درس سیزدهم : جمع اندازه حرکت زاویه ای

۱ مقدمه

فرض کنید که یک ذره اندازه حرکت خطی $\vec{p}_1$ و ذره دیگر اندازه حرکت خطیِ $\vec{p}_2$ دارد. می پرسیم اندازه حرکت خطی کل برای این دوذره چقدراست ؟ پاسخ این سوال درمکانیک کلاسیک ساده است. اندازه حرکت کل جمع برداری اندازه حرکت های تک تک ذرات است یعنی $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. حال سعی می کنیم درچارچوب مکانیک کوانتومی به این سوال پاسخ دهیم. تاکنون ما به مشاهده پذیرهای یک ذره مثل تکانه یا مکان عملگرهای هرمیتی نسبت داده ایم. برای این کارازاصل تناظردیراک استفاده کرده ایم و تقاضاکرده ایم که این عملگرها دررابطه $[X, P] = i\hbar$ صدق کنند. حال می خواهیم به تکانه هاو مکان های دو یا چند ذره عملگرهای هرمیتی نسبت دهیم. برای سادگی خود را به یک بعد و دو ذره محدود می کنیم. تعمیم نتایج به چند ذره و ابعاد دلخواه ساده خواهد بود. مکان این ذرات را با x_1 و x_2 و تکانه های آنها را با p_1 و p_2 نشان می دهیم. ازآنجا که درمکانیک کلاسیک روابط زیربرقرارهستند

$$\begin{aligned} &\{x_1, x_2\} = \{p_1, p_2\} = \{x_1, p_2\} = \{x_2, p_1\} = 0 \\ &\{x_1, p_1\} = \{x_2, p_2\} = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

عملگرهایی که به این مشاهده پذیرها نسبت می دهیم می بایست درروابط زیرصدق کنند:

$$\begin{aligned} &[X_1, X_2] = [P_1, P_2] = [X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0 \\ &[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar. \end{aligned} \tag{2}$$

یک بارکه عملگرهای X و P را با رابطهٔ $[X, P] = i\hbar$ وفضای هیلبرتی که این رابطه درآن نمایش داده می شود ساخته باشیم می توانیم بسادگی عملگرهای بالا و فضای هیلبرتی که روی آن عمل می کنند بسازیم. برای این کارکافی است که ازضرب تانسوری فضاهای برداری استفاده کنیم و تعریف کنیم

$$\begin{aligned} X_1 &= X \otimes I, \qquad & X_2 &= I \otimes X, \\ P_1 &= P \otimes I, \qquad & P_2 &= I \otimes P. \end{aligned} \tag{3}$$

بااستفاده از خواص ضرب تانسوری عملگرهابراحتی دیده می شود که بااین تعریف روابط جابجایی صحیح بین این مشاهده پذیرها برقرارمی شود. عملگرتکانه خطی کل نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$P := P_1 + P_2 = P \otimes I + I \otimes P. \tag{4}$$

ازآنجا که $[P_1, P_2] = 0$ می توان حالت هایی را یافت که ویژه حالت مشترک هردو عملگرباشند که معنای فیزیکی این حالت ها آن است که درآنها تکانه خطی هردوذره معین است. این حالت ها عبارت اند از

$$|p_1, p_2\rangle = |p_1\rangle \otimes |p_2\rangle. \tag{5}$$

باتوجه به روابط 44 واضح است که

$$P_1|p_1, p_2\rangle = p_1|p_1, p_2\rangle, \qquad P_2|p_1, p_2\rangle = p_2|p_1, p_2\rangle, \qquad P|p_1, p_2\rangle = (p_1 + p_2)|p_1, p_2\rangle \tag{6}$$

بنابراین حالت $|p_1, p_2\rangle := |p_1\rangle \otimes |p_2\rangle$، حالتی است که تکانه زاویه ای کل آن برای دو ذره مقدارمشخصی دارد و برابراست با $p_1 + p_2$.
حال همین روش رابرای تکانه زاویه ای به کارمی بریم. نخست عملگرهای تکانه زاویه کل را می بایست تعریف کنیم. می دانیم که تکانه زاویه ای هرکدام از دوذره به شکل زیرتعریف می شود:

$$\vec{J_1} := \vec{J} \otimes I, \qquad \vec{J_2} := I \otimes \vec{J}, \tag{7}$$

بنابراین تکانه زاویه ای کل برای دوذره که آن را با نماد $\vec{\mathcal{J}}$ نشان خواهیم داد برابر است با

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{J_1} + \vec{J_2} = \vec{J} \otimes I + I \otimes \vec{J}. \tag{8}$$

این رابطه به این معناست که

$$\mathcal{J}_x = J_{1x} + J_{2x}, \qquad \mathcal{J}_y = J_{1y} + J_{2y}, \qquad \mathcal{J}_z = J_{1z} + J_{2z}, \tag{9}$$

یا

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x &= J_x \otimes I + I \otimes J_x, \\ \mathcal{J}_y &= J_y \otimes I + I \otimes J_y, \\ \mathcal{J}_z &= J_z \otimes I + I \otimes J_z. \end{aligned} \tag{10}$$

براحتی نشان داده می شود که مولفه های تکانه زاویه ای کل در روابط زیرصدق می کنند:

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b] = i\hbar\epsilon_{abc}\mathcal{J}_c. \tag{11}$$

این رابطه به این معناست که عملگرهای $\mathcal{J}_x$، $\mathcal{J}_y$ و $\mathcal{J}_z$ واقعاً عملگر تکانه زاویه ای هستند زیرا درروابط جابجایی تعریف کننده مربوط به مشاهده پذیر های تکانه زاویه ای صدق می کنند.

هم چنین اندازه تکانه زاویه ای کل برابراست با

$$\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}_a\mathcal{J}_a, \tag{12}$$

که باهمه مولفه های تکانه زاویه ای کل جابجامی شود یعنی $[\mathcal{J}^2, \mathcal{J}_a] = 0$. اما مهم است که دقت کنید

$$\mathcal{J}^2 \neq J_1^2 + J_2^2$$

و همین موضوع است که دردسرساز است. در واقع با توجه به رابطه (10) داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^2 &= (J_x \otimes I + I \otimes J_x)^2 + (J_y \otimes I + I \otimes J_y)^2 + (J_z \otimes I + I \otimes J_z)^2 \\
&= (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \otimes I + I \otimes (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) + 2(J_x \otimes J_x + J_y \otimes J_y + J_z \otimes J_z) \\
&= J^2 \otimes I + I \otimes J^2 + 2(J_x \otimes J_x + J_y \otimes J_y + J_z \otimes J_z) \\
&= J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1x}J_{2x} + 2J_{1y}J_{2y} + 2J_{1z}J_{2z} \\
&= J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

برای محاسبات آینده توجه به یک نکته مهم است و آن اینکه عملگر $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$ را به دو صورت می توانیم بنویسیم. با توجه به تعاریف $J_+ := J_x + iJ_y$ و $J_- := J_x - iJ_y$ می توانیم بنویسیم:

$$\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z} \tag{14}$$

و یا

$$\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = \frac{1}{2}(J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}) + J_{1z}J_{2z}. \tag{15}$$

در محاسبات آینده از این رابطه‌ها استفاده می کنیم.

