تمرین سری دوازدهم درس مکانیک کوانتومی

دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

موعد تحویل : سه شنبه، ۲۹ آبان ماه ۱۳۸۶

۱ – الف: باتوجه به روابط ۹۵ و ۹۶ از درس دهم (تکانه زاویه‌ای در سه بعد)، توابع $Y_{l,m}$ را برای $l=2$ بنویسید. تحقیق کنید که این توابع تحت اثر عملگرهای L_+ و L_- و L_z مثل بردارهای یک نمایش اسپین ۲ رفتار می کنند.

ب: توابع $|Y_{2,m}|^2$ تنها توابعی از θ هستند. این توابع را به شکل زیر رسم کنید. دریک صفحه دوبعدی با مختصات قطبی r و θ ، به ازای هر زاویه‌ی θ مقدار r را برابر با $r=|Y_{2,m}|^2$ قرار دهید. این شکل ها هرگاه دوران داده شوند، شکل اوربیتال های d را درست می کنند. دقت کنید که اوربیتال های p و s به ترتیب مربوط به $l=1$ و $l=0$ هستند.

۲ – می دانیم که تابع $Y_{l,l}$ به شکل زیراست:

$$Y_{l,l}(\theta,\phi)=A_l\sin^l(\theta)e^{il\phi}. \tag{1}$$

الف: ثابت A_l را چنان پیدا کنید که این تابع به عنوان یک تابع روی کره دوبعدی بهنجارباشد.

ب: می دانیم که عملگر L_- به صورت زیراست:

$$L_-=-e^{-i\phi}(\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}) \tag{2}$$

و به ترتیب زیر روی $Y_{l.m}$ ها اثر می کند:

$$L_-Y_{l,m}=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}Y_{l,m-1}. \tag{3}$$

قرار دهید: $Y_{l.m}(\theta,\phi)=F_{l,m}(\cos\theta)e^{im\phi}$ و نشان دهید که رابطه فوق به صورت زیر در می آید:

$$\left(\frac{d}{d\theta}+m\cot\theta\right)F_{l,m}=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}F_{l,m-1}. \tag{4}$$

حال قرار دهید $x=\cos\theta$ و نشان دهید که معادله فوق به صورت زیر در می آید:

$$\left(-\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}+\frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}\right)F_{l,m}(x)=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}F_{l,m-1}(x). \tag{5}$$

جنبه ناخوشایند این معادله آن است که پارامترِ m در عملگر دیفرانسیل طرف چپ پدیدار می شود. برای بهتر نوشتن معادله دیفرانسیل قرار دهید: $F_{l,m}(x)=(1-x^2)^{\alpha_m}G_{l,m}(x)$ و α_m را طوری انتخاب کنید که عملگر دیفرانسیلی که در طرف چپ روی $G_{l,m}$ اثر می کند دیگر شامل پارامتر m نباشد.

ج: نشان دهید که تابع $G_{l,m}$ به صورت زیر است:

$$G_{l,m}(x)=(-1)^{l-m}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}}[(1-x^2)\frac{d}{dx}]^{l-m}G_{l,l}(x), \tag{6}$$

د: با استفاده از عبارت $Y_{l,l}$ تابع $G_{l,l}(x)$ را بدست آورید. سپس عبارت کاملی برای $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ بدست آورید. عبارت خود را با روابط 95 و 96 درسنامه، درس دهم، مقایسه کنید.

۳ – عملگر جریان یعنی $\mathbf{J}=\frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)$ را در نظر بگیرید. یک موج تخت به صورت $\psi=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ را در نظربگیرید و متوسط این عملگر را روی این حالت حساب کنید. نتیجه خود را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.

۴ – عملگر جریان در تمرین قبلی را در دستگاه مختصات کروی بازنویسی کنید و آن را به صورت

$$\hat{J}=J_r\hat{r}+J_\theta\hat{\theta}+J_\phi\hat{\phi} \tag{7}$$

دربیاورید. حال یک موج کروی به صورت

$$\psi_{k,l,m}(r,\theta,\phi)=A\frac{e^{ikr}}{kr}Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{8}$$

در نظر بگیرید. نخست ثابت A را چنان پیدا کنید که این تابع موج بهنجار باشد، به این معنا که

$$\int\psi^*_{k',l,m}\psi_{k,l,m}r^2drd\Omega=\delta(k-k'). \tag{9}$$

سپس سه عنصر ماتریسی $\langle\psi_{k,l,m}|J_r|\psi_{k,l,m}\rangle$، $\langle\psi_{k,l,m}|J_\theta|\psi_{k,l,m}\rangle$ و $\langle\psi_{k,l,m}|J_\phi|\psi_{k,l,m}\rangle$ را حساب کرده و نتایج خود را از نظر فیزیکی تفسیر کنید.

