درس هجدهم : ذرات یکسان

۱ ذرات یکسان و اصل طرد پاوولی

درفیزیک کلاسیک همواره می توانیم مجموعه ای از ذرات یکسان را با دنبال کردن مسیرهایشان مشخص کنیم زیرا پذیرفته ایم که مکان و سرعت هرذره یعنی مسیر آن با دقت دلخواه قابل اندازه گیری است. اگر بر فرض هر ذره را با برچسب یا شماره ای علامت زده باشیم، همواره می توانیم درطول زمان مسیرذرات را دنبال کنیم و ووقتی که این ذرات به هم نزدیک شده باهم برهم کنش می کنند و سپس از هم دور می شوند با دنبال کردن شماره ها ذرات را از یکدیگر تمیز دهیم.
اما در دنیای میکروسکوپی که فیزیک کوانتومی سینماتیک و دینامیک ذرات را تعیین می کند، چنین چیزی ممکن نیست زیرا یک ذره نه با مسیر خود بلکه با تابع موجی که درفضا گسترده است تعین می شود. تصورکنید که مجموعه ای از ذرات یکسان کاملاً دور از هم قرارگرفته باشند. هرکدام از این ذرات با یک بسته موج سه بعدی، چیزی مثل یک ابر یا مِه، که به احتمال حضورآن وابسته است مشخص می شود. می توانیم فرض کنیم که ذرات آنقدرازهم دورند که ابرهای احتمال ِآنها با یکدیگر تداخل نمی کنند. دراین صورت می توانیم هر ابرِ احتمال را با یک شماره معین کنیم و درذهن خود این شماره ها را دنبال کنیم. با سپری شدن زمان بسته های موج یا ابرهای احتمال این ذرات به یکدیگر نزدیک شده درهم ادغام می شوند وتغییر شکل می دهند و سپس از هم جدا می شود. حال می پرسیم که کدام ابر متعلق به کدام ذره است؟ واضح است که به این پرسش نمی توانیم پاسخ قطعی بدهیم. بنابراین دردنیای میکروسکوپی یک مجموعه از ذرات یکسان الزاماً از یکدیگر تمیز پذیر نیستند. درنتیجه تابع موجی مثل $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ که درآن $\mathbf{r}$ مکان ذره ۱ و $\mathbf{r}'$ مکان ذره دو را نشان دهد درمکانیک کوانتومی بی معناست. آنچه که می توانیم بگوییم آن است که یکی از ذرات درمکان $\mathbf{r}$ و دیگری درمکان $\mathbf{r}'$ است. چنین تابع موجی به ناگزیر باید دارای این خاصیت باشد که مربع آن که نشان دهنده احتمال حضور ذرات است تحت جایگشت دو ذره تغییر نکند، به عبارت دیگر می بایست درشرط زیر صدق کند:

$$|\Psi(r,r')|^2 = |\Psi(r',r)|^2. \tag{1}$$

این امر به این معناست که خود تابع موج تحت جایگشت دو ذره به ترتیب زیر رفتارکند

$$\Psi(r,r') = e^{i\phi}\Psi(r',r). \tag{2}$$

اما می دانیم که اگر جایگشت دو ذره را دو بارانجام دهیم مثل این است که هیچ کاری نکرده باشیم بنابراین می بایست داشته باشیم

$$\Psi(r,r') = e^{2i\phi}\Psi(r,r'). \tag{3}$$

و درنتیجه $e^{2i\phi}=1$ و $e^{i\phi}=\pm 1$. بنابراین تابع موج دو ذره یکسان می بایست دارای خاصیت زیر باشد:

$$\Psi(r,r')=\pm\Psi(r',r). \tag{4}$$

بحث ما تا اینجا ازیک نقطه نظر اساسی ناقص است و آن اینکه توصیف کامل یک ذره تنها با تابع موج فضایی آن امکان پذیر نیست، بلکه حالت یک ذره به طور کامل درفضای هیلبرتی صورت می گیرد که هم مختصات فضایی و هم مختصات اسپینی درآن قابل نمایش باشد. به همین دلیل است که برای توصیف دو ذره متفاوت بجای تابع موج $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ می بایست از تابع موجِ $\Psi_{\alpha,\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ استفاده کرد. این تابع موج احتمال این را می دهد که ذره شماره ۱ در مکان $\mathbf{r}$ و اسپین اش در وضعیت α باشد و ذره شماره ۲ در نقطه $\mathbf{r}'$ واسپین اش در وضعیت β باشد. برای ذرات یکسان این توصیف می بایست اصلاح شود زیرا نمی توان ذرات را حتی با یک برچسب ذهنی از یکدیگر تمیز داد. بنابراین تنها می توانیم بگوییم که یک ذره در نقطه $\mathbf{r}$ با اسپینِ α وجود دارد و یک ذره دیگر در نقطهٔ $\mathbf{r}'$ با اسپین β. بنابراین، تابع موج این دو ذره باید دارای این خاصیت باشد که مربع آن تحت جایگشت دو ذره تغییر نکند، به این معنا که