حال سوال می کنیم که حالتی که تکانه زاویه ای کل برای دو ذره مشخص باشد کدام حالت است؟ بیایید این کار را برای ساده ترین حالت انجام دهیم. قبل از ادامه بحث بهتراست به نکته ای درباره نمادگذاری اشاره کنیم و آن این است که تکانه زاویه ای کل را با $\vec{J}$ یا $\vec{\mathcal{J}}$ نمایش می دهیم ولی معمولاً تکانه زاویه ای مربوط به ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ را همواره با $\vec{S}$ نمایش می دهیم.

۲ جمع تکانه زاویه ای برای دو ذره اسپین ۱/۲

دو ذره اسپین ۱/۲ درنظر می گیریم. برای هرکدام ازاین دوذره داریم

$$S_z|+\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle, \qquad S_+|+\rangle = 0, \qquad S_-|+\rangle = |-\rangle$$
$$S_z|-\rangle = -\frac{1}{2}|-\rangle, \qquad S_+|-\rangle = |+\rangle, \qquad S_-|-\rangle = 0. \tag{16}$$

حالت های $|+\rangle$ و $|-\rangle$ به ترتیب نمادهای خلاصه‌ای هستند برای $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ و $|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\rangle$. حال حالت های چهارگانه زیر را درنظر می گیریم

$$|+,+\rangle$$
$$|+,-\rangle$$
$$|-,+\rangle$$
$$|-,-\rangle. \tag{17}$$

ازخود سوال می کنیم که آیاتکانه زاویه ای کل این حالت ها مقدارمشخصی است؟ آیا این حالت ها ویژه بردارهای مشترک J_z و J^2 هستند؟ برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که عملگر تکانه زاویه ای کل برای این دوذره به شکل زیر تعریف می شود:

$$J_z = S_{1z} + S_{2z}$$
$$J^2 = (S_1 + S_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2. \tag{18}$$

عملگر $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ را برای محاسبات آینده بهتراست به شکل زیربنویسیم:

$$S_1 \cdot S_2 = S_{1z}S_{2z} + 2S_{1+}S_{2-} + 2S_{1-}S_{2+}. \tag{19}$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$J^2 = \frac{3}{2} + 2S_{1z}S_{2z} + 4S_{1+}S_{2-} + 4S_{1-}S_{2+}. \tag{20}$$

براحتی معلوم می شود که حالت های چهارگانه 17 مولفه سوم تکانه زاویه ای مشخصی دارند یعنی

$$J_z|+,+\rangle = |+,+\rangle$$
$$J_z|+,-\rangle = 0$$

$$
\begin{aligned}
&J_z|-,+\rangle = 0\\
&J_z|-,-\rangle = -|-,-\rangle.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

برای اینکه ببینیم آیا اندازه تکانه زاویه ای کل این حالت ها نیز مشخص است یا نه عملگر J^2 را روی آنها اثر می دهیم. با توجه به روابط 18 و 19 بدست می آوریم

$$
\begin{aligned}
&J^2|+,+\rangle = 2|+,+\rangle\\
&J^2|+,-\rangle = |+,-\rangle + |-,+\rangle\\
&J^2|-,+\rangle = |-,+\rangle + |+,-\rangle\\
&J^2|-,-\rangle = 2|-,-\rangle.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

بنابراین اگر چه حالت های $|+,+\rangle$ و $|-,-\rangle$ اندازه تکانه زاویه ای مشخصی دارند حالت های $|+,-\rangle$ و $|-,+\rangle$ چنین نیستند. اما می توان ترکیب جدیدی از این دوحالت چنان درست کرد که خاصیت گفته شده را داشته باشند. از روابط بالا این ترکیب جدید مشخص می شود که به صورت دو حالتِ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)$ خواهند بود. بنابراین بجای چهارحالت فوق می توان یک دسته سه تایی و یک دسته یک تایی ساخت که ویژه مقدارهای J^2 و J_z آنها مشخص باشد. هرگاه این ویژه بردارهارا با $|j,m\rangle$ نشان دهیم این حالت ها عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&|1,1\rangle = |+,+\rangle\\
&|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)\\
&|1,-1\rangle = |-,-\rangle
\end{aligned}
\tag{23}
$$

و

$$
|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle).
\tag{24}
$$

نکته مهم آن است که دسته سه تایی که آن را اصطلاحاً $Triplet$ می گوییم یک نمایش اسپین 1 از جبر تکانه زاویه ای تشکیل می دهد به این معنا که عمل گر های J_z و $J_\pm$ این حالت ها را درست مثل حالت های یک نمایش اسپین 1 به هم تبدیل می کند. دسته یک تایی نیز که اصطلاحاً آن را $Singlet$ می گوییم یک نمایش اسپین صفر ازجبر تکانه زاویه ای تشکیل می دهد. کاری که انجام داده ایم ازنظر ریاضی تجزیه حاصلضرب تانسوری دو نمایش اسپین $1/2$ به جمع دو نمایش اسپین 1 و 0 نامیده می شود. به همین دلیل است که می نویسیم

$$
\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1.
\tag{25}
$$

۳ جمع دو تکانه زاویه ای دلخواه

آنچه را که دربخش گذشته گفتیم می توانیم به جمع دو تکانه زاویه ای دلخواه تعمیم دهیم. حالتی مثل $|j_1,m_1\rangle\otimes|j_2,m_2\rangle := |j_1,m_1,;j_2,m_2\rangle$ را درنظربگیرید. وقتی که دو ذره دراین حالت هستند تکانه زاویه ای هرکدام ازآنها به تنهایی معین است. به عبارت دیگر این حالت ویژه حالتِ مشترک چهارعملگر $J_1^2, J_{1,z}, J_2^2, J_{2z}$ است. درنتیجه دراین حالت اندازه تکانه زاویه ای هردو ذره و هم چنین مولفه سوم تکانه زاویه ای هردوی آنها معین است. این حالت ها یک پایه برای حالت های هردو ذره تشکیل می دهند. حال سوال می کنیم که آیا دراین حالت تکانه زاویه ای کل دوذره نیزمقدارمعینی دارد؟ به عبارت دیگر آیا این حالت ویژه حالت ویژه بردارِ J^2 و یا J_z نیزهست یا نه ؟ ازآنجا که $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ بسادگی می فهمیم که

$$J_z|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle = (m_1+m_2)|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle, \tag{26}$$

یعنی دراین حالت مولفه سوم تکانه زاویه ای کل نیزمقدارمعینی دارد و برابراست با مجموع مولفه های سوم تکانه های زاویه ای برای تک تک ذرات. اما یک محاسبه ساده واستفاده از رابطه

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z} + 4J_{1+}J_{2-} + 4J_{1-}J_{2+} \tag{27}$$

