تمرین سری یازدهم درس مکانیک کوانتومی

دانشکده فیزیک — دانشگاه صنعتی شریف

موعد تحویل : ۲۲ آبان ماه ۱۳۸٦

۱ — نمایش های دوبعدی و سه بعدی ماتریس دوران حول محور $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{z})$ و به اندازه ۳۰ درجه را بدست آورید. جهت دوران نسبت به محور باقانون دست راست مشخص می شود.

---

۲ — ماتریس های L_x، L_y و L_z را برای نمایش های اسپین $\frac{3}{2}$ و اسپین 2 به طور صریح بدست آورید.

---

۳ — طرف راست روابط جابجایی زیر را تعیین کنید:

$$[L_i, \vec{R} \cdot \vec{P}], \qquad [L_i, \vec{R} \cdot \vec{L}], \qquad [L_i, \vec{P} \cdot \vec{L}]. \tag{1}$$

---

۴ — عملگرهای $L_+,\ L_-,\ L_z$ را در به صورت عملگرهای دیفرانسیلی در مختصات قطبی بدست آورید. این کار را با شکل دیفرانسیلی این عملگرها در مختصات دکارتی و استفاده از تبدیل مختصات دکارتی به قطبی انجام دهید.

---

۵ — با استفاده از شکل دیفرانسیلی عملگرهای تکانه زاویه‌ای که در تمرین ۴ بدست آوردید، صحت رابطه‌های زیر را نشان دهید:

$$\begin{aligned} [L_z, L_+] &= L_+ \\ [L_z, L_-] &= -L_- \\ [L_+, L_-] &= 2L_z. \end{aligned} \tag{2}$$

---

٦ — اثر عملگر L_x را روی $Y_{1,0}$ بدست آورید.

---

۷ – یک عملگرِ S اسکالر خوانده می شود هرگاه تحت دوران تغییرنکند. به عبارت دیگر هرگاه به ازای هر $\hat{n}$ و هر θ داشته باشیم

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}Se^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}} = S \qquad (3)$$

الف: نشان دهید که یک عملگر اسکالر با تمام مولفه های تکانه زاویه ای جابجامی شود. این خاصیت را می توان به عنوان تعریف عملگراسکالر درنظرگرفت.

ب: یک عملگر اسکالرمثال بزنید.

ج : نشان دهید که برای هرچنین عملگری رابطه زیربرقراراست:

$$\langle l', m'|S|l, m\rangle \propto \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}. \qquad (4)$$

این رابطه یک قاعده انتخاب یا $Selection\ \ Rule$ خوانده می شود زیرا تعیین می کند که بعضی از عناصر ماتریسی صفرهستند. به عنوان مثال تحقیق کنید که $\vec{P}\cdot\vec{P}$ یک عملگراسکالراست. سپس نتیجه بگیرید که انتگرال زیربرابرباصفراست:

$$\int\int d\cos\theta d\phi Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)\nabla^2 Y^*_{l,m}(\theta,\phi) = 0 \qquad l\neq l' \quad \text{یا} \quad m\neq m' \quad \text{اگر} \qquad (5)$$

---

۸ – الف: باالهام از مسئله ۴ و آنچه که درمتن درس دیده اید عملگر برداری را تعریف کنید. دقت کنید که عملگربرداری یک عملگر سه مولفه ای است که آن را با $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) \equiv (V_1, V_2, V_3)$ نشان می دهیم. راهنمایی : $\vec{P}$ ، $\vec{R}$ و خود $\vec{L}$ عملگرهای برداری هستند.

ب : نشان دهید که اگر $\vec{V}$ و $\vec{W}$ دوعملگر برداری باشند آنگاه $\vec{V}\cdot\vec{W}$ یک عملگر اسکالراست.