$$|\Psi_{\alpha,\beta}(r,r')|^2=|\Psi_{\beta,\alpha}(r',r)|^2. \tag{5}$$

باید دقت کنیم که این جایگشت، جایگشت بین دو ذره یعنی بین برچسب های آن هاست و نه فقط مکان آنها. به همین دلیل است که در توابع موج هردو طرف در رابطه فوق هنوز ذره ای که درمکان $\mathbf{r}$ است همچنان اسپین α و ذره ای که درمکان $\mathbf{r}'$ است همچنان اسپین β دارد، و تنها نکته ای که این تساوی می خواهد نشان دهد آن است که ما نمی دانیم که آیا آن ذره ای که در نقطه $\mathbf{r}$ قرار دارد و اسپین اش α است ذره ۱ است یا ذره ۲. برای تاکید براین نکته نامساوی زیر را می نویسیم تا نشان دهیم که تساوی تابع موج تحت جایگشت را به چه صورت می بایست نوشت و به چه صورت نمی بایست نوشت:

$$|\Psi_{\alpha,\beta}(r,r')|^2\neq|\Psi_{\alpha,\beta}(r',r)|^2. \tag{6}$$

در طرف چپ این رابطه ذره ای که در نقطه $\mathbf{r}$ است اسپین اش α است و درطرف راست ذره ای که در نقطه $\mathbf{r}$ است اسپین اش β است و تمیز ناپذیری ذرات هیچ چیزی در باره نسبت این دو تابع موج به ما نمی گوید.

با همان استدلالی که درباره توابع موج فضایی خالص انجام دادیم اکنون نیز می توانیم بنویسیم

$$\Psi_{\alpha,\beta}(r,r')=\pm\Psi_{\beta,\alpha}(r',r). \tag{7}$$

۱.۱ قضیه اسپین — آمار

حال مسئله این است که از علامت مثبت و منفی کدام یک را باید انتخاب کرد؟ پاسخ به این سوال درچارچوب مکانیک کوانتومی امکان پذیرنیست. پاسخِ این سوال درچارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی و یا نظریه کوانتومی میدانها که درآن ها لوازم تلفیق یک نظریه کوانتومی با نسبیت خاص مورد بررسی قرارمی گیرد، طی یک قضیه موسوم به قضیه اسپین — آمار یا

$Spin - Statistics$ داده می شود. بنابراین قضیه می بایست برای ذراتی که اسپین آنها صحیح است یعنی بوزون ها علامت مثبت و برای ذراتی که اسپین آنها نیمه صحیح است یعنی فرمیون ها علامت منفی را انتخاب کرد. بنابراین بنابراین تحت جایگشت ذرات تابع موج فرمیونها می بایست پاد متقارن و تابع موج بوزون ها می بایست متقارن باشد. آنچه که برای دو ذره گفتیم برای یک مجموعه N ذره ای نیز صحیح است به این معنا که

$$\Psi_{\alpha_{\sigma(1)},\alpha_{\sigma(2)},\cdots\alpha_{\sigma(N)}}(r_{\sigma(1)},r_{\sigma(2)})\cdots r_{\sigma(N)}) = (\pm)^{|\sigma|}\Psi_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_N}(r_1,r_2,\cdots r_N), \tag{8}$$

که درآن σ یک جایگشت دلخواه، $|\sigma|$ علامت آن جایگشت (0 برای جایگشت های زوج و 1 برای جایگشت های فرد) است. علامت مثبت برای بوزون ها و علامت منفی نیز برای فرمیون ها درنظر گرفته می شود.

به یک نکته می بایست توجه کنیم و آن اینکه اگر تابع موج به صورت ضرب یک تابع موج فضایی در یک تابع حالت اسپینی باشد، می توان تقارن یا پاد تقارن را روی این دو حالت به طور جداگانه اعمال کرد به طوریکه تابع موج کل تقارن یا پاد تقارن مورد نیاز را داشته باشد.

۲ ذرات یکسان درون جعبه

فرض کنید که دو ذره یکسان در یک چاه پتانسیل بی نهایت عمیق به پهنای L قرار دارند. برای سادگی نیز فرض می کنیم که این دو ذره با هم برهم کنش نمی کنند. دراین بخش می خواهیم ویژه حالت ها و ویژه انرژی این سیستم دو ذره‌ای را پیدا کنیم. بدلیل این که ذرات با هم برهم کنش ندارند ویژه توابع هامیلتونی حاصل ضرب ویژه توابع تک ذره ای و ویژه انرژی ها حاصل جمع انرژی تک ذرات است با این تفاوت که می بایست این توابع را بسته به فرمیون یا بوزون بودن ذرات کاملاً پاد متقارن یا کاملاً متقارن کرد. این کار را جداگانه برای هر حالت انجام می دهیم. درضمن از درس های مقدماتی می دانیم که توابع موج تک ذرات و انرژی آنها در این چاه پتانسیل عبارت اند از:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2}. \tag{9}$$

