	تعداد اعضای کلاس تزویجی i
χ_i	کاراکتر یک نمایش در کلاس i
χ_i^μ	کاراکتر نمایش کاهش ناپذیر μ برای کلاس i

(63)

حال به پاسخ اولین سوال می پردازیم:

پاسخ سوال ۱ تعداد نمایش های کاهش ناپذیر با تعداد کلاس های تزویجی برابراست. بنابراین $N = K$. هرگاه $D^\mu(g)$ نمایش عنصرِ g از گروه باشد و $[D^\mu(g)]_{ij}$ درایه‌ی ij از آن باشد، آنگاه روابط زیر بین درایه های نمایش های مختلف برقراراست:

$$\sum_{g\in G} D^{\nu}_{mi}(g) D^{\mu *}_{nj}(g) = \frac{|G|}{n_\nu}\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{mn}. \quad (64)$$

$$\sum_{ij;\mu} D^{\mu}_{ij}(g) D^{\mu}_{ij}(g')^{*} = \delta_{g,g'}, \quad (65)$$

این دو رابطه اصطلاحاً روابط تعامد و کامل بودن نمایش ها نامیده می شوند.

هم چنین بین کاراکتر های نمایش های مختلف روابط زیر برقراراست:

$$\sum_{i=1}^{K} |C_i| \chi_i^{\nu} \chi_i^{\mu *} = |G|\delta^{\mu\nu}. \quad (66)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sqrt{|C_l||C_{l'}|}\chi_l^{\mu} \chi_{l'}^{\mu *} = \delta_{l,l'}|G|. \quad (67)$$

این دو رابطه نیز روابط تعامد و کامل بودن کاراکترها نامیده می شوند.

پاسخ سوال دوم: برای این کار طرق مختلفی وجود دارد که در آن ها از مطالب زیر استفاده می شود:

الف: نمایش های شناخته شده مثل نمایش بدیهی یک بعدی که به همه عناصر گروه عدد ۱ نسبت داده می شود و یا نمایش های ساده دیگر.

ب : روابط بین خود اعضای گروه .

ج: روابط تعامد و کامل بودن کاراکتر ها و درایه های نمایش ها. در زیر با یک مثال نحوه پیدا کردن نمایش های گروه S_3 را توضیح می دهیم.

پاسخ سوال ۳:

یک نمایش یکانی از یک گروه متناهی کاهش ناپذیراست اگر شرط زیربرآورده شود:

$$\sum_{g\in G} |\chi(g)|^2 = |G| \quad (68)$$

بنابراین برای تشخیص کاهش پذیر یا نبودن یک نمایش تنها می بایست کاراکترهای آن نمایش را برای کلاس های مختلف محاسبه کرد و بررسی کرد که آیا معادله فوق برقرار خواهد شد یا نه.

حال یک نمایش معین مثل $D(g)$ را در نظر بگیرید. این نمایش اگر کاهش پذیر باشد به صورت بلوکه قطری در می آید که در هر بلوک آن یکی از نمایش های کاهش ناپذیر قرار گرفته‌است. بنابراین می توان نوشت:

$$D(g) = \bigoplus_{\mu=1}^{N} a_\mu D^\mu(g), \tag{69}$$

که در آن a_μ ها عددهای صحیحی هستند که نشان می دهند در چند بلوک نمایش D^μ پدیدار شده است. هدف ما پیدا کردنِ اعداد صحیحِ a_μ است. برای این کار از رابطه بالا ردّ می گیریم و بدست می آوریم:

$$\chi(g) = \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu \chi^\mu(g), \tag{70}$$

و یا

$$\chi_i = \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu \chi_i^\mu. \tag{71}$$

حال می توانیم از روابط تعامد کاراکتر ها استفاده کنیم و اعدادِ a_μ را بدست آوریم:

$$a_\mu = \frac{1}{|G|} \sum_i |C_i| \chi_i \chi_i^{\mu *}. \tag{72}$$

۱۰ مثال هایی از نمایش ها

مثال ۱ : فرض کنید که G یک گروه آبلی باشد . دراین صورت می دانیم که همه کلاس های تزویجی آن یک عضوی هستند، بنابراین $K = |G|$. باتوجه به رابطه اول و دوم از (??) بدست می آوریم که $N = |G|$ و برای همه μ ها $n^\mu = 1$. یعنی یک گروه آبلی تمام نمایش های کاهش ناپذیرش یک بعدی هستند.

