

درسنامه مکانیک کوانتومی

وحید کریمی پور
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده فیزیک

درس سوم : تولد مکانیک کوانتومی

۱ مقدمه

در نزدیکی های آخر قرن نوزدهم به نظر می رسید که فیزیک کلاسیک، که شالوده هایش را مکانیک تحلیلی (شامل مکانیک ذرات، شاره ها و محیط های کشسان)، الکترومغناطیس و نظریه حرارت و مکانیک آماری تشکیل می داد، یک ساختمان نظری کامل است که می تواند علی الاصول گستره وسیعی از پدیده های طبیعی و صنعتی را، از ابزار آلات دقیق فنی گرفته تا حرکت کرات در منظومه شمسی، به دقت توصیف کند.

در سال های آخر قرن نوزدهم با کشف الکترون، رادیو اکتیویته، اشعه ایکس، تخلیه الکتریکی و طیف نگاری گازها، یکی پس از دیگری پنجره هایی به درون دنیای میکروسکوپی گشوده شد. آیا فیزیک کلاسیک می توانست این دنیای جدید را نیز توصیف کند؟ نخستین مشاهدات باشگفتی این انتظار را برآورده کردند. چنان که رفتار اشعه کاتدی یعنی همان الکترون ها در لوله تخلیه الکتریکی نشان می داد، الکترون درست مثل یک پرتابه در میدان الکتریکی سقوط می کند و حرکت آن تابع قوانین نیوتن است. جی جی تامسون توانست با کار بست معادلات نیوتن، نسبت جرم به بار الکترون را بدست آورد. چند سال بعد در اوایل قرن بیستم، میلیکان توانست بازم با استفاده از همان قوانین، بار و در نتیجه جرم الکترون را بدست آورد.

با در نظر گرفتن اتم ها و مولکول های گاز به صورت گویهای کوچک و کار بست قوانین نیوتن به همراه فرض های معقولی در مورد توزیع احتمالی سرعت آنها، می شد در چارچوب نظریه جنبشی گازها، کمیت های ماکروسکوپی گاز مثل فشار آن را به درستی محاسبه کرد. بنابراین به نظر می رسید که گستره اعتبار فیزیک کلاسیک تمامی پدیده های طبیعی از کرات سماوی تا اتم

ها و الکترون‌ها را نیز در بر می‌گیرد.

از نظر فلسفی دستاورد فیزیک کلاسیک، بخصوص مکانیک، ارایه یک بیان دقیق از علیت یا تعیین بود به این معنا که اگر مکان و سرعت ذرات یک سیستم را در یک لحظه با دقت تعیین کنیم، مسیر آینده این سیستم در آینده با دقت معین خواهد شد. پیروزی‌های شگفت‌انگیز مکانیک کلاسیک و تعیین نهفته در آن، تصویری از جهان ارایه می‌کرد درست مثل یک ساعت عظیم، که در آغاز زمان یک بار تنظیم شده و تمامی حرکات آن در آینده تابع همان شرایط اولیه است. اگر برگی از درخت فرو می‌افتد، یا نسیمی می‌وزد، نتیجه حرکت جبری همان تنظیم اولیه است و گزیری از آن نیست. اگر انسان را نیز به مثابه دستگاهی عظیم و پیچیده از سلول‌ها و ارگان‌ها تصور کنیم که همگی تابع این قوانین هستند، و فکر را نیز تابع فعل و انفعالات شیمیایی و الکتریکی تصور کنیم، تصویر مکانیکی از جهان که حالا شامل موجودات زنده نیز شده است کامل می‌شود، اگر در یک لحظه عملی خاص را انجام می‌دهیم یا احساس خاصی به ما دست می‌دهد، همه نتیجه جبری همان شرایط و تنظیمات اولیه است. البته این تصویر جبری از جهان که حتی اراده انسان را نیز در بر می‌گیرد مورد اجماع نبوده است زیرا در این که آیا قوانین فیزیک را می‌توان به حوزه زیست‌شناسی و شیمی و هم چنین عرصه فکر و روان‌آدمی گسترش داد تردید وجود داشته است.