۱.۲ فرمیون ها

اگر این دو ذره فرمیون باشند، می بایست تابع موج کامل آنها کاملاً پاد متقارن باشد. منظور از تابع موج تابع موج فضایی و اسپینی است. برای سادگی اسپین ذرات را $1/2$ می گیریم. بنابراین ویژه حالت های این ذرات به ترتیب زیر خواهند بود:

$$\Psi^s(x_1,x_2) = A\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) + \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)\chi^s \tag{10}$$

و یا

$$\Psi^t(x_1,x_2) = A\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) - \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)\chi^t. \tag{11}$$

انرژی این حالت ها برابر است با

$$E_{n,m} = E_n + E_m. \tag{12}$$

در روابط بالا χ^s و χ^t به ترتیب حالت های اسپین دو ذره هستند:

$$\chi^s = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle), \tag{13}$$

و

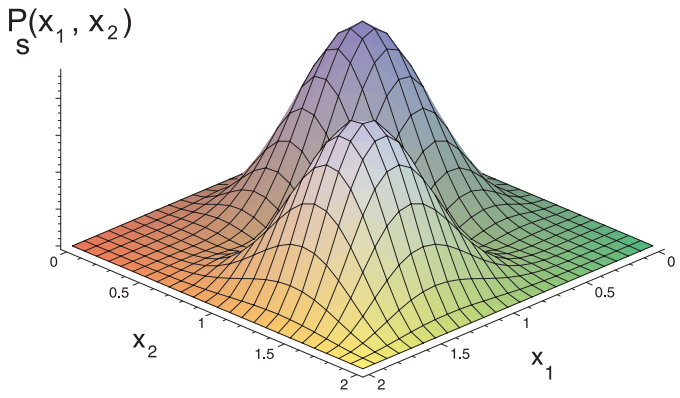
$$\chi^t = \begin{cases} |+,+\rangle, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle), \\ |-,-\rangle \end{cases} \tag{14}$$

چگالی احتمال اینکه یک ذره را در نقطه x_1 و دیگری را در نقطه‌ی x_2 پیدا کنیم دراین دو حالت برابر است با:

$$P^s(x_1,x_2) = A^2\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) + \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)^2 \tag{15}$$

$$P^t(x_1,x_2) = A^2\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) - \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)^2. \tag{16}$$

از رابطه های بالا می بینیم که هرگاه x_2 را به x_1 نزدیک کنیم، $P^t(x_1,x_2)$ به سمت صفر میل می کند و حال آنکه $P^s(x_1,x_2)$ به سمت دو برابر چگالی احتمال تک ذره ها میل می کند. معنای این حرف آن است که وقتی دو ذره در حالت $|+,+\rangle$ یا $|-,-\rangle$ هستند یعنی اسپین شان یکی است نمی توان آنها را در یک نقطه قرار داد. این همان بیان متعارف و غیردقیق از اصل طرد پاوولی است . بدین جهت لفظ غیر دقیق را به کار می بریم که حتی وقتی که دو ذره در حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)$ هستند، که اسپین شان با هم متفاوت است باز هم احتمال یافتن دو ذره در یک نقطه صفر است. این نکته یعنی کوچک شدن تابع چگالی احتمال را وقتی که دو ذره را به هم نزدیک می کنیم، می توان به زبان حسی تری نیز بیان کرد و آن اینکه دو ذره که اسپین شان یکی است یا اینکه در حالت $triplet$ هستند یک دیگر را دفع می کنند و اگر در حالت $singlet$ باشند یکدیگر را جذب می کنند. بنابراین مثل این است که این دوذره یک برهم کنش از نوع مغناطیسی بین اسپین هایشان برقرار است که واقعاً مغناطیسی نیست بلکه ناشی از اصل طرد پاوولی است. این نوع برهم کنش را برهم کنش تبادلی یا $ExchangeInteraction$ می گویند. این موضوع را می توان در شکل های ۲ و ۱ ببینیم.



شکل ۱: تابع $P^s(x_1, x_2)$، توزیع احتمال برای دو فرمیون که اسپین آنها در حالت منفرد است. دراین حالت به نظر می رسد که این دو ذره یک دیگر را جذب می‌کنند.

