درس نوزدهم: اتم هلیوم

۱ مقدمه

دراین درس ساده ترین اتم بعد از هیدروژن یعنی اتم هلیوم را مطالعه می کنیم. برای این اتم و دیگر اتم ها نمی توان معادله شرودینگر را به طور دقیق حل کرد و می بایست از مجموعه ای از روش های اختلالی برای تعیین طیف آنها کمک گرفت.

۲ روش های تقریبی برای یافتن طیف اتم هلیوم

هامیلتونی اتم هلیوم درساده ترین شکل خود (یعنی وقتی که از جفتیدگی های اسپین – مدار، آثارنسبیتی و نظایر آن صرف نظر کنیم) به شکل زیراست:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} = H_0 + H_1. \quad (1)$$

دراین هامیلتونی جمله برهم کنش دوالکترون را به صورت اختلال درنظر می گیریم و سعی می کنیم ترازهای پایین اتم هلیوم را به طورتقریبی بدست بیاوریم. نخست بهتراست که طیف هامیلتونی H_0 را مطالعه کنیم که چیزی نیست جز مجموع دو هامیلتونی برای اتم های هیدروژن گونه با عدد اتمی $Z = 2$. اگر از اسپین صرف نظر کنیم، ویژه حالت های این هامیلتونی با ٦ عدد کوانتومی مشخص می شوند و می توان آنها را به شکل زیر نوشت:

$$\Psi_{n,l,m}(r_1, r_2) = \psi_{n_1,l_1,m_1}(r_1)\psi_{n_2,l_2,m_2}(r_2), \quad (2)$$

که درآن $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$، $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ و $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$. انرژی چنین حالتی برابراست با

$$E_n = E_{n_1} + E_{n_2} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2})(Z\alpha)^2 mc^2. \quad (3)$$

چنانکه می دانیم الکترون ها فرمیون هستند و بنابراصل طرد پاوولی تابع موج کل دوالکترون می بایست نسبت به جایگشت آنها پاد متقارن باشد. بنابراین وقتی که اسپین الکترون ها را درنظر می گیریم می بایست توابع موج بالا را با توابع موج زیر جایگزین کرد:

$$\Psi^s_{n,l,m}(r_1,r_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{n_1,l_1,m_1}(r_1)\psi_{n_2,l_2,m_2}(r_2)+\psi_{n_1,l_1,m_1}(r_2)\psi_{n_2,l_2,m_2}(r_1)\right)\chi_{singlet}, \tag{4}$$

و

$$\Psi^t_{n,l,m}(r_1,r_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{n_1,l_1,m_1}(r_1)\psi_{n_2,l_2,m_2}(r_2-\psi_{n_1,l_1,m_1}(r_2)\psi_{n_2,l_2,m_2}(r_1)\right)\chi_{triplet}, \tag{5}$$

که درآن

$$\chi_{singlet}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle-|-,+\rangle), \tag{6}$$

و

$$\chi_{triplet}=\begin{cases}|+,+\rangle,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle+|-,+\rangle),\\ |-,-\rangle\end{cases} \tag{7}$$

توابع حالت در فضای اسپین هستند.
حالت Ψ^s حالتی است که تابع موج فضایی در آن متقارن و تابع موج اسپینی پاد متقارن است و حالت Ψ^t حالتی است که درآن تابع موج فضایی پاد متقارن و تابع موج اسپینی متقارن است.
هرکدام ازاین حالت ها یک واگنی چهارگانه دارند که توسط تکانه زاویه ای l و m مشخص می شود.
بنابراین هر ویژه حالت انرژی H_0 یگ واگنی هشت گانه دارد. انرژی تمام این حالت ها یکسان و برابر است با :

$$E_n=E_{n_1}+E_{n_2}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2})(Z\alpha)^2mc^2. \tag{8}$$

به این ترتیب حالت پایه H_0 حالت زیر خواهد بود:

$$\phi^s_0=\psi_{1,0,0}(r_1)\psi_{1,0,0}(r_2)\chi_{singlet}=\psi_{1,0,0}(r_1)\psi_{1,0,0}(r_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle-|-,+\rangle). \tag{9}$$

دراین حالت تابع ϕ^t_0 وجود ندارد.