« زمانی بود که امکان داشت تصور شود که بنای فیزیک کلاسیک یکسره فرو خواهد ریخت، اما کم‌کم آشکار شد که فاجعه‌ای در کار نیست بلکه دگرذیسی عمیقی در میان است که در جهت نوعی تعمیم پیش می‌رود، و این خود برای کسانی که به پیشرفت مداوم دانش ایمان دارند مسلم بود. چون درست بسنجیم ورود این اندیشه‌های تازه، نه تنها خصلت تزلزل‌ناپذیر پایه‌های فیزیک کلاسیک را آشکار ساخته بلکه این پایه‌ها را استوارتر هم کرده است. این پایه‌ها پیش از هر چیز ثابت‌های عمومی هستند، مثل ثابت نیروی گرانش، سرعت نور، جرم و بار الکترون‌ها و پروتون‌ها که بیگمان آشکارترین نشانه‌های جهان واقعی هستند و فیزیک جدید آنها را حفظ کرده است.¹»

اما به تدریج و در آخرین سالهای قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم در بنای معظم فیزیک کلاسیک شکاف‌ها و ترک‌هایی پیدا شد. معلوم شد که پدیده‌هایی مثل تابش جسم سیاه، ظرفیت گرمایی ویژه جامدات، اثر فوتوالکتریک، مدل رادفورد در مورد ساختمان اتم، اثر کامپتون و نظایر آن هیچ‌کدام در چارچوب فیزیک کلاسیک قابل تبیین نیستند. تمامی تلاشهایی که برای ترمیم شکاف‌ها و ترک‌ها صورت می‌گرفت تا این پدیده‌ها را بتوان توضیح داد شکست خورده و معلوم شد که دنیای میکروسکوپی را می‌بایست با مفاهیم به کلی جدید و حتی زبان متفاوت و بسیار غریبی توضیح داد. فاصله سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۲۷ دوره‌ای طلایی در تاریخ فیزیک قرن بیستم و شاید تمامی تاریخ فیزیک است، دوره‌ای که شاهد تولد، رشد و بلوغ مکانیک کوانتومی از یک طرف و نسبیت خاص و نسبیت عام از طرف دیگر است. تا آنجا که به مکانیک کوانتومی مربوط می‌شود، ابتدای این دوره با ایده بسیار انقلابی پلانک در مورد تابش جسم سیاه در ۱۹۰۰ و معرفی کوانتای نور در ۱۹۰۵ توسط انشتین و سپس مدل اتمی بور آغاز می‌شود. این دوره تا سال ۱۹۲۴ به طول می‌انجامد و دوره‌ای است که در آن مدل بور و اصلاحات آن برای توصیف اتم‌های مختلف و پدیده‌های مختلف درون اتم به کار رفت. امروزه نظریه کوانتومی این سالها به نظریه کوانتومی قدیمی مشهور است زیرا هنوز اندیشه دوگانگی موج- ذره طرح نشده و در آزمایشها نیز یافت نشده است. در این

¹ ماکس پلانک، تصویر جهان در فیزیک جدید، مترجم مرتضی صابر.

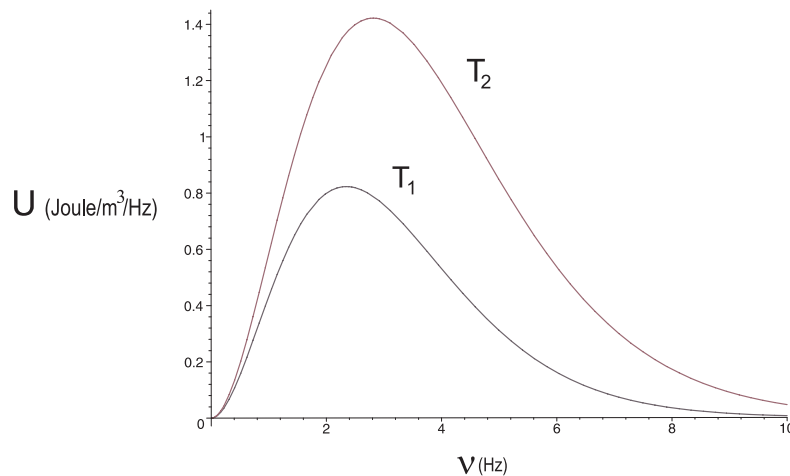
درس ما به اختصار زیاد این دوره را بررسی می کنیم. فرض ما آن است که خواننده یک بار این مطالب را در درس فیزیک جدید دیده است. مثلاً می داند که جسم سیاه و یا اثر فوتوالکتریک یعنی چه. بنابراین آنچه که در این درس می گوئیم بیشتر برای یاد آوری و یا احتمالاً آموزش بعضی نکات است که فکر می کنیم در یک درس فیزیک جدید به طور بایسته به آنها پرداخته نشده است. سپس در درس بعدی به تولد مکانیک کوانتومی جدید می پردازیم. بررسی ما در هر دو درس بسیار کوتاه خواهد بود. خواننده ای که بخواهد تاریخ پیدایش و تحول مکانیک کوانتومی را با تفصیل بیشتری مطالعه کند، می بایست به کتب تخصصی تاریخ نظریه کوانتومی رجوع کند.