نشان می دهد که این حالت ویژه بردار عملگر J^2 نیست وبنابراین دراین حالت اندازه تکانه زاویه ای کل مقدارمشخصی ندارد. ازخود می پرسیم آیا می توان حالت هایی را یافت که درآنها تکانه زاوایه کل دوذره و مولفه سوم تکانه زاویه ای کل معلوم باشد؟ به عبارت بهترمی پرسیم که ویژه بردارهای دو عملگرِ J^2 و J_z کدامند؟ و چه ربطی به حالت های $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$ دارند؟ مسلم است که می توان این دوعملگررا دریک پایه قطری کرد وحالت های مزبور را به صورت یک بسط از پایه قبلی یعنی حالت های $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$ نوشت. اما می توانیم مسئله را باسادگی بیشتری حل کنیم اگرتوجه کنیم که دو عملگر دیگروجود دارند که با J^2 و J_z جابجامی شوند. این دوعملگر عبارتند از J_1^2 و J_2^2. تحقیق درستی این مطلب را به خواننده واگذارمی کنیم. این موضوع مثل همیشه باعث می شود که ما بهتربتوانیم طیف عملگرها را پیداکنیم. حال باید به دنبال ویژه حالت های مشترک چهارعملگرباشیم که همه با هم جابجامی شوند که عبارتنداز

$$J^2, \qquad J_z, \qquad J_1^2, \qquad J_2^2. \tag{28}$$

این ویژه حالت ها را به شکل $|j,m;j_1,j_2\rangle$ می نویسیم. این حالت ها چنان اند که روابط زیر برقرارخواهند بود:

$$\begin{aligned}
J^2|j,m;j_1,j_2\rangle &= j(j+1)|j,m;j_1,j_2\rangle,\\
J_z|j,m;j_1,j_2\rangle &= m|j,m;j_1,j_2\rangle,\\
J_1^2|j,m;j_1,j_2\rangle &= j_1(j_1+1)|j,m;j_1,j_2\rangle,\\
J_2^2|j,m;j_1,j_2\rangle &= j_2(j_2+1)|j,m;j_1,j_2\rangle.
\end{aligned} \tag{29}$$

می توان این حالت ها را برحسب حالت های $|j_1,m_2;j_2,m_2\rangle$ بسط داد. این بسط را به شکل کلی زیر می توان نوشت:

$$|j,m;j_1,j_2\rangle = \sum_{m_1,m_2} C(j,m;j_1,j_2,m_1,m_2)|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle. \tag{30}$$

ضرایب $C(j,m;j_1,j_2,m_1,m_2)$ ضرایب $Clebsh-Gordon$ نامیده می شوند.

ازآنجا که پایه $\{|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\}$ و $\{|j,m;j_1,j_2\rangle\}$ هردو کامل و متعامد هستند داریم

$$\sum_{m_1,m_2} |j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\langle j_1,m_1;j_2,m_2| = I, \tag{31}$$

و

$$\sum_{j,m} |j,m;j_1,j_2\rangle\langle j,m;j_1,j_2| = I. \tag{32}$$

بنابراین بسط 30 را به شکل زیرنیز می توان نوشت

$$|j,m;j_1,j_2\rangle = \sum_{j_1,j_2,m_1,m_2} |j_1,m_1;j_2,m_2\rangle\langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m;j_1,j_2\rangle, \tag{33}$$

این رابطه درواقع بیان می کند که ضرایب $Glebsh\ Gordon$ عبارتند از ضرایب تغییرپایه، یعنی:

$$C(j,m;j_1,j_2,m_1,m_2) = \langle j_1,m_1;j_2,m_2|j,m;j_1,j_2\rangle. \tag{34}$$

این رابطه به ما اجازه می دهد که قیود معینی را روی این ضرایب بدست آوریم. به عنوان اولین قید بدست می آوریم که یک ضریبِ کلبش–گوردون تنها وقتی غیر صفر است که شرطِ $m = m_1 + m_2$ برقرار باشد. برای این کار کافی است که عنصر ماتریسی عملگر $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ را حساب کنیم. داریم:

$$\langle j_1,m_1;j_2,m_2|J_z - J_{1z} - J_{2z}|j,m;j_1,j_2\rangle = [m-(m_1+m_2)]\langle j_1,m_1;j_2,m_2|J_z - J_{1z} - J_{2z}|j,m;j_1,j_2\rangle \tag{35}$$

بنابراین وقتی که m برابر با $m_1 + m_2$ نباشد، ضریب کلبش – گوردون برابر با صفر می شود. شرط دوم در قضیه زیر بیان می شود. اثبات این قضیه ساده است و در ضمیمه این درس آمده است.

قضیه: هرگاه تکانه زاویه ای j_1 را با تکانه زاویه‌ای j_2 جمع کنیم، تکانه زاویه‌ای کل که آن را با j نمایش می دهیم هرکدام از مقادیر $\{j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-2,\cdots|j_1-j_2|\}$ را اختیار کند.

تمرین: نشان دهید که $\frac{1}{2}\oplus\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\otimes 1$. برای این کار مراحل زیر را طی کنید.

الف: بالاترین حالت اسپین یک یعنی $|1,1\rangle$ را در بالاترین حالتِ اسپین $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ ضرب کنید تا حالت $|1,1\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ بدست آید. عملگر $\mathcal{J}_z = J_{1z} + J_{2z}$ را روی این حالت اثر دهید و نشان دهید که این حالت ویژه حالتِ عملگر $\mathcal{J}_z$ با ویژه مقدارِ $\frac{3}{2}$ است.

ب: نشان دهید که عملگر $\mathcal{J}^+ = J_1^+ + J_2^+$ این حالت را از بین می برد. بنابراین این حالت بالاترین حالتِ نمایش اسپین $\frac{3}{2}$ است. بقیه حالت ها را با اثر دادن عملگرِ $\mathcal{J}^- = J_1^- + J_2^-$ بدست آورید.

پ: با استدلالی مشابه دسته‌ی اسپین $\frac{1}{2}$ را نیز بدست آورید.

تمرین: با محاسبه‌ی شبیه به تمرین قبل تجزیه زیر را انجام دهید:

$$1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0. \tag{36}$$

تمرین: با محاسبه مرحله به مرحله تجزیه زیر را انجام دهید و حالت های هر دسته اسپین را به طور صریح بدست آورید.

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}. \tag{37}$$

فرق دو دسته حالتِ اسپین $\frac{1}{2}$ در چیست؟

تمرین: مولکول آمونیاک دارای چهارهسته است. هسته‌ی هر اتم اسپین $\frac{1}{2}$ دارد. اسپین کل هسته های مولکول آمونیاک چه مقادیری می تواند داشته باشد. احتیاجی به نوشتن حالت ها نیست.

تمرین: می دانیم که $\frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \otimes 2 = \frac{5}{2} \oplus \frac{3}{2}$. فرق حالت های با اسپین $\frac{3}{2}$ در طرف راست دو رابطه‌ی بالا چیست؟

تمرین: دو ذره‌ی اسپین $\frac{1}{2}$ مطابق با هامیلتونی زیر باهم برهم کنش می کنند. از درجات آزادی فضایی این دو ذره صرف نظر کرده‌ایم.

$$H = JS_1 \cdot S_2. \tag{38}$$

این هامیلتونی نشان دهنده‌ی برهم کنش دو قطبی های مغناطیسی وابسته به این دو ذره هستند. (می دانیم که دوقطبی مغناطیسی یک ذره با تکانه‌ی زاویه‌ای آن ذره تناسب دارد.) J نشان دهنده‌ی شدت برهم کنش است.