انرژی این حالت برابر است با:

$$E_0 = \frac{-1}{2}mc^2(Z\alpha)^2 - \frac{-1}{2}mc^2(Z\alpha)^2 = -8 \times 13.6\ ev = -108.8\ \ ev. \tag{10}$$

اولین حالت برانگیخته وقتی درست می شود که یکی از الکترون ها در حالت $n = 1$ و دیگری در حالت $n = 2$ باشد . ویژه حالت های انرژی دراین حالت برابرند با:

$$\phi_1^s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,0,0}(r_1)\psi_{2,l,m}(r_2) + \psi_{2,l,m}(r_1)\psi_{1,0,0}(r_2)\right)\chi_{singlet}, \tag{11}$$

و

$$\phi_1^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,0,0}(r_1)\psi_{2,l,m}(r_2) - \psi_{2,l,m}(r_1)\psi_{1,0,0}(r_2)\right)\chi_{triplet}, \tag{12}$$

که انرژی تمام آنها برابراست با:

$$E_1 = \frac{-1}{2}mc^2(Z\alpha)^2 - \frac{-1}{2}mc^2(\frac{1}{4})(Z\alpha)^2 = -5 \times 13.6\ ev = -68\ \ ev. \tag{13}$$

۱.۲ بدست آوردن انرژی حالت پایه به روش اختلال

حال می توانیم جمله برهم کنش بین دو الکترون را به صورت یک جمله اختلالی درنظرگرفته و تصحیح انرژی حالت پایه را درمرتبه اول حساب کنیم. مطابق با روش اختلال می دانیم که این تصحیح به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\Delta E_0 = \langle\phi_0|H_1|\phi_0\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 \psi_{1,0,0}^2(r_1)\psi_{1,0,0}^2(r_2)\frac{e^2}{|r_1 - r_2|} \tag{14}$$

قبل ازمحاسبه این عبارت به تعبیر فیزیکی آن توجه می کنیم. می توان طرف راست را به شکل زیر نوشت:

$$\Delta E_0 = \int d^3r_1 d^3r_2 \rho(r_1)\frac{1}{|r_1 - r_2|}\rho(r_2) = \int d^3r \rho(r)V(r), \tag{15}$$

که درآن $\rho(\mathbf{r}) = e|\phi(\mathbf{r})|^2$ چگالی بار الکترون در نقطه $\mathbf{r}$ است و $V(\mathbf{r})$ پتانسیل ای است که یک الکترون در مکان نقطه $\mathbf{r}$ ایجاد می کند.

حال به محاسبه طرف راست می پردازیم. می دانیم که

$$\psi_{1,0,0}(r) = Ae^{-\frac{Zr}{a_0}}, \tag{16}$$

که درآن

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{Z_0}{a})^{\frac{3}{2}}. \tag{17}$$

بنابراین

$$\Delta E_0 = A^2 \int d^3r_1 d^3r_2 e^{\frac{-2Zr_1}{a_0}} e^{\frac{-2Zr_2}{a_0}} \frac{e^2}{|r_1 - r_2|}. \tag{18}$$

برای محاسبه انتگرال روی $\mathbf{r}_2$، محور های مختصات را طوری درنظرمی گیریم که محور $\mathbf{z}$ روی بردار $\mathbf{r}_1$ که درمحاسبه این انتگرال ثابت فرض می شود، منطبق شود. دراین حالت خواهیم داشت

$$|r_1 - r_2| = \left(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2\right)^{1/2} \tag{19}$$

ودرنتیجه

$$\Delta E_0 = A^2 \int d^3r_1 e^{\frac{-2Zr_1}{a_0}} \int r_2^2 dr_2 e^{\frac{-2Zr_2}{a_0}} \int d\Omega_2 \frac{e^2}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta_2}. \tag{20}$$

اما انتگرال روی $\cos\theta_2$ براحتی قابل محاسبه است: یک محاسبه ساده نشان می دهد که

$$\int d\Omega_2 \frac{1}{|r_1 - r_2|} = \frac{4\pi}{r_>}, \tag{21}$$

که درآن $r_>$ یعنی اندازه بردارِبزرگتر دربین بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$.