۲ تعادل گرمایی ماده و نور

تعادل گرمایی ماده و نور نخستین شکافی بود که در بنای باشکوه فیزیک کلاسیک پدیدار شد. این پدیده در واقع چیزی نیست جز به تعادل حرارتی رسیدن ماده و تابش. وقتی که یک محفظه خالی را گرم می کنیم اتم های تشکیل دهنده دیواره ملتهب شده و شروع به تابش می کنند. این تابش توسط دیگر اتم ها جذب شده و باز تابش می شود. سرانجام بعد از رد و بدل کردن های انرژی بین اتم ها و نور، تعادل گرمایی حاصل می شود. برهم کنش نور با ماده که مبتنی بر الکترومغناطیس و مکانیک کلاسیک است با یک هامیلتونی مربعی تعیین می شود که در آن ذرات بارداری که درون دیواره هستند، تحت تاثیر میدان الکتریکی و مغناطیسی نور قرار گرفته، مرتعش می شوند و از خود نور ساطع می کنند، نوری که اتم های دیگر را به نوبه خود مرتعش کرده و آن ها را به گسیل نور وامی دارد. متغیرهای دینامیکی این هامیلتونی عبارتند از مختصه و تکانه اتم ها و دامنه میدان های الکتریکی و مغناطیسی نور در فرکانس های مختلف.

نکته مهم آن است که این هامیلتونی برحسب همه متغیرهای مربعی است و درحقیقت معادل است با مجموعه عظیمی از نوسانگرهای هارمونیک که بایکدیگر جفت شده اند. هر وجه از این سیستم عبارت است از وضعیتی که همه اجزای آن یعنی اتم های درون دیواره ها و موج تابشی درون محفظه به صورت هماهنگ نوسان می کنند. بنابراین هر وجه از این سیستم با یک بردار موج (k_x, k_y, k_z) از تابش و هم چنین جهت قطبش نور معین می شود. تعداد کل وجوه عبارت است از تعداد کل بردارهای موج که در عدد ۲ (بخاطر تعداد قطبش های مستقل نور) ضرب شده است.

بنابراین برای اینکه ببینیم چه مقدار انرژی تابشی در یک بازه فرکانس وجود دارد تنها کافی است که تعداد وجوه موجود در آن بازه را بشماریم و حاصل را بر مبنای قضیه همپاری در kT ضرب کنیم. اصل هم پاری انرژی به ما می گوید که هر وجه از این سیستم در دمای T به اندازه kT انرژی خواهند داشت. در همین جا یک تناقض مهم با مبانی فیزیک کلاسیک پیش می آید، زیرا تعداد وجوه های چنین سیستمی بی نهایت است و قضیه هم پاری انرژی به ما می گوید که یک چنین سیستمی هرگز نمی تواند به تعادل گرمایی برسد، زیرا یک مقدار محدود انرژی را نمی توان بین بی نهایت وجوه آنچنان پخش کرد که به هر وجه مقدار kT انرژی برسد. بیان دیگر این تناقض آن است که اگر ماده و تابش به تعادل رسیده باشند می بایست انرژی ذخیره شده در تابش بی نهایت باشد. در این جا می بایست به تجربه و آزمایشگاه متوسل شد. مشاهدات دقیق به ما می گویند که ماده و تابش به تعادل می رسند و مقدار انرژی ذخیره شده در تابش نیز محدود است و بی نهایت نیست. تا همینجا مشخص است که



شکل ۱: طیف تابش جسم سیاه، آنچنان که در تجربه دیده می شود. دمای T_2 از دمای T_1 بیشتر است به همین دلیل طیف تابشی به طرف فرکانس های بالاتر و یا طول موج های پایین تر میل پیدا کرده است.