الف: اگر J مثبت باشد، حالت پایه انرژی و واگنی آن را بدست آورید.

ب: اگر J منفی باشد، حالت پایه انرژی و واگنی آن را بدست آورید.

راهنمایی: از اتحادِ $\mathbf{J}^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ استفاده کنید که در آن $\mathbf{J} := \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ تکانه‌ی زاویه‌ای کل دو ذره است.

تمرین: سه ذره‌ی اسپین $\frac{1}{2}$ مطابق با هامیلتونی زیر باهم برهم کنش می کنند. از درجات آزادی فضایی این سه ذره صرف نظر کرده‌ایم.

$$H = J\left(S_1 \cdot S_2 + S_1 \cdot S_3 + S_2 \cdot S_2\right). \tag{39}$$

الف: اگر J مثبت باشد، حالت پایه انرژی و واگنی آن را بدست آورید.

ب: اگر J منفی باشد، حالت پایه انرژی و واگنی آن را بدست آورید.

راهنمایی: رابطه‌ی $\mathbf{J} := \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3$ را به توان دو برسانید.

۴ جمع تکانه زاویه ای از دیدگاه نمایش ها

می دانیم که عملگرهای $J_x,\ J_y,\ J_z$ یا $J_1,\ J_2,\ J_3$ مولدهای گروه دوران هستند. این عملگرها در یک رابطه جابجایی یعنی رابطه

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \tag{40}$$

صدق می کنند. اصطلاحاً می گوییم که این روابط، یک جبر تعریف می کنند. دراین بخش می خواهیم معنای جمع تکانه زاویه‌ای را از این نقطه نظر بفهمیم.

در درس های گذشته دیدیم که نمایش های یکانی این جبر همگی محدود بعد هستند و هر نمایش با یک عدد صحیح یا نیمه صحیح که آن را با j نمایش می دادیم، مشخص می شود. وقتی می گوییم که یک نمایش محدودبعد و یکانیِ اسپین$-j$ از این جبر پیدا کرده ایم، یعنی این که یک فضای برداری محدود بعد مثل V_j پیدا کرده ایم و توانسته ایم درآن فضا به این مولدها عملگرهایی یا ماتریس هایی نسبت دهیم که همان رابطه جابجایی بالا را بین خود داشته باشند. بنابراین اگر به مولدِ J_a ماتریسِ $D(J_a)$ را نسبت داده باشیم، آنگاه این روابط در یک نمایش برقرارهستند:

$$[D(J_a), D(J_b)] = i\epsilon_{abc}D(J_c). \tag{41}$$

دقت کنید که این ماتریس ها، یا عملگرها روی فضای $2j+1$ بعدی V_j عمل می کنند. هرگاه بردارهای پایه‌ی V_j را با $|j,m\rangle$ نمایش دهیم، آنگاه عملگرهای $D(J_a)$ این بردارهای پایه را طبق قاعده مشخصی به هم تبدیل می کنند. این قاعده مشخص را در درس مربوط به تکانه زاویه‌ای پیدا کردیم به این معنا که:

$$D(J_z)|j,m\rangle \quad = \quad m|j,m\rangle$$

$$
\begin{aligned}
D(J_+)|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1\rangle \\
D(J_-)|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle.
\end{aligned} \tag{42}
$$

البته معمولاً با تسامح از نوشتن علامت D صرف نظر کرده‌ایم ولی نوشتن این علامت در بحث های نظری مهم است زیرا باید تاکید کنیم که یک جبر معین وجود دارد که می تواند نمایش های متعدد و باابعاد متفاوت داشته باشد. کاهش ناپذیر بودن یک نمایش به این معناست که حالت های پایه فضای V_j را نمی توان به دو گروه جداگانه تقسیم کرد به قسمی که هر گروه جداگانه تحت تاثیر عملگرها به عناصری از همان گروه تبدیل شوند. به عبارت بهتر وقتی به ماتریس های نمایش نگاه می کنیم، این ماتریس ها بلوکه قطری نیستند. حال فرض کنید که دو نمایش D و D' روی فضاهای V و V' از جبرتکانه‌ی زاویه‌ای دراختیار داریم. از آنجا که D و D' هردو نمایش هستند داریم

$$
[D(J_a), D(J_b)] = i\epsilon_{abc}D(J_c), \qquad [D'(J_a), D'(J_b)] = i\epsilon_{abc}D'(J_c), \tag{43}
$$

حال می توانیم یک نمایش بزرگ تر روی فضای $V\otimes V'$ به شکل زیر بسازیم:

$$
\mathcal{D}(J_a) := D(J_a)\otimes I + I\otimes D'(J_a). \tag{44}
$$

تمرین: تحقیق کنید که $\mathcal{D}$ واقعاً یک نمایش از همان جبراست.

این نمایش جدید را ضرب تانسوری دو نمایش D و D' می خوانیم. نکته مهم آن است که حتی اگر نمایش های D و D' کاهش ناپذیرباشند، ضرب تانسوری آنها عموماً کاهش پذیراست. حال مطالب گفته شده را که در مورد هر جبر و هر نمایشی صادق بود به جبر تکانه زاویه‌ای و نمایش های کاهش ناپذیر آن تخصیص می دهیم. نمایش اسپین j_1 را با D_{j_1} نمایش می دهیم و نمایش اسپین j_2 را با D_{j_2}. فضاهای این دو نمایش را با V_{j_1} و V_{j_2} نشان می دهیم و پایه های آنها را با $\{|j_1,m_1\rangle\}$ و $\{|j_2,m_2\rangle\}$. دراین صورت حالت های $\{|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle := |j_1,m_1\rangle\otimes|j_2,m_2\rangle\}$ تشکیل یک پایه برای فضای $V_{j_1}\otimes V_{j_2}$ تشکیل می دهند. این پایه نمایش حاصل ضرب که آن را با $\mathcal{D}_{j_1\otimes j_2}$ نشان می دهیم و ماتریس های آن مطابق با رابطه‌ی 44 تعریف شده‌اند، حمل می کنند، به این معنا که این پایه ها تحت اثر ماتریس های $\mathcal{D}(J_a) := D(J_a)\otimes I + I\otimes D'(J_a)$ به هم تبدیل می شوند. ولی نمایش بدست آمده یک نمایش کاهش پذیراست و می توان با یک تبدیل پایه آن را بلوکه قطری کرد. تبدیل پایه ای که این کار را انجام می دهد همانی است که توسط ضرایب کلبش — گوردون تشکیل می شود. دراین پایه جدید تمام ماتریس های نمایش بلوکه قطری می شوند. این که حاصل ضرب دو نمایش فوق به چه نمایش هایی تجزیه می شود، پاسخ اش توسطقضیه زیر داده می شود. اثبات این قضیه در ضمیمه‌ی این فصل آمده است.