مثال ۲: فرض کنید که G یک گروه دوری $G = \{e, a, a^2, \cdots a^{n-1}\}$ است. کافی است که نمایش مولد آن یعنی a را بدست آوریم. ازمثال قبل می دانیم که تمام نمایش ها یک بعدی هستند. یک نمایش D درنظربگیرید. می بایست شرط

$$(D(a))^n = 1 \tag{73}$$

برقرارباشد. این معادله n تا حل دارد که هرکدام یک نمایش را تعریف می کند

$$D^{\mu}(a) = e^{\frac{2\pi i\mu}{n}} \quad \mu = 0, 1, \cdots n-1. \tag{74}$$

بنابراین

$$D^{\mu}(a^k) = e^{\frac{2\pi i\mu k}{n}} \quad \mu = 0, 1, \cdots n-1. \tag{75}$$

مثال ۳ : گروه S_3: گروه جایگشت های سه شیء یا S_3 دارای دو مولد است که آنهارابا σ_1 و σ_2 نشان می دهیم. داریم:

$$S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}. \tag{76}$$

بااستفاده ازروابطی که بین مولد ها برقراراست کلاس های تزویجی S_3 به شکل زیرخواهند بود:

$$C_0 = \{e\}, \quad C_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}, \quad C_2 = \{\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\}. \tag{77}$$

بنابراین برای این گروه داریم $N = K = 3$. یعنی سه نمایش کاهش ناپذیرداریم. یک نمایش یک بعدی همان نمایش بدیهی است:

$$D^0(g) = 1 \quad \forall\, g \in S_3. \tag{78}$$

نمایش یک بعدی دیگر آن است که به جایگشت های زوج عدد ۱+ و به جایگشت های فرد عدد ۱− نسبت می دهد:

$$\begin{aligned} &D^1(e) = D^1(\sigma_1\sigma_2) = D^1(\sigma_2\sigma_1) = 1 \\ &D^1(\sigma_1) = D^1(\sigma_2) = D^1(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = -1. \end{aligned} \tag{79}$$

ازرابطه $(n^0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 = 6$ نتیجه می شود که تنهایک نمایش دوبعدی دیگروجوددارد. دراین نمایش کافی است که بتوانیم به مولدهای σ_1 و σ_2 ماتریس های دوبعدی نسبت دهیم که درروابط ضرب گروه صدق کنند. می دانیم که

$$D^2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{80}$$

نایه ای انتخاب می کنیم که درآن نمایش σ_1 قطری باشد. ازآنجا که $\sigma_1^2 = e$، ویژه مقدارهای $D^2(\sigma_1)$ یک ومنهای یک خواهند بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$D^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (81)$$

حال باقی می ماند نمایش σ_2. ماتریس $D^2(\sigma_2)$ می بایست یکانی باشد. ویژه مقدارهای آن نیز ± 1 است، پس دترمینان آن -1 است. یک چنین ماتریسی شکل استاندارد زیررادارد:

$$D^2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a^* \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \qquad (82)$$

شرط $(D^2(\sigma_2))^2 = I$ منجر به حقیقی بودن a می شود.
حال ازرابطه بین مولدها استفاده می کنیم. می دانیم که $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$. درنتیجه می بایست داشته باشیم

$$D^2(\sigma_1)D^2(\sigma_2)D^2(\sigma_1) = D^2(\sigma_2)D^2(\sigma_1)D^2(\sigma_2). \qquad (83)$$

