تمرین سری نهم درس مکانیک کوانتومی

دانشکده فیزیک — دانشگاه صنعتی شریف

موعد تحویل : ۲۵ مهر ماه ۱۳۸۶

۱ — نشان دهید که مولفه سوم تکانه‌ی زاویه‌ی برحسب مختصات قطبی به شکل زیراست:

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{1}$$

۲ — نشان دهید که در دو بعد رابطه زیر بین تکانه‌ی زاویه ای و بردارهای تکانه $\hat{P} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y)$ و $\hat{R} = (\hat{X}, \hat{Y})$ برقرار است:

$$\hat{L}_z^2 = \hat{R}^2\hat{P}^2 - (\hat{R}\cdot\hat{P})^2. \tag{2}$$

۳ — نشان دهید که روابط جابجایی زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} &[\hat{L}_z, \hat{P}^2] = [\hat{L}_z, \hat{R}^2] = 0, \\ &[\hat{L}_z, \hat{R}\cdot\hat{P}] = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

۴ — می دانیم که معادله شعاعی شرودینگر در دوبعد به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}) + V_{eff}(r)\right] f(r) = Ef(r), \tag{4}$$

که درآن

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 n^2}{2mr^2} \tag{5}$$

پتانسیل موثراست. نشان دهید که هرگاه تابع $u(r)$ را به صورت زیر تعریف کنیم، آنگاه معادله شعاعی شرودینگر به صورت زیر درمی آید:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\tilde{V}_{eff}(r)\right]u(r)=Eu(r), \tag{6}$$

که درآن

$$\tilde{V}_{eff}(r)=V(r)+\frac{\hbar^2(n^2-\frac{1}{4})}{2mr^2}. \tag{7}$$

۵ – معادله دیفرانسیل بسل با مرتبه صحیح به شکل زیراست:

$$\frac{d^2}{dx^2}f+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}f+(1-\frac{n^2}{x^2})f=0. \tag{8}$$

با بسط دادن تابع f به صورت

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+r} \tag{9}$$

این معادله را حل کنید. می بایست برای این معادله دو جواب مستقل بدست بیاورید. منظور از حل آن است که مقدار r و هم چنین عبارت صریحی برای ضرایب c_k بیابید.