قضیه: حاصلضرب دو نمایش j_1 و j_2 ازتکانه زاویه ای به نمایش های کاهش ناپذیر زیر تجزیه می شود:

$$
\mathcal{D}_{j_1\otimes j_2} = D_{(j_1+j_2)}\oplus D_{(j_1+j_2-1)}\oplus\cdots\oplus D_{|j_1-j_2|}. \tag{45}
$$

معمولاً این رابطه را به شکل ساده تر زیر می نویسیم:

$$
j_1\otimes j_2 = (j_1+j_2)\oplus(j_1+j_2-1)\oplus\cdots\oplus|j_1-j_2|. \tag{46}
$$

این رابطه به صورت نمادین بیان می کند که فضای حاصل ضرب تانسوری $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$ به زیر فضاهایی تجزیه می شود که هرکدام یک نمایش کاهش ناپذیر را حمل می کنند. این زیرفضاها به یکدیگر عمود هستند زیرا که هر کدام از آنها ویژه مقدار متفاوتی برای عملگر هرمیتیِ $J^2 = (L_1 + L_2)^2$ دارند.

تمرین: الف: ماتریس های پاوولی را در نظربگیرید و قرار دهید:

$$D(S_a) = \frac{1}{2}(I \otimes \sigma_a + \sigma_a \otimes I). \tag{47}$$

نشان دهید که این ماتریس ها واقعاً یک نمایش از جبر تکانه زاویه‌ای هستند.

ب: حال ماتریسی را که پایه‌ی $\{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}$ را به پایه‌ی $Singlet$ و $Triplet$ می برد بنویسید و نشان دهید که در پایه‌ی جدید ماتریس های فوق بصورت بلوکه قطری درمی آیند. به این ترتیب نشان داده‌اید که ماتریس های فوق اگر چه یک نمایش از جبر تکانه‌ی زاویه‌ای هستند ولی نمایش کاهش پذیرنیستند و به یک نمایش اسپین ۱ و یک نمایش اسپین صفر تجزیه می شوند.

درزیربخش بعدی نحوه عملی این تجزیه را شرح خواهیم داد.

۱.۴ روش عملی تجزیه حاصل ضرب دو نمایش

بازهم بهتراست که روش تجزیه را بایک مثال ساده شرح دهیم. فرض کنید که دو ذره با تکانه زاویه ای $1/2$ و 1 داریم. یا اینکه ذره ای داریم که هم تکانه زاویه ای مداری به اندازه یک و هم تکانه زاویه ای اسپینی دارد. می خواهیم بینیم که تکانه زاویه ای کل چه مقادیری می تواند اختیارکند. حالت های $l = 1$ عبارتند از

$$\begin{aligned} &|1,1\rangle \\ &|1,0\rangle \\ &|1,-1\rangle. \end{aligned} \tag{48}$$

وحالت های اسپین یا $s = \frac{1}{2}$ عبارتند از

$$\begin{aligned} &|+\rangle, \\ &|-,\rangle. \end{aligned} \tag{49}$$

نخستین کاری که می کنیم آن است که بالاترین حالت نمایش 1 را در بالاترین حالت نمایش $1/2$ ضرب می کنیم. حالت

بدست آمده چیزی نیست جز $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$.

$$|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle. \tag{50}$$

دلیل این امر را خواننده با یک محاسبه ساده و اثر دادن J^2 و J_z روی دو طرف می تواند بفهمد. حال با اثر $J_z = L_z + S_z$ روی دو طرف حالت های دیگر این نمایش را بدست می آوریم . بنابراین یک چهارتایی که همان نمایش $\frac{3}{2}$ است بدست می آید:

$$\begin{aligned}
&|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = |1,1\rangle|+\rangle \\
&|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1\rangle|-\rangle \\
&|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|-\rangle \\
&|\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\rangle = |1,-1\rangle|-\rangle.
\end{aligned} \tag{51}$$

به این ترتیب یک دسته چهارتایی حالت بدست می آید که نمایش اسپین $\frac{3}{2}$ از جبر تکانه زاویه ای را می سازند. اما می دانیم که دو حالت دیگر باقی مانده است. رابطه 45 نیز به ما می گوید که $1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$. بنابراین دو حالت دیگر می بایست نمایش اسپین $\frac{1}{2}$ را بسازند. برای یافتن بالاترین حالت این نمایش یعنی $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ ترکیب زیر را می سازیم که درآن α و β می بایست پیدا شوند.

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \alpha|1,0\rangle|+\rangle + \beta|1,1\rangle|-\rangle. \tag{52}$$

حال کافی است که α و β را چنان پیدا کنیم که اثر J_+ روی این حالت برابر با صفر باشد، یعنی این حالت واقعاً بالاترین حالت یک نمایش باشد. با استفاده ازاین شرط و شرط بهنجارش این حالت پیدا می شود. سپس با استفاده از اثر J_- روی آن حالت دیگر نمایش نیز یافته خواهد شد. نهایتاً حالت های این نمایش عبارت خواهند بوداز:

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle|+\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|-\rangle \\
|\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle|+\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0\rangle|-\rangle.
\end{aligned} \tag{53}$$

آنچه که نشان داده ایم مثالی است از قضیه کلی ای که در بالا به آن اشاره کردیم، یعنی اینکه نشان داده ایم

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0. \tag{54}$$

۵ جمع تکانه زاویه ای مداری و اسپینی

دراین بخش روابط بسته ای برای جمع تکانه های زاویه ای l و $\frac{1}{2}$ بدست می آوریم. این نتیجه ازنظر کابردی نیز اهمیت زیادی دارد زیرا خیلی از اوقات می خواهیم تکانه زاویه ای کل را برای الکترونی که تکانه زاویه ای مداری l و تکانه زاویه ذاتی یا اسپین $\frac{1}{2}$ دارد بدست آوریم. معمولاً عملگر تکانه زاویه ای را با $\mathbf{S}$ ، تکانه زاویه مداری را با $\mathbf{L}$ و تکانه زاویه ای کل را با $\mathbf{J}$ نشان می دهیم. بنابراین $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$. می دانیم که

$$l\otimes\frac{1}{2}=(l+\frac{1}{2})\oplus(l-\frac{1}{2}). \tag{55}$$

با کمی دقت متوجه می شویم که یک حالت با عدد کوانتومی $m+\frac{1}{2}$ را درچند تایی $l+\frac{1}{2}$ تنها می توان به شکل زیر نوشت:

$$|l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\rangle=\alpha_{l,m}|l,m\rangle|+\rangle+\beta_{l,m}|l,m+1\rangle|-\rangle, \tag{56}$$

که درآن $\alpha_{l,m}$ و $\beta_{l,m}$ ضرایبی هستند که می بایست تعیین شوند. هم چنین یک حالت با عدد کوانتومی $m+\frac{1}{2}$ را درچند تایی $l-\frac{1}{2}$ می توان به صورت زیر نوشت:

$$|l-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\rangle=\gamma_{l,m}|l,m\rangle|+\rangle+\delta_{l,m}|l,m+1\rangle|-\rangle. \tag{57}$$

تعامد این حالت بر حالت قبلی و هم چنین بهنجاربودن آنها منجر به روابط زیر می شود:

$$\begin{aligned}&\alpha_{l,m}^2+\beta_{l,m}^2=1\\&\gamma_{l,m}^2+\delta_{l,m}^2=1\\&\alpha_{l,m}\gamma_{l,m}+\beta_{l,m}\delta_{l,m}=0.\end{aligned} \tag{58}$$