۲.۲ سطح‌فرمی

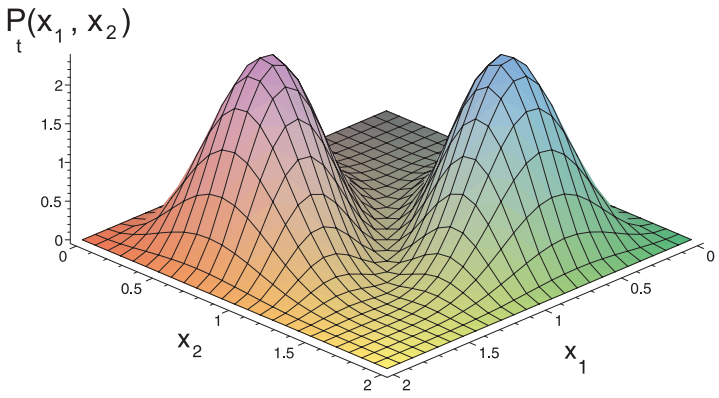
دراین بخش می خواهیم با یک مفهوم مهم یعنی سطح فرمی، که در فیزیک حالت جامد بارها به آن برمی خوریم، آشناشویم. برای سادگی چاه پتانسیل بی نهایت عمیق و یک بعدی با پهنای L را در نظر می گیریم. فرض کنید که تعدادی فرمیون اسپین $1/2$ را دراین چاه می ریزیم. این فرمیون ها با هم برهم کنش نمی کنند. از خود می پرسیم که حالت پایه این سیستم چیست؟ می دانیم که ویژه حالت های این سیستم، عبارت از حاصل ضرب حالت های تک ذره ای است به شرطی که به درستی پاد متقارن شده باشند. در حالت پایه می بایست مجموع انرژی این ذرات کمترین مقدار خود را دارا باشد. بنابراین اگر اصل طرد پاوولی برقرار نبود، همه ذرات به حالت $n = 1$ می رفتند، ولی بدلیل اصل طرد این حالت تنها دو ذره قبول می کند که می بایست اسپین آنها در خلاف جهت هم باشد. بنابراین ذرات دیگر دو به دو ترازهای بالاتر را اشغال می کنند. اگر $2N$ ذره داشته باشیم بالاترین ترازی که اشغال می شود، تراز N ام که انرژی اش برابر است با

$$E_N = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{N^2\pi^2}{L^2}. \tag{17}$$

این بالاترین تراز که در شکل ۳ نشان داده شده است سطح انرژی فرمی خوانده می شود و معمولاً با E_F نشان داده می شود. انرژی حالت پایه برابر است با:

$$E_{gs} = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2} = 2\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{N} n^2. \tag{18}$$

دراین حالت ساده می توان انرژی حالت پایه را به طور دقیق حساب کرد. از رابطه‌ی $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$



شکل ۲: تابع $P^t(x_1, x_2)$، توزیع احتمال برای دو فرمیون که اسپین آنها در حالت سه تایی است. دراین حالت به نظر می رسد که این دو ذره یک دیگر را دفع می‌کنند.

بدست می آوریم:

$$E_{gs} = \frac{\hbar^2}{12m}\frac{\pi^2}{L^2}N(N+1)(2N+1). \tag{19}$$

محاسبات فوق مربوط به یک چاه پتانسیل یک بعدی است. در یک چاه پتانسیل دوبعدی مربعی به ابعاد L انرژی ها به ترتیب زیرهستند:

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}(n_1^2 + n_2^2). \tag{20}$$

دراین حالت می توانیم سطح فرمی را با توجه به شکل ۴، به صورت زیر محاسبه کنیم. تعداد حالت هایی که انرژی آنها بین E و $E + dE$ هستند برابراست با:

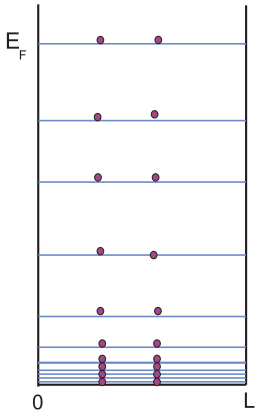
$$g(E)dE = 2 \times \frac{1}{4}d\pi R^2 \tag{21}$$

ضریب $1/2$ به خاطر اسپین ذرات آمده است.
که درآن R از رابطه زیر بدست می آید:

$$R^2 = \frac{2mEL^2}{\hbar^2\pi^2} \tag{22}$$

درنتیجه تعداد تراز هایی که انرژی آنها از یک مقدار معین مثل E کمتراست برابر است با:

$$N(E) = \int_0^E g(\epsilon)d\epsilon = \int_0^E \frac{1}{2}\pi\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}d\epsilon = \frac{1}{2}\pi\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}E. \tag{23}$$



شکل ۳: سطح فرمی برای یک چاه پتانسیل یک بعدی

سطح فرمی جایی است که تمام تراز هاتا زیر آن پر شده اند و تمام تراز های بالای آن خالی هستند. این وضعیت در واقع حالت پایه سیستم بس ذره‌ای را نشان می دهد. بنابراین اگر تعداد N داشته باشیم از رابطه بالا بدست می آوریم:

$$N = \frac{1}{2}\pi\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}E_F \tag{24}$$