این شرط منجر به مقادیرزیر می شود: $a = \frac{-1}{2}$ و $|b|^2 = \frac{3}{4}$. بنابراین خواهیم داشت

$$D^2(\sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3}e^{i\phi} \\ \sqrt{3}e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (84)$$

که درآن ϕ یک پارامترآزاد است. این پارامتررا همواره می توان باتبدیل تشابهی مناسب حذف کرد. یافتن این تبدیل را به عهده خواننده می گذاریم. نهایتاً نمایش D^2 به شکل زیراست:

$$D^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D^2(\sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (85)$$

۱۱ تبدیل فوریه روی گروه های متناهی

فرض کنید که G یک گروه متناهی از مرتبه $|G|$ و $f : G \longrightarrow C$ یک تابع مختلط روی گروه باشد. دراین صورت برای یک نمایش یکانی کاهش ناپذیرمثل ρ با بعد d_ρ تابع $\tilde{f}(\rho)$ را به عنوان تبدیل فوریه f به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$\tilde{f}(\rho) := \sqrt{\frac{d_\rho}{|G|}} \sum_{g\in G} f(g)\rho(g). \qquad (86)$$

مثال: G را گروه Z_N می گیریم. داریم

$$Z_N = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ N-1\}. \tag{87}$$

این گروه N تانمایش یکانی کاهش ناپذیردارد که عبارتنداز

$$\rho^{\mu}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i \mu k}{N}}. \tag{88}$$

دراین صورت بنابرتعریف فوق خواهیم داشت

$$\tilde{f}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{\frac{2\pi i \mu k}{N}}. \tag{89}$$

بخصوص اگر $G = Z_2$ آنگاه تبدیل فوریه فوق چیزی نیست جز تبدیل هادامارد.

مثال: G را گروه Z_2^n می گیریم. دراین صورت داریم $|G| = 2^n$. تعداد نمایش های کاهش ناپذیر برابر است با 2^n. هرنمایش کاهش ناپذیر با چند تایی $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ مشخص می شود که درآن $\mu_i = 0,\ 1, \quad \forall\ i$. هم چنین داریم

$$\rho^{\vec{\mu}}(g) = \rho^{\vec{\mu}}(\vec{k}) = \bigotimes_{i=1}^{n} \rho^{\mu_i}(k_i). \tag{90}$$

حال دقت می کنیم که $\rho^{\mu)_i}(k_i) = (-1)^{\mu_i k_i}$. بنابراین خواهیم داشت $\rho^{\vec{\mu}}(\vec{k}) = (-1)^{\vec{\mu}\cdot\vec{k}}$. درنتیجه

$$\tilde{f}(\vec{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) (-1)^{\vec{\mu}\cdot\vec{k}}. \tag{91}$$

۱.۱۱ تبدیل فوریه معکوس

نخست به اتحاد مهم زیرتوجه می کنیم:

$$\sum_{\mu} d_{\rho_\mu} \chi^{\rho_\mu}(g) = |G| \delta_{g,e}. \tag{92}$$

برای اثبات این اتحاد توجه می کنیم که ازرابطه

$$\rho = \bigoplus_{\mu} c_\mu \rho^\mu, \tag{93}$$

داریم

$$\chi_i = \sum_{\mu} c_\mu \chi_i^\mu. \tag{94}$$

هرگاه طرفین را در$r_i\overline{\chi_i^\nu}$ ضرب کنیم و روی i جمع بزنیم بدست می آوریم

$$r_i\overline{\chi_i^\nu}\chi_i = \sum_{\mu} r_i c_\mu \chi_i^\mu \overline{\chi_i^\nu} \tag{95}$$