بنابراین کافی است که یکی از ضرایب را پیداکنیم زیرا روابط فوق بقیه ضرایب را بدست خواهند داد. برای بدست آوردن این ضریب کافی است که روی طرفین رابطه 56 عملگر $J_-=L_-+S_-$ را اعمال کنیم. دراین صورت بدست می آوریم

$$C(l+\frac{1}{2},m+1)|l+\frac{1}{2},m-1\rangle=\alpha_{l,m}C(l,m)|l,m-1\rangle|+\rangle+\alpha_{l,m}|l,m\rangle|-\rangle+\beta_{l,m}C(l,m+1)|l,m\rangle|-\rangle, \tag{59}$$

که درآن $C(l,m)=\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}$.
با مقایسه این رابطه با رابطه a به نتیجه زیر می رسیم:

$$\alpha_{l,m-1}=\frac{C(l,m)}{C(l+\frac{1}{2},m+1)}\alpha_{l,m} \tag{60}$$

ویا پس از ساده کردن

$$\alpha_{l,m} = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}\alpha_{l,m-1}. \tag{61}$$

با تکرار این رابطه و توجه به اینکه $\alpha_{l,l} = 1$ به نتیجه زیر می رسیم:

$$\alpha_{l,m} = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}. \tag{62}$$

بااستفاده از روابط 58 بقیه ضرایب نیز بدست می آیند. بنابراین

$$\begin{aligned} |l+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|l,m\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|l,m+1\rangle|-\rangle, \\ |l-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|l,m\rangle|+\rangle - \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|l,m+1\rangle|-\rangle. \end{aligned} \tag{63}$$

تمرین: با محاسباتی شبیه به آنچه که در بالا انجام دادیم سعی کنید که ضرایب کلبش–گوردن را برای تجزیه زیر بدست آورید.

$$l \otimes 1 = (l+1) \oplus l \oplus (l-1). \tag{64}$$

۶ عملگرهای اسکالر، عملگر های برداری و تانسوری

در بسیاری از محاسباتی که بعداً با آنها سرو کار پیدا خواهیم کرد، می خواهیم عنصرماتریسی بعضی از عملگرها را در ویژه پایه تکانه زاویه ای یعنی حالت های $|j,m\rangle$ پیدا کنیم. هرگاه خواص این عملگرها و رابطه آنها را با تکانه زاویه ای بهتر بدانیم می توانیم حتی بدون محاسبه زیاد این عناصر ماتریسی را مشخص کنیم. عملگرها را می توانیم بسته به این که چه نوع رابطه‌ی جابجایی با عملگرهای تکانه زاویه‌ای دارند، طبقه بندی کنیم. عملگرها را بسته به نوع این رابطه به عملگرهای اسکالر، برداری و تانسوری تقسیم بندی می کنیم. دراین بخش این عملگرها را مطالعه می کنیم و نشان می دهیم که چگونه خواص آنها منجر به بعضی قیود مهم روی عناصر ماتریسی آنها در پایه تکانه زاویه‌ای می شود.

۱.۶ عملگرهای اسکالر

در درسهای گذشته عملگر اسکالر را معرفی کردیم. درتمام این بخش فرض ما این است که فضای هیلبرتی که عملگرها در آن تعریف شده اند نمایشی از تکانه زاویه ای و درنتیجه نمایشی از دوران را حمل می کند. نمایش مولفه های تکانه زاویه‌ای را با

$J_{x,y,z}$ نشان می دهیم. دراین فضای هیلبرت یک عملگر اسکالر مثل S، عملگری است که تحت دوران تغییر نمی کند، به این معنا که

$$U(R)SU^{\dagger}(R) = S, \tag{65}$$

که در آن $U(R)$، نمایشی از دورانِ R روی آن فضای هیلبرت است. از آنجا که $U(R) = e^{i\theta \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}$، رابطه بالا به این معناست که

$$[J_i, S] = 0, \tag{66}$$

یعنی اینکه عملگرِ S با مولفه‌های تکانه زاویه‌ای یا به عبارت بهتر با نمایش های آن در آن فضای هیلبرت جابجا می شود. نمونه هایی از عملگرهای اسکالر در فضای هیلبرت یک ذره که در سه بعد حرکت می کند عبارت اند از $\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$ و یا $\mathbf{P}\cdot\mathbf{J}$. هرکدام از روابطِ 65 یا 66 را می توان به عنوان تعریف عملگراسکالر در نظر گرفت.

تمرین: هرگاه S یک عملگراسکالر باشد، نشان دهید که روی عناصر ماتریسی اش قید زیر برقرار است:

$$\langle j, m|S|j', m'\rangle = A\delta_{j,j'}\delta_{m,m'} \tag{67}$$

که درآن A ثابتی است که بستگی به نوع عملگردارد. این رابطه نمونه ای از آن قواعد انتخابی است که گفتیم به این معنا که از قبل می توان گفت کدام عناصر ماتریسی صفر و کدام یک غیر صفرهستند.

۲.۶ عملگرهای برداری

تعریف: عملگرِ $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ عملگری است که تحت دوران مثل یک بردار تبدیل شود، به این معنا که:

$$U(R)A_iU^{\dagger}(R) = R_{ij}A_j. \tag{68}$$

بنابرتعریف این رابطه می بایست برای همه دوران ها از جمله دوران های بی نهایت کوچک نیز برقرار باشد. اما برای دوران های بی نهایت کوچک به اندازه θ حول محورِ $\mathbf{n}$ داریم

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \theta\epsilon_{ijk}n_k \tag{69}$$

و

$$U(R) = I + i\theta n_j J_j, \tag{70}$$

که درآن J_j ها نمایش های تکانه‌ی زاویه‌ای در همان فضای هیلبرتی هستند که A_i ها روی آن عمل می کنند. جایگذاری 69 و 70 در 74 و نگاه داشتن جملات تا رتبه θ منجر به رابطه زیر می شود:

$$[J_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k. \tag{71}$$

از این به بعد این رابطه را به عنوان رابطه تعریف کننده‌ی عملگرهای برداری به کار می بریم، به این معنا که می گوییم عملگرِ $\mathbf{A}$ یک عملگر برداری است اگر مولفه هایش با تکانه زاویه‌ای یا نمایش های آن چنین رابطه‌ی جابجایی ای داشته باشند.

تمرین: نشان دهید که عملگرهای $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ و $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ نمونه‌هایی از عملگرهای برداری هستند.

تمرین: نشان دهید که عملگرهای $\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$, $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}$ $\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$ نمونه‌هایی از عملگرهای اسکالرهستند.

