تمرین سری دوم درس مکانیک کوانتومی

مقدمات ریاضی مکانیک کوانتومی

دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

موعد تحویل : ۱۵ اسفند ماه ۱۳۸۵

۱ – یک عملگر بهنجار مثل T درنظرمی گیریم. این عملگردارای این خاصیت است که $T^2 = I$. نشان دهید که

$$e^{\alpha T} = \cosh \alpha I + \sinh \alpha T. \tag{1}$$

---

۲ – عملگر $T : R^2 \longrightarrow R^2$ را درنظربگیرید که مطابق بارابطه زیرتعریف می شود:

$$T(x, y) = (-y, x)e \tag{2}$$

نشان دهید که

$$e^{\alpha T} = \sin \alpha T + \cos \alpha I. \tag{3}$$

اثر $e^{\alpha T}$ را بر نقطه (x, y) حساب کنید.

---

۳ – S عملگربهنجاری است که در رابطه $S^3 = I$ صدق می کند. عملگر $e^{i\alpha S}$ زیررا به صورت ترکیبی خطی از عملگرهای I، S و S^2 بنویسید.

---

۴ – فرض کنید که A و B دوعملگر بهنجار باشند. تابع

$$f(\lambda) := e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} \tag{4}$$

را درنظرمی گیریم. حال می توانیم این تابع را به عنوان یک تابع تحلیلی حول $\lambda = 0$ بسط دهیم وبنویسیم

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n. \tag{5}$$

الف: بامحاسبه مشتقات متوالیِ $f(\lambda)$ طرف راست را برحسب B و تعویضگرهای متوالی $[A,B]$ ، $[A,[A,B]]$ ، $[A,[A,[A,B]]]$ و $\cdots$ بنویسید.

ب: هرگاه داشته باشیم $[A,B] = \alpha I$ عبارت $e^{\lambda A}Be^{-\lambda A}$ را حساب کنید.

---

۵ – ماتریس های پاوولی رابه ترتیب زیر در نظر بگیرید:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

اگر $\mathbf{n} := (n_x, n_y, n_z)$ یک بردار یکه باشد عبارتِ $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}$ برابراست با $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$.

الف : اتحاد های زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \sigma_k\sigma_l &= \delta_{kl} + i\epsilon_{klm}\sigma_m \\ (n\cdot\vec{\sigma})(m\cdot\vec{\sigma}) &= m\cdot n\, I + i(m\times n)\cdot\vec{\sigma} \\ (n\cdot\vec{\sigma})(n\cdot\vec{\sigma}) &= I. \end{aligned} \tag{7}$$

ب: ویژه مقدارها و ویژه بردارهای عملگرهای پاوولی را پیدا کنید.

ج: ویژه بردارها و ویژه بردارهای عملگر $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}$ را حساب کنید.

---

۶ – دریک فضای n بعدی که بابردارهای پایه $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \cdots |n-1\rangle$ تعریف می شود عملگرهای زیرتعریف شده اند:

$$\begin{array}{llll} S|0\rangle = |1\rangle, & S|1\rangle = |2\rangle, & \cdots & S|n-1\rangle = |0\rangle \\ T|0\rangle = |0\rangle, & T|1\rangle = \xi|1\rangle, & \cdots & T|n-1\rangle = \xi^{n-1}|2\rangle \end{array} \tag{8}$$

که درآن ξ ریشه n امِ یک است یعنی $\xi^n = 1$.

الف: رابطه جابجایی زیرراحساب کنید:

$$[S,T] \tag{9}$$

ب: طرف راست عبارت زیرراحساب کنید:

$$e^{i\alpha S}Te^{-i\alpha S} \tag{10}$$

ج: اثر $e^{\frac{2\pi i}{n}S}$ روی یک حالت $|k\rangle$ چه حالتی است.

د: ویژه مقادیر و ویژه بردارهای عملگر S را حساب کنید.

ه: هرگاه تعریف کنیم $H = S + S^{-1} - 2$، ویژه مقادیر و ویژه بردارهای عملگر H را بدست آورید.

———————————————————————————————————————

۷ — عملگرهای A و B دررابطه $[A,B] = I$ صدق می کنند. طرف راست عبارت های زیرراحساب کنید:

$$\begin{aligned} &e^{\alpha A}Be^{-\alpha A} \\ &e^{\alpha A}e^{\beta B}e^{-\alpha A}. \end{aligned} \tag{11}$$

———————————————————————————————————————

۸ — نشان دهید که برای هرعملگر A رابطه زیر که درآن ϵ پارامتربی نهایت کوچکی است، تامرتبه اول از ϵ برقراراست:

$$det(I + \epsilon A) = 1 + \epsilon Tr(A) \tag{12}$$

حال نشان دهید که

$$det(e^A) = e^{Tr(A)}. \tag{13}$$

———————————————————————————————————————

۹ — ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ رادرنظربگیرید.

الف: به ازای چه مقادیری از a این ماتریس یک ماتریس مثبت است؟

ب: به ازای آن مقادیر ماتریس $\sqrt{A}$ را بدست آورید.

ج: ماتریس $\sqrt{A}$ را برحسب ماتریس های I و A بنویسید.

———————————————————————————————————————

۱۰ — هرگاه B یک عملگرباشد

الف: ثابت کنید که عملگر $BB^\dagger$ همواره مثبت است.

ب : ماتریس زیر را درنظربگیرید:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

ماتریس $\sqrt{B}$ راحساب کنید .

ج: ماتریس $\sqrt{B}$ را برحسب توان های صحیح B بنویسید.

---

۱۱ — عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+1}|n\rangle\langle n+1|, \qquad A^\dagger = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+1}|n+1\rangle\langle n|. \tag{15}$$

الف: جابجاگر این دو عملگر را حساب کنید.

ب: ردّ دو طرف تساوی $[A, A^\dagger]$ و نشان دهید که ردّ هر دو طرف مساوی صفراست.

ج: حال فرض کنید که $N \longrightarrow \infty$ و نشان دهید که $[A, A^\dagger] = I$. دراین حالت رد دو طرف را حساب کنید.