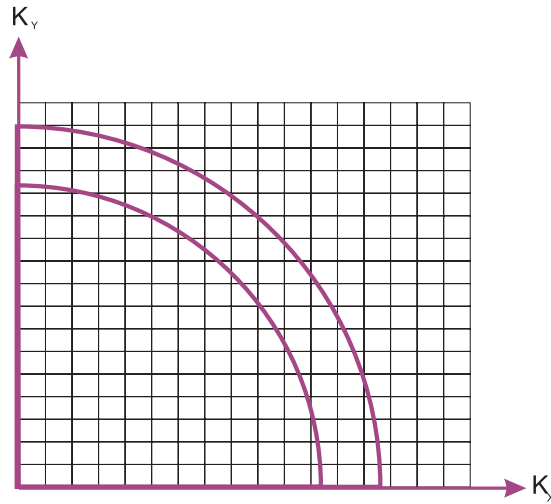
فیزیک کلاسیک با تابش جسم سیاه ناسازگار است.

برای درک بهتر این پدیده و اینکه ناسازگاری تجربه و نظریه دقیقاً در کجاست، چه باید کرد؟ می دانیم که تعداد وجوه انرژی تابشی یا نوری که درون محفظه است در تمام بازه فرکانس بی نهایت است. اگر توجه خود را به یک بازه فرکانس معین معطوف کنیم آنگاه تعداد وجوه نور در این بازه محدود است و ما می توانیم مسئله را ساده تر کنیم و بررسی کنیم که چه مقدار انرژی در این بازه فرکانس ذخیره شده است. چگالی انرژی موجود در واحد حجم در واحد فرکانس را با $u(\nu, T)$ نشان می دهیم به این معنا که $u(\nu, T)dv$ مقدار انرژی تابشی است که در واحد حجم محفظه در فرکانس بین ν و $\nu + dv$ وجود دارد. این میزان انرژی رابطه مستقیمی با انرژی تابشی ای که از واحد سطح محفظه به بیرون ساطع می شود، دارد و کمیت اخیر را می توان در آزمایشگاه اندازه گرفت. بر مبنای این مشاهدات و اندازه گیری های دقیق، معلوم شد که طیف انرژی تابشی مطابق با شکل ۱ است. نکته بسیار مهم که نشان می دهد چرا مطالعه تابش جسم سیاه تا به این حد مورد علاقه فیزیکدانان در قرن نوزدهم بوده است، آن بود که هم از نظر تجربی وهم نظری ثابت شده بود که این طیف هیچ نوع بستگی به هیچ کدام از خواص جسمی که گرم می شود (نظیر جنس ماده دیواره ها، حجم و شکل محفظه) ندارد و بنابراین در بردارنده یک خصلت اساسی و عام از تعادل ماده و تشعشع است.

آیا می شد این شکل را با فیزیک کلاسیک توضیح داد؟

برای اینکه ببینیم چه مقدار انرژی تابشی در یک بازه فرکانس وجود دارد تنها کافی است که تعداد وجوه موجود در آن بازه را بشماریم و حاصل را بر مبنای قضیه همپاری در kT ضرب کنیم.

تعداد وجوهی را که در یک بازه فرکانس وجود دارند به راحتی می توان شمرد. تعداد وجوه در واحد حجم ربطی به حجم ظرف و یا شرایط مرزی موج ندارد. به همین دلیل یک ظرف مکعبی شکل با اندازه L و حجم $V = L^3$ در نظر می گیریم. یک



شکل ۲: برای شمردن تعداد وجوهی که متناظر با یک بازه معین در فضای بردارهای موج هستند، کافی است که حجم ناحیه مزبور را بر تعداد مربع هایی که درون آن حجم وجود دارد تقسیم کنیم و حاصل را در ۲ (بخاطر قطبش نور) ضرب کنیم. در این فضا حجم هر مکعب برابر است با $\frac{\pi^3}{L^3} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$. هرچه که حجم محفظه V بیشتر باشد حجم یک مکعب در این نمودار کوچک تر شده و نحوه محاسبه تعداد وجوه دقیق تر می شود.

