تمرین های سری چهاردهم:
موعد تحویل : ۲۷ آذرماه ماه ۱۳۸۶

۱ − می دانیم که J_x, J_y و J_z مولدهای دوران حول محورهای x, y و z هستند، به این معنا که $R_x(\alpha) = e^{-i\alpha J_x}$، $R_y(\alpha) = e^{-i\alpha J_y}$ $R_z(\alpha) = e^{-i\alpha J_z}$ به ترتیب دوران حول محورهای x، y و z به اندازه زاویه α را ایجاد می کنند. هم چنین می دانیم که یک دوران دلخواه را می توان با زوایای اویلر نشان داد به این معنا که

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha). \tag{1}$$

به عبارت بهتر کلی ترین دوران را می توان به دورانی حول محور z به اندازه زاویه α که با یک دوران حول محورِ y به اندازه زاویه‌ی β و سپس یک دوران حول محورِ z به اندازه زاویه‌ی γ دنبال می شود، تجزیه کرد. هدف این مسئله پیدا کردن نمایش های یک دوران دلخواه است.

الف: نمایش دو بعدی یک دوران $R(\alpha,\beta,\gamma)$ را بدست آورید.

ب: نمایش سه بعدی یک دوران $R(\alpha,\beta,\gamma)$ را بدست آورید.

۲− دو ذره با اسپین یک دوم درنظربگیرید. حالت های آنهارا با $\langle +|$ و $\langle -|$ نشان می دهیم. می دانیم که تکانه زاویه ای کل این دو ذره می تواند مقادیر یک و صفر را اختیار کند.

الف : شکل دقیق این حالت هایعنی حالت هایی را که تکانه زاویه‌ای کل آنها برابر با صفر یا یک است، بنویسید.

ب : عملگرهای

$$L_a = S_a \otimes I + I \otimes S_a, \qquad a = x,\ y,\ z$$

که درآن S_a عملگرهای اسپین هستند را درنظربگیرد. نشان دهید که این عملگرها در روابط جابجایی تکانه زاویه ای صدق می کنند.

ج: ماتریس های این عملگر ها را درپایه $\langle +,+|$، $\langle +,-|$ ، $\langle -,+|$ و $\langle -,-|$ پیدا کنید.

د: حال ماتریس های عملگرهای بالا را درپایه ای که در قسمت الف پیدا کرده اید بدست آورید و نشان دهید که دراین پایه این ماتریس ها بلوکه قطری می شوند. یکی از بلوک ها می بایست سه بعدی بوده و با ماتریس های مربوط به نمایش اسپین یک برابر باشد. بلوک دیگر نیز می بایست با ماتریس های نمایش اسپین صفر برابرباشد. به این کار تجزیه کردن یک نمایش می گویند.

۳– دو ذره با اسپین یک درنظربگیرید. حالت های آنهارا با $|1\rangle$ و $|0\rangle$ و $|-1\rangle$ نشان می دهیم.
الف : تکانه زاویه ای کل این دو ذره چه مقدارهایی می تواند اختیار کند؟

ب : شکل دقیق حالت هایی را که تکانه زاویه ای کل آنها مشخص است بدست آورید؟

۴– سه ذره با اسپین یک دوم درنظربگیرید.

الف : تکانه زاویه ای کل این ذرات چه مقدارهای می تواند داشته باشد؟

ب : حالت هایی را ازاین سه ذره بسازید که تکانه کل آنها مقدارمشخص داشته باشد.

ج : فرض کنید که برهم کنش این اسپین ها با هامیلتونی زیر داده شده است:

$$H = J(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3 + S_3 \cdot S_1). \tag{2}$$

ویژه حالت های هامیلتونی را پیدا کنید.

---

۵ – دو ذره اسپین یک مطابق با هامیلتونی زیر با هم برهم کنش می کنند:

$$H = JS_1 \cdot S_2 + hS_{1z} + hS_{2z}, \tag{3}$$

که درآن h مثبت است ولی ضریب جفتیدگی J می تواند مثبت یا منفی باشد.