تمرین: فرض کنید که $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ یک عملگر برداری است. عملگرهای زیر را تعریف کنید:

$$V^+ := V_x + iV_y, \quad V^- := V_x - iV_y, \quad V_z := V_z. \tag{72}$$

روابط جابجایی J_z را با عملگرهای بالا بدست آورید. با استفاده از این روابط جابجایی نشان دهید که

$$\begin{aligned}
\langle j', m'|V^+|j, m\rangle &= 0 \qquad if \qquad m' \neq m+1, \\
\langle j', m'|V^-|j, m\rangle &= 0 \qquad if \qquad m' \neq m-1, \\
\langle j', m'|V_z|j, m\rangle &= 0 \qquad if \qquad m' \neq m.
\end{aligned} \tag{73}$$

۳.۶ عملگرهای تانسوری

تعریف: عملگرِ $\mathbf{T}$ با مولفه های $T_{i,j}, \quad i,j = 1,2,3$ یک عملگر تانسوری رتبه دو است هرگاه تحت دوران مثل یک تانسور رتبه ۲ تبدیل شود، به این معنا که:

$$U(R)T_{ij}U^\dagger(R) = R_{ik}R_{jl}T_{kl}. \tag{74}$$

هرگاه رابطه های 69 و 70 را دراین رابطه جایگذاری کنیم و جملات تا رتبه θ رانگاه داریم به رابطه زیر می رسیم:

$$[J_i, T_{jk}] = i\epsilon_{ijl}T_{lk} + i\epsilon_{ikl}T_{jl}. \tag{75}$$

که از این به بعد آن را به عنوان رابطه تعریف کننده تانسورهای رتبه ۲ بکار می بریم. این تعریف به همین صورت تعمیم می یابد، به عنوان مثال تانسورهای رتبه ۳ با رابطه زیر تعریف می شوند:

$$[J_i, T_{jkl}] = i\epsilon_{ijm}T_{mkl} + i\epsilon_{ikm}T_{jml} + \epsilon_{ilm}T_{jkm}. \tag{76}$$

۴.۶ تانسورهای کروی

فرض کنید که $\mathbf{A}$ یک عملگر برداری باشد. دراین صورت قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &:= -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) \\ A_{1,0} &:= A_z \\ A_{1,-1} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y). \end{aligned} \tag{77}$$

تمرین: نشان دهید که جابجایی این عملگر ها با مولفه های تکانه زاویه ای درست مثل حالت های نمایش اسپین ۱ است. یعنی اینکه

$$\begin{array}{lll} [J_z, A_{1,1}] = A_{1,1}, & [J_z, A_{1,0}] = 0, & [J_z, A_{1,-1}] = -A_{1,-1} \\ [J_+, A_{1,1}] = 0, & [J_+, A_{1,0}] = \sqrt{2}A_{1,1}, & [J_+, A_{1,-1}] = \sqrt{2}A_{1,0}, \\ [J_-, A_{1,1}] = \sqrt{2}A_{1,0}, & [J_-, A_{1,0}] = \sqrt{2}A_{1,-1}, & [J_-, A_{1,-1}] = 0. \end{array} \tag{78}$$

اصطلاحاً می گوییم که این عملگرها تحت جابجاگر با تکانه زوایه ای مثل حالت های اسپین ۱ تبدیل می شوند. می گوییم عملگرهای $A_{1,1},\ A_{1,0},\ A_{1,-1}$ مولفه های یک تانسور کروی رتبه ۱ را تشکیل می دهند. به طور کلی یک تانسور کروی رتبه j، را به شکل زیر تعریف می کنیم:

تعریف: مجموعه‌ای از عملگرهای $A_{j,m},\ \ m = -j,\ -j+1,\ \cdots\ j-1,\ j$ که تحت جابجایی با عملگرهای تکانه‌ی زاویه‌ای مثل جالت های نمایش اسپین j رفتار کنند، یعنی

$$\begin{aligned} [J_z, A_{j,m}] &= mA_{j,m}, \\ [J_+, A_{j,m}] &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}A_{j,m+1}, \\ [J_-, A_{j,m}] &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}A_{j,m-1}. \end{aligned} \tag{79}$$

مولفه‌های یک تانسور کروی رتبه j نامیده می شوند. دقت کنید که با این تعریف یک عملگر اسکالر یک تانسوری کروی رتیه 0 است.

تمرین: فرض کنید که A و B دو عملگرتانسوری رتبه یک هستند. از ترکیب آنها یک عملگر تانسوری رتبه‌ی ۲، یک عملگرتانسوری رتبه یک و یک عملگراسکالر بسازید. **راهنمایی:** از ضرایب کلبش—گوردن برای تجزیه‌ی $1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$ استفاده کنید.

تمرین: با استفاده از نتایج تمرین قبلی ۹ مولفه‌ی تانسورِ X_iX_j را که در آن X_i مولفه‌های عملگرمکان هستند به سه دسته تقسیم کنید که نشان دهنده‌ی تانسورهای کروی رتبه ۲، ۱ و ۰ باشند.

حال می پرسیم که فایده تانسورهای کروی و این تعریف ها چیست؟ فایده مهم آنها این است که می توانیم بدون در نظر گرفتن نوع تانسور و اینکه از چه چیزی ساخته شده است، تنها با دانستن روابط جابجایی اش با مولفه های تکانه زاویه‌ای اطلاعات مهمی در باره عناصر ماتریسی آن روی $Y_{l,m}$ ها بدست بیاوریم، و این فایده بزرگی است زیرا اولا محاسبه این عناصر ماتریسی به طور مستقیم کار بسیار سختی است، ثانیاً چنین روابط ماتریسی ای مرتباً در مطالعات مربوط به ساختمان اتمی به خصوص در مطالعات مربوط به گذارهای بین لایه های مختلف اتمی پیش می آید. به عنوان ساده ترین مثال یک عملگر اسکالر مثل S در نظر بگیرید. این عملگر ممکن است $\mathbf{X}\cdot\mathbf{P}$ یا $\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$ یا چیزی نظیر آن باشد. دیدیم که یک برای یک عملگراسکالر S، قواعد انتخاب ساده‌ای برقراراست. می خواهیم ببینیم که آیا برای تانسورهای کروی نیز قواعد انتخاب ساده‌ای برقرارهستند یانه؟ برای پاسخ به این سوال مجموعه حالت های $A_{j,m}|j',m'\rangle$ را که در آن $A_{j,m}$ ها یک تانسور کروی هستند در نظر می گیریم. بیایید اثر عملگرهای J_z، و $J_\pm$ را روی این حالت ها حساب کنیم.

تمرین: با استفاده از تعریف حالت های $|,m\rangle$ و هم چنین تعریف تانسور کروی نشان دهید که:

$$J_z(A_{j,m}|j',m'\rangle) = (m+m')A_{j,m}|j',m'\rangle, \tag{80}$$

و

$$\begin{aligned}
J_+(A_{j,m}|j',m'\rangle) &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}A_{j,m+1}|j',m'\rangle + \sqrt{j'(j'+1)-m'(m'+1)}A_{j,m}|j',m'+1\rangle \\
J_-(A_{j,m}|j',m'\rangle) &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}A_{j,m-1}|j',m'\rangle + \sqrt{j'(j'+1)-m'(m'-1)}A_{j,m}|j',m'-1\rangle.
\end{aligned}$$

به عبارت دیگر حالت های $A_{j,m}|j',m'\rangle$ تاجاییکه که به رفتار آنها تحت اثر مولدهای تکانه زاویه‌ای مربوط است مثل حالت های ضرب تانسوری دو نمایش j و j' رفتار می کنند. اما می دانیم که چنین حالت هایی را می توان به گروه هایی تقسیم کرد که تحت نمایش های کاهش ناپذیرِ $j+j'$ تا $|j-j'|$ تبدیل شوند. بنابراین می توان نوشت:

$$A_{j,m}|j',m'\rangle = \sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} C(J;j,m;j',m')|J,m+m';j,j'\rangle. \tag{81}$$

که درآن $C(J;j,m;j',m')$ همان ضرایب کلبش — گوردونی هستند که در تجزیه زیر به کار می روند:

$$|j,m\rangle|j',m'\rangle = \sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} C(J;j,m;j',m')|J,m+m';j,j'\rangle. \tag{82}$$

به عبارت بهتر

$$C(J;j,m;j',m') = \langle J,m+m'|j,m;j,m'\rangle. \tag{83}$$

از رابطه 81 بلافاصله یک نتیجه مهم بدست می آید و آن اینکه اگر A یک تانسور کروی با رتبه‌ی j باشد آنگاه:

$$\langle j'', m''|A_{j,m}|j', m'\rangle = \begin{cases} 0 & if \quad m'' \neq m + m', \\ 0 & if \quad j'' > j + j' \quad or \quad j'' < |j - j'| \end{cases} \tag{84}$$

این یک قاعده انتخاب مهم است که بیان می کند این عنصر ماتریسی درچه مواقعی می تواند غیر صفر باشد.