بنابراین بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= e^2 A^2 (4\pi)^2 \int dr_1 r_1^2 r_2^2 dr_2 e^{-\frac{2Zr_1}{a_0}} e^{-\frac{2Zr_2}{a_0}} \frac{1}{r_>} \\ &= (4\pi e A)^2 \int_0^\infty r_1^2 dr_1 e^{-2\frac{Zr_1}{a_0}} \left[\int_0^{r_1} r_2 dr_2 e^{-2Zr_2/a_0} + \int_{r_1}^\infty \frac{r_2^2}{r_1} dr_2 e^{-2Zr_2/a_0}\right] \end{aligned} \tag{22}$$

محاسبه انتگرال های فوق دیگر کارساده ای است. پس ازجایگذاری مقدار A و مرتب کردن حاصل انتگرال بدست می آوریم

$$\Delta E_0 = \frac{5}{8}\frac{Ze^2}{a_0} = \frac{5}{4}Z(\frac{1}{2}mc^2\alpha^2). \tag{23}$$

برای هلیوم $(Z = 2)$ این مقدار برابرخواهد بود با

$$\Delta E_0 \approx 34\ ev. \tag{24}$$

با افزودن این تصحیح به انرژی حالت پایه H_0 بدست می آوریم که

$$E_0 \approx -108.8 + 34 = -74.8\ ev. \tag{25}$$

مقدارتجربی برابراست با:

$$E_{exp} \approx -78.975\ ev. \tag{26}$$

بنابراین توانسته ایم با تصحیح مرتبه اول تطابق بسیارخوبی بین مقدار نظری و تجربی انرژی حالت پایه دست آوریم.

۲.۲ استفاده از روش وردشی برای تصحیح/انرژی حالت پایه

دراین بخش از روش وردشی استفاده می کنیم و حد بالایی برای انرژی حالت پایه بدست می آوریم. برای این کار از یک تابع موج فیزیکی استفاده می کنیم که معنای فیزیکی روشنی نیز دارد. می توانیم استدلال کنیم که هرکدام از الکترون ها درغیاب الکترون دیگر تنها یک هسته با بار Z می بیند واثر الکترون دیگر که درفضای اتم گردش می کند، آن است که به طور متوسط قسمتی از این بار را از نظر الکترون مورد نظر ما می پوشاند و باعث می شود که آن الکترون بار موثری به اندازه Z^* که از Z کمتراست ببیند.
بااین استدلال می توانیم یک تابع موج آزمایشی به صورت زیر درنظر بگیریم:

$$\Psi(r_1, r_2) = \phi(r_1)\phi(r_2) \tag{27}$$

که درآن $\phi_{1,0,0}(r)$ تابع موج حالت پایه برای یک اتم هیدروژن گونه است که بار هسته آن برابراست با Z^*. به عبارت دیگر $\phi_{1,0,0}$ درمعادله زیر صدق می کند:

$$H^*\phi = (\frac{P^2}{2m} - \frac{Z^*e^2}{r})\phi(r) = E_0^*\phi(r) \tag{28}$$

که درآن

$$E_0^* = -\frac{1}{2}(Z^*\alpha)^2\ mc^2 = -\frac{(Z^*e)^2}{2a_0}. \tag{29}$$

حال متوسط تابع $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$ را برای این تابع آزمایشی حساب کرده و مقدارآن را به عنوان تابعی از متغیر Z^* کمینه می کنیم. این کار هم یک حد بالای انرژی بدست می دهد و هم به یک معنا مقداری برای بار موثر هسته که هرکدام از الکترون ها حس می کنند بدست می دهد. داریم

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 \phi^*(r_1)\phi^*(r_2)\left(\frac{P_1^2}{2m}+\frac{P_2^2}{2m}-\frac{Ze^2}{r_1}-\frac{Ze^2}{r_2}+\frac{e^2}{|r_1-r_2|}\right)\phi(r_1)\phi(r_2) \tag{30}$$