و یا

$$E_F = \frac{\hbar^2\pi}{mL^2}N. \tag{25}$$

عبارت $\frac{N}{L^2}$ برابر با چگالی سطحی تعداد ذرات است. انرژی حالت پایه برابر می شود با:

$$E_{gs} = \int_0^{E_F} d\epsilon\epsilon g(\epsilon) = \int_0^{E_F} d\epsilon\epsilon\frac{1}{2}\pi\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2} = \frac{1}{2}\pi\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}\frac{1}{2}E_F^2, \tag{26}$$

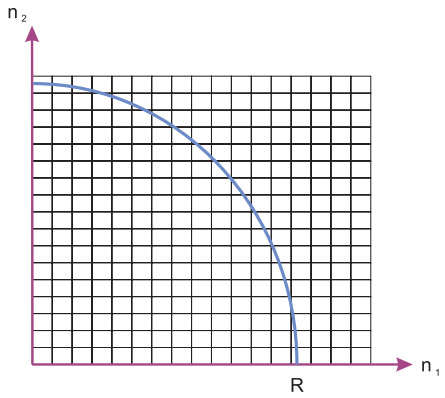
و یا پس از ساده کردن

$$E_{gs} = \frac{1}{2}NE_F. \tag{27}$$

خواننده می تواند محاسبات مربوطه را برای یک چاه پتانسیل دو بعدی انجام دهد.

به همین ترتیب می توان تکانه فرمی P_F را حساب کرد. تکانه فرمی در حقیقت تکانه‌ی ذراتی است که در سطح فرمی قرار دارند. دقت کنید که یک تراز انرژی فرمی ممکن است همزمان تکانه مشخصی نداشته باشد، منظور ما از تکانه یک ذره دراین حالت متوسط مقدار آن یا مرتبه آن است که در رژیم غیر نسیبیتی از رابطه‌ی ساده‌ی

$$P_F = \sqrt{2mE_F}$$



شکل ۴: سطح فرمی برای یک چاه پتانسیل یک بعدی

بدست می آید. هم چنین می توان از دمای فرمی سخن گفت که بنابر نظریه جنبشی یا مکانیک آماری از رابطه‌ی

$$E_F = \frac{3}{2}kT_F \tag{28}$$

بدست می آید که در آن d بعد سیستم است.

دقت کنید که حالت های برانگیخته حالت هایی هستند که در آن ذرات نزدیک سطح فرمی به تراز های بالا تر می روند و جای آنها خالی می شود.

اکنون از خود می پرسیم که تابع موج ذرات در حالت پایه چیست؟ برای سادگی خود را به چاه پتانسیل یک بعدی محدود می کنیم. برای شروع فرض کنید که تنها دو ذره در چاه وجود داشته باشند. یعنی $N = 2$، دراین صورت حالت پایه برابراست با:

$$\psi(x_1, x_2)\chi = A(\phi_1(x_1)\phi_1(x_2) + \phi_1(x_2)\phi_1(x_1))\chi^s, \tag{29}$$

اصطلاحاً می گوییم که دو ذره با اسپین های مخالف تراز پایه را اشغال کرده اند. ذرات دیگر می بایست حالت های بالاتر را اشغال کنند. بنابراین اگر سیستم ما بجای دو ذره چهار ذره داشته باشد، آنگاه حالت پایه وضعیتی است که دو ذره با اسپین های مخالف در تراز $n = 1$ و دو ذره دیگر بااسپین های مخالف در تراز $n = 2$ قرار می گیرند. نوشتن شکل کامل تابع موج در این حالت کمی دردسر دارد و مفید نیست. مثلاً این تابع چنین شکلی دارد:

$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = A(\phi_1(x_1)\phi_1(x_2) + \phi_1(x_2)\phi_1(x_1))\chi^s_{12} + (\phi_2(x_3)\phi_2(x_4) + \phi_2(x_3)\phi_2(x_4))\chi^s_{34} + \cdots \tag{30}$$

که درآن علامت $\cdots$ نشان دهنده این است که می بایست جایگشت های کافی با علامت های مناسب به عبارت اول اضافه شود تا تمیزناپذیری کامل ذرات تضمین شود، زیرا عبارت اول بیان کننده این است که دو ذره‌ی ۱ و ۲ که در تراز اول

قرار دارند از دو ذره ۳ و ۴ که در تراز دوم قرار دارند تمیز داده شده اند و حال آنکه این ممکن نیست. واضح است که وقتی تعداد ذرات بیشتر می شود نوشتن شکل صریح تابع موج حالت پایه و حالت های برانگیخته از این هم پیچیده تر می شود که درعین حال دارای اطلاع مفیدی هم نیست. برای ما تنها این مهم است که چه تعداد ذره در هر تراز قرار دارد. به عبارت بهتر پایه مناسب برای توصیف یک سیستم بس ذره‌ای آن است که بگوییم چه تعداد ذره در هرتراز انرژی قرار دارد. ما در فصل های آینده دو باره به سیستم های بس ذره‌ای باز می گردیم و پایه مناسب را که به آن پایه عدد اِشغال *Occupation Number Representation* می گویند، به تفصیل توضیح می دهیم.