تمرین: به عنوان مثالهایی از این قاعده انتخاب، نشان دهید که روابط زیر درست هستند:

$$\int \psi^*_{n,l,m}(r,\theta,\phi) x \psi^*_{n',l',m'}(r,\theta,\phi) r^2 d\Omega = 0 \quad if \quad l \neq l',\ l' \pm 1, \quad m \neq m' \pm 1$$

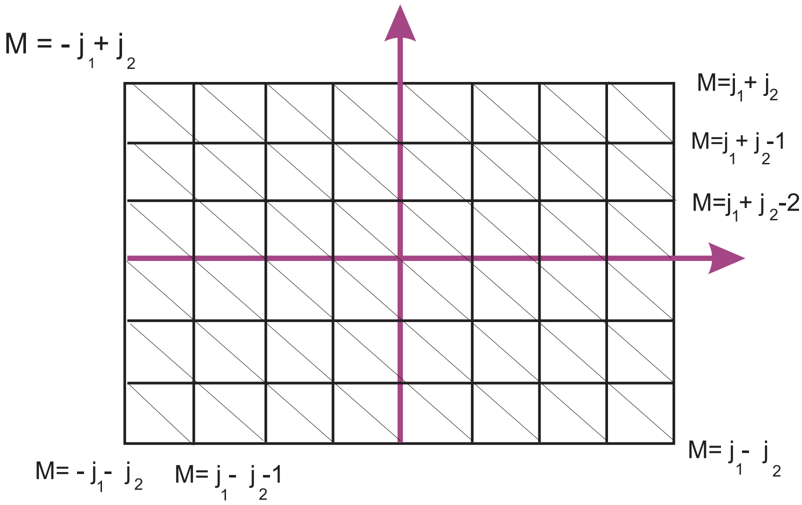
$$\int \psi^*_{n,l,m}(r,\theta,\phi) \frac{\partial}{\partial x} \psi^*_{n',l',m'}(r,\theta,\phi) r^2 d\Omega = 0 \ \ if \ \ l \neq l',\ l' \pm 1,\ m \neq m' \pm 1$$

$$\int \psi^*_{n,l,m}(r,\theta,\phi) xy \psi^*_{n',l',m'}(r,\theta,\phi) r^2 d\Omega = 0 \quad if \quad l \neq l',\ l' \pm 1, l' \pm 2 \quad m \neq m' \pm 2. \tag{85}$$

دقت کنید که نشان دادن این روابط با استفاده از محاسبه انتگرال ها کاربسیار دشواری است.

۷ ضمیمه شماره ۱

دراین ضمیمه می خواهیم قضیه اصلی مربوط به تجریه نمایش ها(یا جمع تکانه‌ی زاویه‌ای) را ثابت کنیم. نقطه شروع و درواقع مهمترین قسمت این استدلال شمارش واگنی حالت های $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ ای است که $M = m_1 + m_2$ آنها معین است. می دانیم که بیشترین مقدارِ ممکن از M برابر است با $j_1 + j_2$ که مربوط به حالتِ $|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$ است. این حالت توسط یک نقطه در سمت راستِ بالای شکل ۱ مشخص شده است. واگنی این حالت برابراست با ۱. مقدار بعدی از M برابر است با $M = j_1 + j_2 - 1$ که همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است دارای واگنی ۲ است. درجه واگنی همین طور با کاهش M یکی یکی زیاد می شود و مقدار ماکزیمم خودرا برای $M = j_1 - j_2$ اختیار می کند (بدون نقض کلیت فرض کرده ایم که $j_2 \leq j_1$). بعدازآن درجه واگنی ثابت می ماند تا وقتی که M به مقدارِ $M = -(j_1 - j_2)$ می رسد و بعد از آن دوباره یکی یکی کاهش می یابد تا به مقدارِ $M = -j_1 - j_2$ می رسد. حال مقدار $M = j_1 + j_2$ را در نظر بگیرید که متعلق به حالت $|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$ است. با اثردادن متوالی عملگرِ J_- روی این حالت یک نمایش کاهش ناپذیر با اسپین $j = j_1 + j_2$ ساخته می شود. این نمایش تنها دارای یک حالت با $M = j_1 + j_2 - 1$ است و حال آنکه مطابق با شکل دو حالت با این ویژه مقدار وجود دارد. پس معنایش این است که حالت دیگر چیزی نیست جز بالاترین حالت نمایشِ $j_1 + j_2 - 1$. احال ویژه مقدارِ $M = j_1 + j_2 - 2$ را در نظر می گیریم. مطابق با جدول می دانیم که واگنی این مقدار برابر است با ۳ و حال آنکه نمایش های قبلی هرکدام یک ویژه حالت با این ویژه مقدار دارند. پس بنابراین حالت دیگر می بایست بالاترین ویژه مقدار نمایش با اسپین $j_1 + j_2 - 2$ باشد. این استدلال تاوقتی که به $M = j_1 - j_2$ می رسیم ادامه پیدا می کند که منجر می شود به این که تمام



شکل ۱: هرنقطه‌ای این جدول یک حالت $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ با m_1 و m_2 معین را نشان می دهد. نقاط روی حالت های اوریب مقدار $M = m_1 + m_2$ معینی دارند. تعداد نقاط روی یک خط اریب درجه واگنی آن مقدار از M را نشان می دهد.

نمایش های با اسپین های $J = j_1 + j_2$، $J = j_1 + j_2 - 1$ ، $J = j_1 + j_2 - 2$ تا $J = j_1 - j_2$ می بایست الزاماً وجود داشته باشند. اما به این نقطه که می رسیم متوجه می شویم که تمام حالت ها دراین نمایش های مصرف شده اند زیرا هر نمایشِ با اسپینِ J تعداد $2J + 1$ حالت دارد و

$$\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} J = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1), \tag{86}$$

که برابر است با تعداد کل حالت های $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$. بنابراین دیگر حالتی باقی نمانده است و به این نتیجه می رسیم که

$$j_1 \otimes j_2 = (j_1 + j_2) \oplus (j_1 + j_2 - 1) \oplus (j_1 + j_2 - 2) \oplus \cdots (j_1 - j_2). \tag{87}$$