موج ایستاده در نظر می گیریم که مقدار آن در دیواره ها برابر با صفر باشد، یعنی

$$\phi(x, y, z) = A \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z. \quad (1)$$

که در آن

$$\kappa_x L = n_x \pi, \quad \kappa_y L = n_y \pi, \quad \kappa_z L = n_z \pi. \quad (2)$$

هرسه تایی (n_x, n_y, n_z) که در آن n_x, n_y, n_z اعداد صحیح مثبت هستند، دو وجه از تابش درون ظرف را تعریف می کند. بجای اینکه سوال کنیم در یک بازه فرکانس چه تعداد وجه وجود دارد، می توانیم سوال جزئی تری را بپرسیم و آن اینکه در بازه ای که بردار موج $\kappa = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ را جاروب می کند چه تعداد وجه وجود دارد، شکل (۲). برای یافتن این تعداد دقت می کنیم که

$$\Delta \kappa_x \Delta \kappa_y \Delta \kappa_z = \frac{\pi^3}{L^3} \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z. \quad (3)$$

بنابراین تعداد وجه ها در بازه ای به حجم $d^3 \kappa$ عبارت است از:

$$dn = 2 \frac{V}{\pi^3} d^3 \kappa. \quad (4)$$

بنابراین با استفاده از اصل هم پاری انرژی و با توجه به اینکه در حالت تعادل گرمایی به هر وجه به اندازه kT انرژی می رسد، مقدار انرژی تابشی که در موج هایی که بردار موج آنها در بازه d^3k قرار دارد، ذخیره شده است برابری با

$$dU = kT dn = kT 2 \frac{V}{\pi^3} d^3\kappa \quad (5)$$

با توجه به اینکه $d^3\kappa = \kappa^2 d\kappa d\Omega$ و

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} \quad (6)$$

نتیجه می گیریم

$$dU = kT 2 \frac{V}{\pi^3} \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu. \quad (7)$$

برای آنکه چگالی انرژی ذخیره شده در بازه فرکانس $(\nu, \nu + d\nu)$ را بدست آوریم می بایست روی زاویه بردار $\vec{\kappa}$ ، آنهم در یک هشتم سطح کره انتگرال بگیریم. دلیل این امر آن است که تنها می بایست $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ های مثبت را در نظر بگیریم زیرا منفی این مقادیر با توجه به رابطه ی 1 منجر به یک موج ایستاده متفاوت نمی شود. بنابراین نهایتاً چگالی انرژی تابشی در واحد حجم در واحد فرکانس برابر خواهد شد با

$$u(\nu, T) = kT \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (8)$$

این رابطه که نخستین بار توسط رایلی و جینز بدست آمد، تنها برای فرکانس های کم بر طیف تجربی تابش گرمایی منطبق است و در فرکانس های بالا به وضوح با منحنی تجربی متفاوت است. بخصوص این رابطه نشان می دهد که کل انرژی تابشی در همه فرکانس ها بی نهایت است که می دانیم چنین نیست.

تا سال ۱۹۰۰ کسی نتوانست هیچ توضیح منطقی برای تابش جسم سیاه بر مبنای فیزیک کلاسیک پیدا کند. در این سال بود که پلانک با پیشنهاد شجاعانه ای نخستین درجه به سوی دنیای کوانتومی را گشود. وی نخست سعی کرد که یک عبارت تحلیلی برای منحنی تابش جسم سیاه پیدا کند. تا آن موقع کسی چنین کاری نکرده بود و هیچ عبارت تحلیلی برای این منحنی در دست نبود. توجه به این نکته مهم است که ما با یک منحنی واحد سروکار نداریم بلکه به ازای هر دما یک منحنی در پیش رو داریم و از همین جا می توان دشواری و اهمیت کار پلانک را برای پیدا کردن یک عبارت تحلیلی که در همه دما ها و همه فرکانس ها معتبر باشد دریافت.

وی پس از کار طاقت فرسایی که اوج تلاش بیست ساله وی برای درک تابش گرمایی بود، سرانجام توانست این عبارت تحلیلی را پیدا کند. این عبارت تحلیلی به شکل زیر است:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (9)$$

که در آن h یک ثابت جهانی (مثل سرعت نور یا ثابت بولتزمن) است که به افتخار کارِ عظیمِ وی ثابت پلانک نام گرفته است و مقدار عددی آن عبارت است از:

$$h = 6.627 \times 10^{-34} \text{ Joule second.} \quad (10)$$

حتی امروزه نیز درک مهارت فنی ای که پلانک به کار برده است تا از مقایسه انبوه مشاهدات تجربی بتواند مقدار این ثابت را تعیین کند، دشوار است.