اما از رابطه تعامد مربوط به کاراکترها

$$\sum_{i} r_i \overline{\chi_i^\mu}\chi_i^\nu = |G|\delta_{\mu,\nu}, \tag{96}$$

ورابطه کامل بودن آنها یعنی

$$\sum_{\mu} \sqrt{r_i r_j}\,\overline{\chi_i^\mu}\chi_j^\mu = |G|\delta_{i,j}, \tag{97}$$

بدست می آوریم

$$\sum_{i} \overline{\chi_i^\nu}\chi_i = \sum_{\mu} c_\mu |G|\delta_{\mu,\nu} = |G|c_\nu, \tag{98}$$

بنابراین نتیجه می گیریم

$$c_\nu = \sum_{i} \frac{r_i}{|G|}\overline{\chi_i^\nu}\chi_i. \tag{99}$$

برای نمایش منظم خواهیم داشت

$$C_\nu = \sum_{i} \frac{r_i}{|G|}\overline{\chi_i^\nu}\chi_i^{Reg}, \tag{100}$$

ویا

$$C_\nu = \sum_{g\in G} \frac{1}{|G|}\overline{\chi^\nu}(g)\chi^{Reg}(g). \tag{101}$$

امامی دانیم که $\chi^{reg}(g) = \delta_{g,e}|G|$. بنابراین بدست می آوریم

$$C_\nu = \overline{\chi^\nu}(e) = d_\nu, \tag{102}$$

ودرنتیجه $C_\nu = d_\nu$. بنابراین درتجزیه نمایش منظم به نمایش های کاهش ناپذیرهرنمایش به تعداد بعد خود ظاهرمی شود. بنابراین رابطه ——– را می توان به شکل زیربازنویسی کرد:

$$\chi_i^{Reg} = \sum_\mu d_\mu \chi_i^\mu, \tag{103}$$

ویا

$$\chi_i^{Reg}(g) = \sum_\mu d_\mu \chi_i^\mu(g), \tag{104}$$

وازآنجا

$$|G|\delta_{g,e} = \sum_\mu d_\mu \chi^\mu(g). \tag{105}$$

حال ازاین نتیجه اساسی استفاده می کنیم و تبدیل فوریه معکوس را تعریف می کنیم: از رابطه

$$\boxed{\tilde{f}(\rho) := \sqrt{\tfrac{d_\rho}{|G|}} \textstyle\sum_{g\in G} f(g)\rho(g),} \tag{106}$$

بدست می آوریم

$$\begin{aligned}
\sum_\mu \sqrt{d_\mu} tr(\tilde{f}(\mu)\rho^\mu(g')) &= \sum_\mu \frac{d_\mu}{\sqrt{|G|}} \sum_{g\in G} f(g) tr(\rho^\mu(gg')) \\
&= \sum_\mu d_\mu \sum_{g\in G} f(g)\chi^\mu(gg')\frac{1}{\sqrt{|G|}} \\
&= \sum_{g\in G} \frac{1}{\sqrt{|G|}} \left(\sum_\mu d_\mu \chi^\mu(gg')\right) \\
&= \sqrt{|G|} f(g'^{-1}).
\end{aligned} \tag{107}$$

بنابراین بدست می آوریم

$$\boxed{f(g)=\sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\sum_\mu \tilde{f}(\mu)\rho^\mu(g^{-1})}. \tag{108}$$

یک خاصیت مهم از تبدیل فوریه روی گروه.
می خواهیم ببنیم اگر تابع f را به اندازه یک عنصرگروه انتقال دهیم تبدیل فوریه آن چه تغییری خواهد کرد. به عبارت دیگر چه رابطه ای بین تبدیل فوریه تابع $f(g)$
و تابع $f'(g):=f(gh)$ وجود دارد. داریم

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(\mu) &= \sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\sum_{g\in G} f(gh)\rho^\mu(g) \\
&= \sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\sum_{g'\in G} f(g')\rho^\mu(g'h^{-1}) \\
&= \sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\sum_{g'\in G} f(g')\rho^\mu(g')\rho(h^{-1})=\tilde{f}(g)\rho^\mu(h^{-1}).
\end{aligned} \tag{109}$$