ج : اگر $\vec{V}$ یک عملگر برداری باشد قرارمی دهیم:

$$V_+ := V_x + iV_y, \qquad V_- := V_x - iV_y. \qquad (6)$$

نشان دهید که برای یک عملگربرداری روابط زیربرقرارند:

$$\begin{aligned}
\langle l', m'|V_z|l, m\rangle &= 0 \qquad m\neq m',\\
\langle l', m'|V_+|l, m\rangle &= 0 \qquad m'-m\neq 1.\\
\langle l'.m'|V_-|l, m\rangle &= 0 \qquad m'-m\neq -1.
\end{aligned} \qquad (7)$$

برای اینکه به اهمیت این رابطه ها که ازطریق جبری بدست می آیند توجه کنید که بااتکابه آنها بدون هیچ نوع محاسبه ای می توان گفت که عنصرماتریسی زیر برابرباصفراست. این عنصرماتریسی درمحاسبات مربوط به تشعشع دوقطبی ازاتم هیدروژن پدیدارمی شود:

$$\int d\cos\theta d\phi Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)(x+iy)Y^*_{l,m}(\theta,\phi)=0 \qquad m'-m\neq 1. \tag{8}$$

ازنظرفیزیکی این امربدان معناست که ازطریق تشعشع دوقطبی گذاری بین لایه هایی که تکانه زوایه ای آنها بیش از یک واحد اختلاف داشته باشد رخ نمی دهد. منشأ آن نیز بقای تکانه زاویه ای است زیرافوتون ذره ای است با اندازه حرکت زاویه ای ذاتی یا اسپین یک.

د: نشان دهید که

$$[L_z,V_+]=V_+. \tag{9}$$

بااستفاده ازاین رابطه نشان دهید که رابطه تکرارزیربرقراراست.

$$\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\ \left(\ \langle l,m|V_z|l,m\rangle-\langle l,m+1|V_z|l,m+1\rangle\ \right)\ =-\langle l,m+1|V_+|l,m\rangle. \tag{10}$$

ه: رابطه تکرارمشابهی بااستفاده ازرابطه $[L_z,V_-]=-V_-$ بدست آورید.

---

۹ – ذره ای درحالت $|l,m\rangle$ قراردارد. عدم قطعیت ΔL_x و ΔL_y برای این ذره چقدراست؟ آیا حاصلضرب این عدم قطعیت ها ازقضیه کلی عدم قطعیت پیروی می کند.

---

۱۰ – درمکانیک کلاسیک جسم صلبی که دارای ممان اینرسی I وتکانه زاویه ای L است دارای انرژی جنبشی $E=\frac{L^2}{2I}$ است. حال فرض کنید که این جسم صلب یک جسم میکروسکوپی نظیر یک مولکول دواتمی است. هرگاه از حرکت مرکزجرم این مولکول صرف نظرکنیم و تنها به چرخش آن حول مرکز جرم توجه کنیم می توانیم هامیلتونی مربوط به چرخش آن را به صورت

$$H_{rot}=\frac{L^2}{2I} \tag{11}$$

بنویسیم. دراین جا فرض کرده ایم که مولکول ازهرنوع پتانسیلی دوراست و تنها انرژی جنبشی دورانی دارد. طیف انرژی جنبشی این مولکول را بدست آورید و واگنی هرتراز انرژی را مشخص کنید.

---

۱۱ – (یک تمرین جالب ومهم): برای این تمرین یک بارمی بایست بدقت درس مربوط به حرکت یک ذره باردار درمیدان مغناطیسی و ترازهای لانداو را مرورکنید. فرض کنید که گازالکترونی بدون برهم کنش دریک محیط دوبعدی تحت میدان مغناطیسی B قرارگرفته است. چنین گازی را می توان با نشاندن لایه های نیم رسانای مناسب واکسید فلزبه طریق مناسب روی

هم درست کرد. فرض کنید که گاز درون یک قرص دایره ای به شعاع R محبوس است. در درس دیده اید که هرتراز لانداو واگنی دارد. برای یک نمونه بی نهایت بزرگ این واگنی بی نهایت است. ولی نمونه ما بی نهایت بزرگ نیست و شعاع R دارد. واگنی هرتراز لانداو را حساب کنید. این محاسبه در مطالعه اثر کوانتومی هال و درهرمسئله ای مربوط به رفتارگازالکترونی درمیدان مغناطیسی اهمیت دارد.
