تمرین سری چهارم : درس مکانیک کوانتومی

دانشکده فیزیک — دانشگاه صنعتی شریف

موعد تحویل : ۱۰ اردیبهشت ماه ۱۳۸۶

۱ — دراین تمرین می خواهیم باآزمایش اشترن گرلاخ و پدیده کوانتش اسپین بیشتر آشناشویم. هدف از آزمایش اشترن گرلاخ اندازه گیری ممان مغناطیسی اتم هاست. هرگاه ممان مغناطیسی یک اتم را با $\vec{\mu}$ نشان دهیم می توان مقدارآن را باگذراندن اتم هاازیک میدان مغناطیسی ناهمگن اندازه گیری کرد. درفیزیک کلاسیک برهم کنش چنین اتمی بامیدان مغناطیسی باهامیلتونی زیرتوصیف می شود:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B}. \tag{1}$$

هرگاه این ممان مغناطیسی ناشی از چرخش اتم حول محوری باشد می توان نوشت $\vec{\mu} = g\vec{S}$ که درآن g ضریب ژیرومغناطیسی است و $\vec{S}$ تکانه زاویه ای ذاتی اتم است. درجات آزادی این مسئله عبارتند از مولفه های تکانه زاویه ای و مختصات و تکانه مرکزجرم.

الف : معادلات حرکت را بااستفاده از کروشه های پوآسون زیربدست آورید:

$$\begin{aligned}
&\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \\
&\{S_i, S_j\} = i\epsilon_{ijk} S_k, \\
&\{S_i, x_j\} = \{S_i, p_j\} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

و نشان دهید که این معادلات به شکل زیرهستند:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{\vec{P}}{m} \\
&\frac{d}{dt}\vec{p} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\mu} = g\vec{\mu} \times \vec{B}. \tag{3}$$

ب: معادله سوم نشان می دهد که ممان مغناطیسی اتم حول میدان مغناطیسی حرکت چرخشی می کند. فرض کنید که متوسط میدان مغناطیسی درجهت $\hat{e}_1$ باشد. یعنی $\overline{\vec{B}} = B\hat{e}_1$ که درآن B مقدارمتوسط است. هرگاه ناهمگنی میدان مغناطیسی نسبت به این مقدارمتوسط کم باشد و هم چنین هرگاه زمان عبور اتم از میدان مغناطیسی نسبت به پریود چرخش آن حول میدان زیاد باشد می توان از مولفه های ممان مغناطیسی درراستای عمود بر $\hat{e}$ صرف نظرکرد.

ب : ازمعادله سوم نتیجه بگیرید که تحت این شرایط $\mu_1 := \vec{\mu}\cdot\hat{e}_1$ یک مقدار ثابت است.

ج: ازمعادله دوم نتیجه بگیرید که

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_1 \cdot \vec{P}) = \mu_1 B' \tag{4}$$

که درآن

$$B' := (\hat{e}_1 \cdot \nabla)(\hat{e}_1 \cdot \vec{B}), \tag{5}$$

کمیتی است که کاملاً به ساختمان مغناطیس بستگی دارد.
ازمعادله 4 نتیجه می گیریم که نیروی وارد بر ذره دقیقاً متناسب با μ_1 یعنی مولفه ممان مغناطیسی درراستای میدان مغناطیسی متوسط است.

د: درآزمایش می بینیم که فقط دو لکه روی پرده مقابل مغناطیس ایجاد شده است که به این معناست که ممان مغناطیسی ذرات درراستای e_1 تنها دومقدار داشته است. این دومقداربرابرند با $+\mu$ و $-\mu$. ضمناً اگرآزمایش رادرهرجهتی انجام دهیم بازهم همین دومقداربدست می آیند. آیا می توان فرض کرد که اتم ها قبل از اندازه گیری یک ممان مغناطیسی دارند که ماتوسط آزمایش مولفه آن را دریک جهت معین اندازه می گیریم؟ برای تحقیق این مسئله سه بردار یکه $\hat{e}_1$ ، $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ تصور کنید که بایکدیگر زاویه ۱۲۰ درجه می سازند. آیا می توانید برداری مثل $\vec{\mu}$ تصورکنید که درشرط های زیرصدق کند؟

$$\begin{aligned} \vec{\mu}\cdot\hat{e}_1 &= \pm\mu \\ \vec{\mu}\cdot\hat{e}_2 &= \pm\mu \\ \vec{\mu}\cdot\hat{e}_3 &= \pm\mu. \end{aligned} \tag{6}$$

---

۲ – حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{7}$$

الف: اگر یک آزمایش اشترن گرلاخ درراستای z روی این حالت انجام دهیم با چه احتمالی نتیجه برابربا $+\frac{\hbar}{2}$ خواهد بود و باچه احتمالی برابربا $-\frac{\hbar}{2}$.