به خصوص برای وقتی که تابع f تناوبی باشد یعنی برای وقتی که خاصیت $\forall\ g\in G \quad f(g)=f(gh)$ برقرارباشد خواهیم داشت

$$\tilde{f}(\mu)(I-\rho^\mu(h^1))=0, \tag{110}$$

ویا

$$\tilde{f}(\mu)=\delta_{\rho^\mu(h),I}. \tag{111}$$

۲.۱۱ تبدیل فوریه روی گروه های آبلی

برای گروه های آبلی داریم $N=|G|$ یعنی تعداد نمایش های کاهش ناپذیر با تعداد عناصرگروه برابراست. درنتیجه خواهیم داشت

$$\tilde{f}(\mu) = \sqrt{\frac{1}{|G|}}\sum_{g\in G} f(g)\rho^\mu(g),$$

$$f(g) = \sqrt{\frac{1}{|G|}}\sum_{\mu}\tilde{f}(\mu)\rho^{\mu}(g^{-1}), \tag{112}$$

مثال ۱ : $G = Z_n$. دراین صورت داریم

$$g \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots n-1\}, \qquad \mu \in \{0,\ 1,\ 2, \cdots n-1\}. \tag{113}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k} f(k)e^{\frac{2\pi i\mu k}{n}} \\ f(k) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\mu}\tilde{f}(\mu)e^{-\frac{2\pi i\mu k}{n}}. \end{aligned} \tag{114}$$

مثال ۲ : $G = Z_n \times Z_m$. دراین صورت داریم

$$g \in \{(k,l) \mid k \in Z_n, l \in Z_m\}. \tag{115}$$

$$\mu \in \{(\mu_1,\mu_2) \mid \mu_1 \in Z_n,\ \mu_2 \in Z_m\}. \tag{116}$$

و

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mu_1,\mu_2) &= \frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{k,l} f(k,l)e^{\frac{2\pi i\mu_1 k}{n}+\frac{2\pi i\mu_2 l}{m}} \\ f(k,l) &= \frac{1}{\sqrt{nm}}\sum_{\mu_1,\mu_2}\tilde{f}(\mu_1,\mu_2)e^{-\frac{2\pi i\mu_1 k}{n}-\frac{2\pi i\mu_2 l}{m}}. \end{aligned} \tag{117}$$

مثال ۳ : $G = S_3$. دراین صورت داریم

$$g \in \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}. \tag{118}$$

و

$$\mu \in \{1, 1', 2\}. \tag{119}$$

هم چنین می دانیم که

$$\rho^1(\sigma_1) = \rho^1(\sigma_2) = 1, \qquad \rho^{1'}(\sigma_1) = \rho^{1'}(\sigma_2) = -1. \tag{120}$$

و

$$\rho^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \rho^2(\sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \tag{121}$$

برای این گروه داریم

$$\tilde{f}(1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(f(e) + f(\sigma_1) + f(\sigma_2) + f(\sigma_1\sigma_2) + f(\sigma_2\sigma_1) + f(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\right), \tag{122}$$

$$\tilde{f}(1') = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(f(e) - f(\sigma_1) - f(\sigma_2) + f(\sigma_1\sigma_2) + f(\sigma_2\sigma_1) - f(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\right) \tag{123}$$

و

$$\begin{aligned} \tilde{f}(2) &= \sqrt{\frac{2}{6}} f(e)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f(\sigma_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &+ f(\sigma_2)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + f(\sigma_1\sigma_2)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\ &+ f(\sigma_2\sigma_1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + f(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{124}$$

هم چنین روابط مربوط به عکس تبدیل فوریه نیز دراینجا برقراراست. برای هر $g \in S_3$ می توانیم بنویسیم

$$f(g) = \frac{1}{\sqrt{6}} tr(\tilde{f}(1)\rho^1(g)) + \frac{1}{\sqrt{6}} tr(\tilde{f}(1')\rho^{1'}(g)) + \sqrt{\frac{2}{6}} tr(\tilde{f}(2)\rho^2(g)). \tag{125}$$

خواننده می تواند صحت این رابطه را تحقیق کند.