حالت پایه و انرژی آن را بدست آورید. دقت کنید که حالت پایه بستگی به مقدار J و نسبت آن با h دارد. در یک دیاگرام دو بعدی که برحسب h و J رسم می کنید، حالت پایه و انرژی آن را در نواحی مختلف مشخص کنید.

---

۶ — سه ذره با هامیلتونی زیر با هم برهم کنش می کنند:

$$H = J(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3). \tag{4}$$

با نوشتن هامیلتونی به صورت $H = J\mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_3)$ و استفاده از پایه‌ای که در آن تکانه‌ی زاویه‌ای کل برای ذره اول و سوم مشخص باشد، ویژه حالت های هامیلتونی و انرژی ها را بدست آورید.

---

۷ — هسته اتم هلیوم دارای دو پروتون و دو نوترون است. پروتون و نوترون هردو ذرات اسپین $1/2$ هستند. اسپین کل هسته چه مقادیری را می تواند اختیار کند؟

---

۸ — چهار ذره اسپین $1/2$ در کنار هم قرار گرفته اند. تکانه زاویه ای کل این چهارذره می تواند مقداری برابر باصفر اختیار کند. درواقع دو حالت هستند که دارای چنین خاصیتی هستند. شکل صریح این دو حالت را پیدا کنید.

۹— ساده ترین مدل برای یک فرومغناطیس زنجیره ای از هسته های با اسپین یک دوم است که دریک بعد پشت سرهم قرارگرفته اند. این هسته ها را به ترتیب از یک تا N شماره گذاری می کنیم و شرط مرزی پریودیک را نیز به کار می بریم یعنی زنجیره را به شکل یک دایره درنظرمی گیریم. دراین صورت هامیلتونی ای که برهم کنش این اسپین ها را باهم نشان می دهد عبارت است از:

$$H = -J\sum_{i=1}^{N} S_i \cdot S_{i+1}, \tag{5}$$

که درآن J یک مقدار مثبت است. (برای حل این مسئله باید به مثبت بودن J می بایست توجه کنید.)
منظور از عملگر $\mathbf{S}_i$ یعنی عملگری که فقط روی ذره i ام عمل می کند وروی بقیه ذرات مثل عملگر واحد عمل می کند.
الف : عملگر جایگشت بین حالت دو اسپین به صورت زیر تعریف می شود:

$$P|\alpha, \beta\rangle = |\beta, \alpha\rangle, \qquad \alpha = \pm, \beta = \pm. \tag{6}$$

نخست عملگر $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}$ را برحسب عملگر جایگشت بین حالت های دو ذره i و $i+1$ یعنی عملگر $P_{i,i+1}$ بنویسید. سپس هامیلتونی فوق را برحسب عملگرهای جایگشت بازنویسی کنید.

ب : حالت پایه این عملگر را پیدا کنید وانرژی آن را بدست آورید. آیا واگنی وجود دارد؟ درجه این واگنی چقدراست؟

ج: حال فرض کنید که میدان مغناطیسی خارجی و یکنواخت B را اعمال کرده ایم و هامیلتونی به شکل زیر درآمده است

$$H_B = -J\sum_{i=1}^{N} S_i \cdot S_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^{N} S_{i,z}, \tag{7}$$

حالت پایه و انرژی آن را بدست آورید. آیا بازهم واگنی وجود دارد؟ درجه این واگنی چقدراست؟
نشان دهید که این هامیلتونی با اسپین کل در راستای z یعنی با $S_z := \sum_{i=1}^{N} S_{i,z}$ جابجا می شود. بنابراین ویژه حالت های آن همگی می بایست ویژه مقدار S_z شان مشخص باشد.

د: حالت $|k\rangle$ را به معنای حالتی که درآن تمام اسپین ها به صورت $|-\rangle$ و تنها اسپین ذره k ام به صورت $|+\rangle$ است می گیریم. به این حالت یک حالت تک ذره ای می گوییم . چنین حالتی یک ویژه حالت هامیلتونی نیست. اما می توانید از ترکیب خطی آنها برای k های مختلف ویژه حالت هایی برای H_B بسازید. این ویژه حالت ها را پیدا کنید. آنچه را که یافته اید یک موج اسپینی یا $Spin\ Wave$ نامیده می شود. این نامگذاری را توجیه کنید.