برای محاسبه طرف راست واقعاً نیازی به محاسبه دو باره انتگرال ها نداریم زیرا می توانیم هامیلتونی را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_1^2}{2m}-\frac{Z^*e^2}{r_1}+\frac{P_2^2}{2m}-\frac{Z^*e^2}{r_2}+\frac{(Z^*-Z)e^2}{r_1}+\frac{(Z^*-Z)e^2}{r_2}+\frac{e^2}{|r_1-r_2|} \\ &= H_1^*+H_2^*+\frac{(Z^*-Z)e^2}{r_1}+\frac{(Z^*-Z)e^2}{r_2}+\frac{e^2}{|r_1-r_2|}. \end{aligned} \tag{31}$$

بنابراین با توجه به بهنجار بودن هرکدام از توابع ϕ_1 و ϕ_2 خواهیم داشت:

$$\langle\Psi|H\Psi\rangle = 2E_0^* + 2(Z^*-Z)e^2\langle\frac{1}{r}\rangle + \langle\frac{e^2}{|r_1-r_2|}\rangle. \tag{32}$$

که درآن می بایست برای عبارت $\langle\frac{1}{r}\rangle$ مقدارآن را از درس مربوط به اتم هیدروژن قرار دهیم و عبارت $\langle\frac{e^2}{|r_1-r_2|}\rangle$ را در بخش قبلی حساب کرده ایم. داریم

$$\langle\frac{1}{r}\rangle = \frac{1}{a_0} \tag{33}$$

و

$$\langle\frac{e^2}{|r_1-r_2|}\rangle = \frac{5}{8}\frac{Ze^2}{a_0}. \tag{34}$$

با جایگذاری این مقادیر در طرف راست $\langle H\rangle$ و مرتب کردن آن بدست می آوریم

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = -\frac{e^2}{2a_0}\left[-2Z^{*2}+4Z^*Z-\frac{5}{4}Z^*\right]. \tag{35}$$

مطابق با اصل وردشی این عبارت برای هر مقدارِ Z^* از انرژی حالت پایه بیشتراست. بنابراین می توانیم بهترین حد بالا برای انرژی را با کمینه کردن این عبارت برحسب Z^* بدست آوریم. با محاسبه مشتق این عبارت بدست می آوریم که مقدار کمینه آن در نقطه $Z^* = Z - \frac{5}{16}$ قرار دارد و برابراست با

$$\langle H\rangle_{min} = -2\times\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2(Z-\frac{5}{16})^2. \tag{36}$$

این نتیجه را می توان به این شکل تعبیر کرد که یک الکترون باعث کاهش بارالکتریکی هسته از Z به مقدار موثر $Z-\frac{5}{16}$ شود. عبارت بالا برای $Z=2$ برابر می شود با -77.38 الکترون ولت که با مقدار دقیق -79.975 الکترون ولت تفاوت بازهم کمتری نسبت به آنچه که از طریق روش اختلال بدست آوردیم دارد.
یادآوری می کنیم که تطابق خیلی خوبی که با مقدار دقیق بدست آورده ایم تنها ناشی از به کاربردن یک تابع موج آزمایشی با یک پارامتر آزاد بوده است. می توان با استفاده از توابع موج آزمایشی با تعداد بیشتری پارامترهای آزاد بازهم نتایج بهتری بدست آورد.

۳ تصحیح انرژی حالت های برانگیخته

اولین سری از حالت های برانگیختهٔ اتم هلیوم برای اعداد کوانتومی $\{(1,n)\}=\{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\cdots\}$ بدست می آید. دراین بخش می خواهیم با استفاده از روش اختلال، تصحیح انرژی این حالت ها را بدست آوریم. دیدیم که تابع موج هرکدام ازاین حالت ها به یکی از دوشکل زیراست:

$$\Psi^s(r_1,r_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,0,0}(r_1)\psi_{n,l,m}(r_2)+\psi_{1,0,0}(r_2)\psi_{n,l,m}(r_1)\right)\chi_{singlet}, \tag{37}$$