دقت کنید که می توانیم روابط مربوط به تبدیل فوریه را به شکل زیربازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mu,i,j) &= \sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\sum_{g\in G} f(g)[\rho^m(g)]_{ij}\\ f(g) &= \sum_{\mu,i,j}\sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\tilde{f}(\mu,i,j)[\rho^\mu(g^1)]_{ji}.\end{aligned}\tag{126}$$

چون $\sum_\mu d_\mu^2 = |G|$ ، تبدیل فوریه تبدیلی است ازیک فضای $|G|$ بعدی به یک فضای $|G|$ بعدی. می توانیم این تبدیل را بانماد های دیراک به شکل زیباتروگویاتری بنویسیم. درفضای $|G|$ بعدی می توانیم یک پایه متعامد بهنجار به شکل زیردرنظربگیریم:

$$\{|g\rangle,\ \ g\in G\},\qquad \langle g|g'\rangle = \delta_{g,g'}.\tag{127}$$

حال پایه دیگری به شکل زیردرنظرمی گیریم

$$\{|\mu,i,j\rangle,\}\tag{128}$$

که درآن μ روی نمایش های کاهش ناپذیرمتفاوت و i و j روی درایه های آن نمایش مقدارمی گیرند. ارتباط این دو پایه به شکل زیراست:

$$\langle g|\mu,i,j\rangle = \sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}[\rho^\mu(g)]_{ij}.\tag{129}$$

حال سوال می کنیم که آیا پایه جدید نیز متعامد و بهنجاراست. برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که

$$\langle \mu',i',j'|\mu,i,j\rangle = \sum_{g,g'}\sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\sqrt{\frac{d'_\mu}{|G|}}\overline{[\rho^{\mu'}(g)]_{i'j'}}[\rho^\mu(g)]_{ij}\tag{130}$$

اما قبلاً نشان داده ایم که طرف راست این رابطه برابراست با $\delta_{\mu,\mu'}\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$. بنابراین پایه های جدید نیز متعامد و بهنجارو درنتیجه کامل هستند. درنتیجه می توانیم بنویسیم

$$|g\rangle = \sum_{\mu,i,j}\sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}[\rho^\mu(g)]_{ij}|\mu,i,j\rangle\tag{131}$$

ویا

$$|\mu, i, j\rangle = \sum_{g\in G} \sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}\overline{[\rho^\mu(g)]_{ij}}|g\rangle. \tag{132}$$

تبدیل فوریه چیزی نیست جزتبدیلی بین پایه های فوق. فرض کنید که $|f\rangle$ یک برداردرفضای خطی فوق باشد. دراین صورت می نویسیم

$$|f\rangle = \sum_{g\in G} f(g)|g\rangle. \tag{133}$$

همین بردار را می توانیم درپایه دوم بنویسم. خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \sum_{g\in G} f(g) \sum_{\mu,i,j} \sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}[\rho^\mu(g)]_{ij}|\mu, i, j\rangle \\ &= \sum_{\mu,i,j}\left(\sum_{g\in G} f(g)\sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}[\rho^\mu(g)]_{ij}\right)|\mu, i, j\rangle \\ &= \sum_{\mu,i,j}\tilde{f}(\mu, i, j)|\mu, i, j\rangle, \end{aligned} \tag{134}$$

که درآن

$$\tilde{f}(\mu, i, j) = \sum_{g\in G} f(g)\sqrt{\frac{d_\mu}{|G|}}[\rho^\mu(g)]_{ij}. \tag{135}$$