۵ – در درسنامه نشان داده‌ایم که توابع بسل کروی با روابط زیر تعریف می شوند. می دانیم که این ها توابع موج شعاعی برای ذره آزاد هستند:

$$
\begin{aligned}
j_l(x) &= x^l \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x} \\
j_l(x) &= x^l \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \frac{-\cos x}{x}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

الف: نشان دهید که توابع بسل کروی در نزدیکی مبداء ($r \longrightarrow 0$) به صورت زیر رفتار می کنند:

$$
j_l(kr) \approx \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \tag{11}
$$

و

$$
n_l(kr) \approx \frac{(2l-1)!!}{(kr)^{l+1}}. \tag{12}
$$

(راهنمایی: کافی است که بسط توابع $\sin(x)$ و $\cos(x)$ را در نزدیکی مبداء به یاد آورید.

ب: نشان دهید که این توابع در r های بزرگ $r \longrightarrow \infty$ رفتار مجانبی زیر را دارند:

$$
\begin{aligned}
j_l(kr) &\approx \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} \\
n_l(kr) &\approx \frac{\cos(kr - l\pi/2)}{kr}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(راهنمایی: وقتی که از عبارتی مثل $\frac{\sin x}{x}$ نسبت به x مشتق می گیریم، جمله زیر حاصل می شود:

$$
\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \tag{14}
$$

و برای x های بزرگ، جمله دوم در مقایسه با جمله اول کوچک است و همواره می توان آن را دور ریخت.)

٦ – دراین تمرین می خواهیم ضرایب بسط توابع موج تخت بر حسب امواج کروی را پیدا کنیم. در درس دوازدهم یافتیم که یک موج تخت به صورت زیر بر حسب امواج کروی بسط داده می شود:

$$
e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l j_l(kr) Y_{l,0}(\theta, \phi). \tag{15}
$$

در دستگاه مختصات کروی می دانیم که $z = r\cos\theta$. بنابراین این رابطه به صورت زیر نوشته می شود:

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l j_l(kr) Y_{l,0}(\theta,\phi). \tag{16}$$

دراین رابطه می توانیم r را در دو طرف به صورت یک پارامتر ثابت درنظربگیریم. درنتیجه این رابطه بسط یک تابع برحسب هارمونیک های کروی است. با استفاده از شرط تعامد این هارمونیک ها یعنی رابطه‌ی

$$\int Y^*_{l',m'}(\theta,\phi) Y_{l,m}(\theta,\phi) d\cos\theta d\phi = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}, \tag{17}$$

نشان دهید که ضرایب C_l از رابطه زیر تعیین می شود:

$$C_l j_l(kr) = \int d\cos\theta d\phi e^{ikr\cos\theta} Y_{l,0}(\theta,\phi). \tag{18}$$

اگر انتگرال طرف راست را بتوانیم محاسبه کنیم، ثابت های C_l بدست می آیند. اما چون عبارت $Y_{l,0}$ ها پیچیده‌است می توانیم از این رابطه که $Y_{l,0} = A_l L_-^l Y_{l,l}$ استفاده کنیم، که در آن A_l یک ثابت است.

الف: نخست ضریب ثابت A_l را محاسبه کنید و نشان دهید که

$$A_l = \frac{1}{\sqrt{(2l)!}}. \tag{19}$$

بنابراین قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} I &\equiv \int d\cos\theta e^{ikr\cos\theta} Y_{l,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{(2l)!}} \int d\cos\theta e^{ikr\cos\theta} L_-^l Y_{l,l}(\theta,\phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2l)!}} \int d\cos\theta (L_+^l e^{ikr\cos\theta}) Y_{l,l}(\theta,\phi). \end{aligned} \tag{20}$$

اما بسادگی می توان اثر ${L_+}^l$ را روی $e^{ikr\cos\theta}$ محاسبه کرد.

ب : نشان دهید که:

$${L_+}^l e^{ikr\cos\theta} = (-1)^l e^{il\phi} (\sin\theta)^l (ikr)^l e^{ikr\cos\theta}. \tag{21}$$

ج: از این که منهای یک ضریب ثابت $e^{il\phi}\sin^l\theta$ همان $Y_{l,l}$ است و نشان دهید:

$$C_l j_l(kr) = (ikr)^l \frac{2^l l!}{\sqrt{(2l)!}}\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!}}\int d\Omega |Y_{l,l}(\theta,\phi)|^2 e^{ikr\cos\theta}. \tag{22}$$

این تساوی برای همه r ها صحیح است. برای محاسبه طرفین r را به سمت صفر میل می دهیم تا هم طرف چپ و هم محاسبه انتگرال ساده شوند.

د: با انجام این کار نشان دهید:

$$C_l = i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}. \tag{23}$$

بنابراین دراین تمرین رابطه زیر را ثابت کرده‌اید:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\, j_l(kr) Y_{l,0}(\theta,\phi). \tag{24}$$