۳.۲ بوزون ها

حال فرض کنید که این دو ذره بوزون باشند. برای سادگی می توانیم فرض کنیم که اسپین آنها صفراست. بنابر این تنها قسمت فضایی را کافی است در نظر بگیریم زیرا اسپین صفر یعنی اینکه ذره یک حالت اسپینی بیشتر ندارد و و همواره در این حالت یعنی $|0\rangle$ است. دراین حالت تنها می بایست تابع موج فضایی را متقارن کرد. بنابراین ویژه های این دو ذره به ترتیب زیر خواهند بود:

$$\Psi(x_1, x_2) = A\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) + \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right) \tag{31}$$

چگالی احتمال اینکه یک ذره را در نقطه x_1 و دیگری را در نقطه‌ی x_2 پیدا کنیم برای این دو ذره بوزون برابر است با:

$$P(x_1, x_2) = A^2\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) + \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)^2 \tag{32}$$

که نشان دهنده آن است که بوزون ها تمایل دارند به سمت هم نزدیک شوند. این هم درواقع یک نوع برهم کنش القاشده است که ناشی از اصل طرد پاوولی است. در مثالی که ذکر کردیم، اثر اسپین را نتوانستیم ببینیم زیرا اسپین هردو ذره را صفر گرفته بودیم. برای آنکه اثر اسپین را بهتر بفهمیم، اسپین هردو ذره را یک می گیریم. دراین صورت اسپین کل دو ذره می تواند مقادیرِ 0، 1 و یا 2 را اختیار کند. اگر حالت های اسپین یک ذره را به اختصار با $|1\rangle := |1,1\rangle$، $|0\rangle := |1,0\rangle$ و $|\overline{1}\rangle = |1,-1\rangle$ نمایش دهیم آنگاه از جمع تکانه زاویه ای می دانیم که حالت های اسپین ۲ و اسپین 0 حالت های متقارن و حالت های اسپین 1 پاد متقارن اند. درواقع داریم:

$$\chi^{(2)} = \begin{cases} |1,1\rangle, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,1\rangle), \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(|1,\overline{1}\rangle + 2|0,0\rangle + |\overline{1},1\rangle), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\overline{1},0\rangle + |0,\overline{1}\rangle), \\ |\overline{1},\overline{1}\rangle \end{cases} \tag{33}$$

،

$$\chi^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle - |0,1\rangle), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,\overline{1}\rangle - |\overline{1},1\rangle), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\overline{1},0\rangle + |0,\overline{1}\rangle), \end{cases} \tag{34}$$

و

$$\chi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,\overline{1}\rangle - |0,0\rangle + |\overline{1},1\rangle). \tag{35}$$

بنابراین ویژه حالت های انرژی برای دو بوزون در چاه پتانسیل به صورت زیرهستند: و حالت های

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)}(x_1,x_2) &= A\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) + \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)\chi^{(2)} \\ \Psi^{(1)}(x_1,x_2) &= A\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) - \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)\chi^{(1)} \\ \Psi^{(0)}(x_1,x_2) &= A\left(\phi_n(x_1)\phi_m(x_2) + \phi_n(x_2)\phi_m(x_1)\right)\chi^{(0)}. \end{aligned} \tag{36}$$

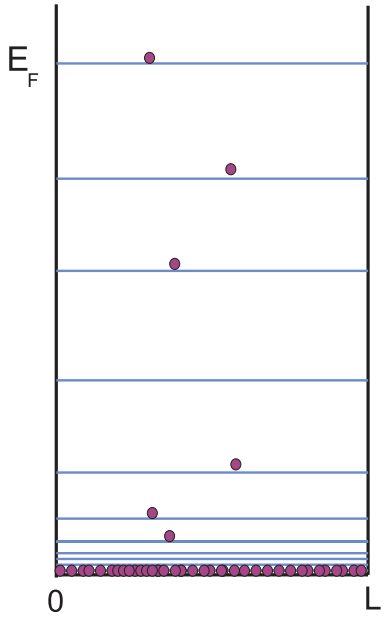
دراین جا دیده می شود که وقتی اسپین کل ۲ یا ۰ است ذرات تمایل به جذب هم و وقتی که اسپین کل برابر با یک است ذرات تمایل به دفع هم دارند. بنابراین همواره نمی توان گفت که برهم کنشی که توسط اصل طرد پاوولی بین اسپین ذرات القا می شود دافعه یا جاذبه است بلکه نوع این برهم کنش بستگی به بوزون بودن یا فرمیون بودن ذرات و هم چنین بستگی به اسپین کل دو ذره دارد.