و

$$\Psi^t(r_1,r_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{1,0,0}(r_1)\psi_{n,l,m}(r_2-\psi_{1,0,0}(r_2)\psi_{n,l,m}(r_1)\right)\chi_{triplet}. \tag{38}$$

دراین جا نیز واگنی وجود دارد و در وهله اول به نظر می رسد که محاسبه تصحیح انرژی کار مشکلی است. ولی خوشبختانه پتانسیل اختلال در پایه این ویژه حالت ها قطری است و کافی است که برای بدست آوردن تصحیح انرژی عناصر روی قطر را حساب کنیم. پتانسیل اختلال برابر است با: $\frac{e^2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$.. نخستین سوالی که با آن مواجه هستیم این است که آیا این عملگر در پایه فوق قطری است یاخیر؟ قبل از هر نوع محاسبه ای می دانیم که بدلیل متعامد بودن بردارهای حالت منفرد و سه گانهٔ اسپین بریکدیگر این عملگر درپایه فوق بلوکه قطری است. یعنی اینکه

$$\langle\Psi^t|\frac{e^2}{|r_1-r_2|}|\Psi^s\rangle=0. \tag{39}$$

حال دقت می کنیم که عملگر $\frac{1}{|r_1-r_2|}$ درفضای دو ذره یک عملگر اسکالراست یعنی با تمام مولفه های تکانه زاویه ای کل جابجا می شود. باید تاکید کنیم که این عملگر درفضای یک ذره یک اسکالر نیست و به همین دلیل هم با مولفه های تکانه زاویه ای مربوط به یک ذره جابجا نمی شود. این امر ممکن است ما را به این نتیجه برساند که این عملگر در پایه فوق قطری نیست زیرا اعداد کوانتومی l,m مربوط به تکانه یک ذره هستند، ولی با کمی تامل این نگرانی رفع می شود زیرا ذره دیگر در حالتی است که تکانه زاویه ای آن کاملاً صفراست و درنتیجه تکانه زاویه ای یک ذره همان تکانه زاویه ای کل است و اعداد

کوانتومی $l,\ m$ نشان دهنده تکانه زاویه ای کل نیز هستند. ضمناً به دلیل این که هامیلتونی کل هنوز تقارن دورانی دارد تصحیح انرژی بستگی به عدد کوانتومی m نخواهد داشت. بنابراین بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{n,l}^{(s,t)} &= \langle \Psi_{n,l,m}^{(s,t)} | \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} | \Psi_{n,l,m}^{(s,t)} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} \left[\psi_{1,0,0}(r_1) \psi_{n,l,m}(r_2) \pm \psi_{1,0,0}(r_2) \psi_{n,l,m}(r_1) \right]^2 \\
&= \int \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} |\psi_{1,0,0}(r_1)|^2 |\psi_{n,l,m}(r_2)|^2 \pm \int \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} \psi_{1,0,0}^*(r_1) \psi_{1,0,0}(r_2) \psi_{n,l,m}^*(r_1) \psi_{n,l,m}^*(r_2) \\
&= J_{n,l} \pm K_{n,l}
\end{aligned} \tag{40}$$

انتگرال های مربوطه را می توان به طریق تحلیلی حساب کرد اگر چه ما این کار را دراینجا انجام نخواهیم داد. آنچه که به آن توجه خواهیم کرد آن است که این انتگرال ها مثبت هستند و هم چنین درقید زیر صدق می کنند:

$$0 \leq K_{n,l} \leq J_{n,l} \tag{41}$$

بنابراین بدست می آوریم

$$\Delta E_{n,l}^{s} = J_{n,l} + K_{n,l}, \tag{42}$$

و

$$\Delta E_{n,l}^{t} = J_{n,l} - K_{n,l}. \tag{43}$$

این روابط نشان می دهند که تصحیح انرژی برای هردو نوع حالت مثبت است که طبیعی است زیرا این تصحیح ناشی از نیروی دافعه الکترون هاست، ثانیاً تصحیح انرژی حالت Ψ^s از تصحیح انرژی حالت های Ψ^t بیشتراست. این نتیجه نیز طبیعی است زیرا در حالت Ψ^s تابع موج فضایی متقارن است و احتمال اینکه الکترون ها به نزدیکی یکدیگر بیایند بیشتراست ، درنتیجه انرژی دافعه آنها بیشترازوقتی است که درحالت پادمتقارنِ Ψ^t قرار دارند.
جمله $J_{n,l}$ تعبیر روشنی دارد و نشان دهنده انرژی دافعه دو الکترون با یکدیگر است . جمله دوم ناشی از اصل طرد پاوولی و متقارن کردن یا پاد متقارن کردن تابع موج فضایی است و هیچ تعبیر کلاسیکی ندارد. این جمله به جمله تبادلی یا $Exchange\ Term$ معروف است. می توان به یک معنا آن را برهم کنش ناشی از اسپین الکترون ها درنظرگرفت اگرچه این برهم کنش ناشی از گشتاور مغناطیسی الکترون ها نیست و فقط ناشی از فرمیون بودن الکترون ها و اصل طرد پاوولی است. برای آنکه بستگی این برهم کنش را به اسپین نشان دهیم می توانیم راه زیر را طی کنیم. قرار می دهیم

$$\Delta E_{n,l} = J_{n,l} + \alpha K_{n,l} \tag{44}$$

که درآن α عددی است که برای حالت منفرد یا $S(S+1)=0$ برابراست با 1 و برای حالت ِسه گانه یا $S(S+1)=2$ برابراست با -1. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\alpha = 1 - 2S(S+1). \tag{45}$$

از طرفی می دانیم که

$$S(S+1) = (s_1+s_2)^2 = \frac{3}{4}+\frac{3}{4}+2s_1\cdot s_2 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sigma_1\cdot\sigma_2. \tag{46}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\alpha = -\frac{1}{2}(1+\sigma_1\cdot\sigma_2), \tag{47}$$

و در نتیجه

$$\Delta E_{n,l} = J_{n,l} - \frac{1}{2}(1+\sigma_1\cdot\sigma_2)K_{n,l}. \tag{48}$$

به این ترتیب می بینیم که تصحیح انرژی به صورت یک ضریب منفی در جمله برهم کنش دواسپین نوشته شده است. این جمله عیناً مثل جمله هامیلتونی برهم کنش مغناطیسی دواسپین است با این تفاوت که منشأ آن اصل طرد پاوولی است و از نظر مرتبه نیز از برهم کنش مغناطیسی بین اسپین دوالکترون بسیار قوی تراست. درواقع انرژی برهم کنش مغناطیسی اسپین دو الکترون که در فاصله ای از مرتبه ابعاداتمی ازهم قرارگرفته اند از مرتبه زیراست:

$$E_{mag} \sim \frac{\mu_1\cdot\mu_2}{r^3} \sim \frac{1}{a_0^3}(\frac{e}{mc})^2 s_1\cdot s_2 \sim \frac{1}{a_0^3}(\frac{e}{mc})^2\hbar^2 \tag{49}$$

و برهم کنش تبادلی دوالکترون از مرتبه زیراست:

$$E_{exchange} \sim e^2\frac{1}{a_0} \tag{50}$$

که درآن a_0 شعاع بوهراست. باتوجه به اینکه $a_0 = \frac{1}{\alpha}\frac{\hbar}{mc}$ بدست می آوریم که

$$E_{exchange} \sim \alpha^{-2}E_{mag} \sim (137)^2 E_{mag}, \tag{51}$$

که نشان می دهد انرژی تبادلی بین ده تا صد هزار بار از انرژی برهم کنش مغناطیسی دوالکترون بیشتراست. این موضوع که در مواد فرومغناطیسی اسپین ها چگونه با برهم کنش مغناطیسی ضعیف شان می توانند بایکدیگر برهم کنش کرده ویک نظم

بلند برد و مغناطش خود بخود بوجود آورند تا مدتها به عنوان یک معما در فیزیک کوانتومی و فیزیک حالت جامد باقی مانده بود تااینکه ورنر هایزنبرگ توضیح فوق را مبنی بر برهم کنش تبادلی الکترون ها برای انرژی زیاد برهم کنش بین اسپین ها درمواد فرومغناطیس ارایه کرد.