ب: اگر یک آزمایش اشترن گرلاخ درراستای y روی این حالت انجام دهیم با چه احتمالی نتیجه برابربا $+\frac{\hbar}{2}$ خواهد بود و باچه احتمالی برابربا $-\frac{\hbar}{2}$.

ج: متوسط مشاهده پذیرهای زیر دراین حالت چقداست:

$$S_x, \qquad S_y, \qquad S_z. \tag{8}$$

د: یک میدان مغناطیسی ثابت در راستای z اعمال می کنیم. اگر در لحظه‌ی $t=0$ ذره در حالت $|\mathbf{n}\rangle$ باشد، حالت ذره را در لحظه t پیدا کنید. مقادیر متوسط زیر را به عنوان توابعی از زمان پیدا کنید:

$$\langle S_x(t)\rangle, \qquad \langle S_y(t)\rangle, \qquad \langle S_z(t)\rangle. \tag{9}$$

---

۳ – حالت $|z+\rangle$ را در نظربگیرید.

اگر اسپین این ذره را در راستای $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ اندازه بگیریم، چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آوریم.

---

۴ – در یک فضای هیلبرت سه بعدی ذره ای در حالت زیر قرار دارد:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \tag{10}$$

بر روی این ذره مشاهده پذیری را که با عملگر زیر توصیف می شود اندازه گیری می کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

الف: تعیین کنید که در اندازه گیری A چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید. حالت های بعد از اندازه گیری را نیز مشخص کنید.

ب: فرض کنید که عملگر هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

اگر در لحظه $t = 0$ ذره در حالت $|\psi\rangle$ باشد، حالت ذره را در زمان t پیدا کنید.

---

۵ — در لحظه $t = 0$ تابع موج یک ذره آزاد به جرم m به شکل زیراست:

$$\psi(x,0) = (\frac{\pi}{\alpha})^{-1/4} e^{-\alpha x^2/2}. \tag{13}$$

الف: تابع موج در فضای تکانه یعنی $\tilde{\psi}(p,0)$ را بدست آورید.

ب: توابع موج در فضای مختصات و تکانه را در لحظه t بدست آورید.

ج: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle X(t)\rangle, \quad \langle X^2(t)\rangle, \quad \Delta X(t) := \sqrt{\langle X^2(t)\rangle - \langle X(t)\rangle^2}, \quad \langle P(t)\rangle, \quad \langle P^2(t)\rangle, \quad \Delta P(t) := \sqrt{\langle P^2(t)\rangle - \langle P(t)\rangle^2}. \tag{14}$$

د: احتمال اینکه در لحظه t مکان ذره را در فاصله‌ی $(-\alpha, \alpha)$ پیدا کنیم چقدر است؟

ه : احتمال اینکه در لحظه t تکانه ذره را در فاصله‌ی $(-\frac{\hbar}{\alpha}, \frac{\hbar}{\alpha})$ پیدا کنیم چقدر است؟

و: چگالی جریان احتمال یعنی $J(x,t)$ را بدست آورید.

سعی کنید که تمام نتایج خود را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.

---

٦ — در لحظه $t = 0$ تابع موج یک ذره آزاد به جرم m به شکل زیراست:

$$\tilde{\psi}(x,0) = (\frac{\pi}{\alpha})^{-1/4} e^{-\alpha (p-p_0)^2/2}. \tag{15}$$

الف: تابع موج در فضای مختصات یعنی $\tilde{\psi}(p,0)$ را بدست آورید.

ب: توابع موج در فضای مختصات و تکانه را در لحظه t بدست آورید.

ج: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle X(t)\rangle, \quad \langle X^2(t)\rangle, \quad \Delta X(t) := \sqrt{\langle X^2(t)\rangle - \langle X(t)\rangle^2}, \quad \langle P(t)\rangle, \quad \langle P^2(t)\rangle, \quad \Delta P(t) := \sqrt{\langle P^2(t)\rangle - \langle P(t)\rangle^2}. \tag{16}$$

د: احتمال اینکه در لحظه t مکان ذره را در فاصله‌ی $(-\alpha, \alpha)$ پیدا کنیم چقدر است؟

ه : احتمال اینکه در لحظه t تکانه ذره را در فاصله‌ی $(-\frac{\hbar}{\alpha}, \frac{\hbar}{\alpha})$ پیدا کنیم چقدر است؟

و: چگالی جریان احتمال یعنی $J(x,t)$ را بدست آورید.

سعی کنید که تمام نتایج خود را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.