۴.۲ چگالش بوز—اینشتین

برخلاف فرمیون ها که بیش از دوتای آنها نمی توانند یک تراز انرژی را اشغال کنند، برای بوزون ها هیچ محدودیتی در اشغال تراز های انرژی نیست. به همین جهت در یک گاز بوزونی ممکن است در دماهای خیلی پایین کسر قابل ملاحظه‌ای از کل ذرات به حالت پایه یک تک ذره بروند و آنرا اشغال کنند. دراین حالت می گوییم که این ذرات به حالت پایه چگالیده شده‌اند، شکل ۵، یا اصطلاحاُ چگالش بوز—اینشتین به وقوع پیوسته‌است. این پدیده آثار فیزیکی خیلی مهمی دارد، زیرا به این معناست که عددکوانتومی کسر قابل ملاحظه‌ای از کل ذرات و درنتیجه خواص آنها مثل تکانه و انرژی آنها باهم یکسان شده است. این پدیده به نوبه خود منشاء پدیده هایی مثل ابررسانایی فلزات در دماهای پایین و یا ابرشارگی هلیوم است.

۵.۲ چه موقع اصل طرد پاوولی مهم می شود؟

سوال مهمی که می بایست به آن پاسخ بدهیم آن است که چه موقع می بایست تمیزناپذیری ذرات را در نظر بگیریم و چه موقع می بایست از آن چشم پوشی کنیم. به عبارت دقیق تر، می توان پرسید که آیابرای مثلاً باریکه‌ای از الکترونها که در اشعه



شکل ۵: چگالش بوز—اینشتین.

کاتودی مشاهده می شود، بازهم باید اصل طرد پاوولی را در نظر گرفت یا خیر؟ برای یک گاز تک اتمی اکسیژن که همه ذرات گاز یکسان و یک شکل هستند، چطور؟ برای پاسخ دادن به این سوال می بایست به طول موج دوبروی ذرات یعنی λ از یک طرف و فاصله میانگین آنها یعنی l نگاه کرد. هرگاه $\lambda << l$ امکان همپوشانی توابع موج ذرات وجود ندارد و از لحاظ نظری ذرات از یک دیگر قابل تمیز هستند. اما هرگاه که $\lambda \approx l$ یا اینکه هرگاه $\lambda < l$ آنگاه توابع موج براحتی همپوشان می شوند و دیگر نمی توان آنها را از هم تمیز داد. طول موج دوبروی را سرعت ذرات و در نتیجه دما تعیین می کند. به عبارت بهتر داریم:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx \frac{h}{\sqrt{mkT}} \tag{37}$$

و حال آنکه l توسط چگالی ذرات تعیین می شود،

$$l^3 = \frac{N}{V} = n \longrightarrow l = n^{\frac{1}{3}} \tag{38}$$

بنابراین شرط آنکه تمیزناپذیری ذرات را در نظر بگیریم آن است که دما به اندازه کافی پایین و چگالی آ نقدر بالا باشد، که شرط زیر برآورده شود:

$$n^{1/3} \approx \frac{h}{mkT}. \tag{39}$$

۳ فضای هیلبرت بوزونی و فرمیونی

دراین آخرین بخش می خواهیم ساختار فضای هیلبرت را برای دو ذره یکسان بیشتر بررسی کنیم. در درس های نخستین دیدیم که هرگاه فضای هیلبرت یک ذره را با V نشان دهیم فضای هیلبرت مربوط به دو ذره ضرب تانسوری دو فضای تک

ذره ای یعنی $V \otimes V$ است. هرگاه بردارهای پایه فضای V را با $|e_\mu\rangle$ نشان دهیم، بردارهای پایه فضای $V \otimes V$ عبارتند از $|e_m, e_n\rangle := |e_m\rangle \otimes |e_n\rangle$. خواص تعامد و کامل بودن این بردارهای پایه به شکل زیراست:

$$\langle e_m, e_n | e_{m'}, e_{n'} \rangle = \delta_{m,m'}\delta_{n,n'} \tag{40}$$

و

$$\sum_{m,n} |e_m, e_n\rangle\langle e_m, e_n| = I_{V\otimes V}. \tag{41}$$

دقت کنید که دراینجا اندیس m را به عنوان کلی ترین اندیسی که بردارهای پایه را مشخص می کند، به کار برده ایم. این اندیس می تواند پیوسته یا گسسته و یا ترکیبی از هردو باشد. در نتیجه نمادِ $\delta_{m,m'}$ و یا علامت $\sum_m$ درهر مورد تعبیر مناسب خود را دارد. مثلاً برای یک دوذره‌ی اسپین $1/2$ داریم:

$$|e_m\rangle \longrightarrow |x, \alpha\rangle, \quad \alpha = \pm. \tag{42}$$

که دراین صورت روابط تعامد و کامل بودن به شکل زیرخواهند بود:

$$\langle x, \alpha | x', \alpha' \rangle = \delta(x - x')\delta_{\alpha,\alpha'}, \tag{43}$$

و

$$\int dx \sum_\alpha |x, \alpha\rangle\langle x, \alpha| = I_V \tag{44}$$

وقتی که فضای هیلبرت دو ذره را به این گونه در نظر می گیریم، به طور ضمنی پذیرفته‌ایم که با دو ذره تمیزپذیر سر و کار داریم. سوالی که در اینجا پیش می آید این است که فضای هیلبرت دو ذره تمیز ناپذیر به چه صورت می بایست تعریف شود و بردارهای پایه چنین فضایی چیست؟ آنچه که در مورد متقارن کردن تابع موج ذرات در ابتدای این درس گفتیم راهنمای ما برای یافتن پاسخ صحیحِ این سوال است. در فضای $V \otimes V$ عملگر جایگشت، عملگری مثلِ $\mathcal{P}$ است که به صورت زیر عمل می کند:

$$\mathcal{P}|u, v\rangle = |v, u\rangle. \tag{45}$$

بدیهی است که $\mathcal{P}^2 = I$. بنابراین ویژه مقدارهای $\mathcal{P}$ برابر با 1 یا $1-$ هستند. ویژه فضای مربوط به مقدارِ ۱ را فضای هیلبرت متقارن و ویژه فضای مربوط به مقدارِ ۱− را فضای هیلبرت پاد متقارن می گوییم و این دو زیر فضارا به ترتیب با $(V \otimes V)_+$ و $(V \otimes V)_-$ نشان می دهیم. می توانیم هر دو فضا را به شکل $(V \otimes V)_\xi$ بنویسیم که درآن $\xi = \pm$. از عملگر $\mathcal{P}$ می توان دو عملگر تصویرگر به صورت زیر ساخت:

$$\Pi_+ := \frac{1}{2}(I + \mathcal{P}), \qquad \Pi_- := \frac{1}{2}(I - \mathcal{P}). \tag{46}$$

یا بطور خلاصه $\Pi_\xi = \frac{1}{2}(I + \xi P)$.

خواننده براحتی می تواند خواص زیر را تحقیق کند:

$$\Pi_\pm^2 = \Pi_\pm, \qquad \Pi_+\Pi_- = \Pi_-\Pi_+ = 0, \qquad \Pi_+ + \Pi_- = I. \tag{47}$$

از رابطه آخر معلوم می شود که

$$V \otimes V = (V \otimes V)_+ \oplus (V \otimes V)_- \tag{48}$$

هرگاه دو ذره بوزون باشند، فضای هیلبرت آنها را $(V \otimes V)_+$ و هرگاه فرمیون باشند، فضای هیلبرت آنها را $(V \otimes V)_-$ می گیریم. یک مجموعه بردارهای پایه برای $(V \otimes V)_+$ با اثر عملگرِ Π_+ روی بردارهای پایه $V \otimes V$ بدست می آید. هم چنین یک مجموعه بردارهای پایه برای $(V \otimes V)_-$ با اثر عملگرِ Π_- روی بردارهای پایه $V \otimes V$ بدست می آید:

$$|e_m, e_n\rangle_\xi = \frac{1}{2}(I + \xi P)|e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2}(|e_m, e_n\rangle + \xi|e_n, e_m\rangle). \tag{49}$$

$$|e_m, e_n\rangle_\xi = \frac{1}{2}(I + \xi P)|e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2}(|e_m, e_n\rangle + \xi|e_n, e_m\rangle). \tag{50}$$

رابطه تعامد هردو نوع پایه به شکل زیراست:

$${}_\xi\langle e_m, e_n|e_{m'}, e'_n\rangle_\xi = \frac{1}{2}(\langle e_m, e_n|(I + \xi P)|e_{m'}, e_{n'}\rangle = \frac{1}{2}(\delta_{m,m'}\delta_{n,n'} + \xi\delta_{m,n'}\delta_{n,m'}). \tag{51}$$

و رابطه کامل بودن آنها نیز عبارت است از:

$$\sum_{m,n} |e_m, e_n\rangle_\xi\langle e_m, e_n| = \sum_{m,n} \frac{1}{4}((I + \xi P)|e_m, e_n\rangle\langle e_m, e_n|(I + P)) = \frac{1}{2}(I + \xi P) = I_{(V\otimes V)_\xi}. \tag{52}$$

به این ترتیب ساختار فضای هیلبرت برای دو ذره بوزون یکسان یا دو ذره فرمیون یکسان را مشخص کردیم. وقتی که با مجموعه بزرگ تری از ذرات سرو کار داریم، این نوع نگرش به فضای هیلبرت مناسب نخواهد بود. در درس های آینده ساختار مناسب تری را برای فضای هیلبرت ذرات یکسان معرفی خواهیم کرد.