«... هنگامی که به بیست سال پیش از زمانی می نگرم که اندیشه کوانتوم پیداشد و اندازه گیری آن از طریق واقعیت های تجربی صورت گرفت، و نیز به راه دور و دراز و پریپیچ و خمی می نگرم که به این اکتشاف انجامید، سخت به یاد گوته می افتم که گفته بود، انسانها تا زمانی که در جستجوی چیزی هستند پیوسته اشتباه می کنند و دچار خطا می شوند. در ابتدای تلاش و کوشش دراز و دشوار، پژوهنده ممکن است مکرر در مکرر گرفتار این وسوسه بشود که از کوشش خود به عنوان اینکه بهبودی و بی حاصل است دست بردارد، ولی گاه به گاه برقی در راه او می جهد و دلیل شکست ناپذیری برای او می شود برای اینکه، پس از همه خطاهایی که در برداشتن گامی پس از گامی دیگر مرتکب شده است، لااقل به این نتیجه رسیده است که یک گام به حقیقتی که در جستجوی آن است نزدیک تر شده است...»²

مرحله بعدی در کار پلانک آن بود که توضیحی برای وجود این تابع پیدا کند. ما تنها می توانیم به حدس و گمان متوسل شویم تا راه پریپیچ و خمی را که پلانک برای رسیدن به ایده کوانتوم طی کرده است با ساده انگاری فراوان بازسازی کنیم. اگر به رابطه 9 نگاه کنیم متوجه می شویم که عامل $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ که تعداد وجه های تابش را می شمارد و از یک ملاحظه هندسی بدست آمده است در این رابطه نیز وجود دارد. این عبارت متوسط انرژی یک وجه است که تغییر یافته و از مقدار kT به مقدار $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ تغییر یافته است. نکته مهم این است که این انرژی متوسط دیگر مستقل از فرکانس نیست. اگر $h\nu$ خیلی کوچکتر از kT باشد، با استفاده از بسط $e^x \approx 1 + x$ نتیجه می گیریم که انرژی متوسط همان مقدار kT است و اگر $h\nu$ خیلی بزرگتر از kT باشد این انرژی متوسط صفر است. در واقع کشف ثابت پلانک باعث شده است که ما بتوانیم برای هر فرکانس ν یک انرژی مشخصه به اندازه $h\nu$ تعریف کنیم تا بتوانیم آن را با انرژی مشخصه دیگری مثل kT مقایسه کنیم. فرض پلانک آن بود که یک وجه تابشی با فرکانس ν مقدار انرژی هایی را که مبادله می کند به صورت پیوسته نیست بلکه به صورت مضاربی از این انرژی مشخصه یعنی $h\nu$ است. با قبول چنین فرضی انرژی متوسط یک وجه در دمای T را حساب می کنیم. بنابراین مکانیک آماری احتمال اینکه این وجه انرژی $nh\nu$ داشته باشد برابر است با $\frac{1}{Z} e^{-\beta nh\nu}$ که در آن Z برابر است با:

$$Z := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}. \quad (11)$$

² از خطابه پلانک در فرهنگستان پادشاهی علوم سوئد، هنگام دریافت جایزه نوبل.



شکل ۳: ماکس پلانک :

با داشتن این تابع پارش می توان انرژی متوسط ذخیره شده در یک وجه را حساب کرد. به سادگی به دست می آوریم

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (12)$$

با ضرب کردن این انرژی متوسط در تعداد وجه های با فرکانس ν به همان رابطه پلانک می رسیم. به این ترتیب با فرض گسسته بودن انرژی مبادله شده بین تابش و ماده پلانک توانست رابطه صحیح و عمومی طیف تابش گرمایی را توضیح دهد. این فرض در ضمن به معنای آن است که انرژی های مجاز برای یک نوسانگر نیز پیوسته نیستند بلکه این انرژی ها مقادیری گسسته را تشکیل می دهند که تفاوت آنها مضربی از $h\nu$ است. به این ترتیب ایده کوانتوم انرژی، سطوح گسسته انرژی و یک ثابت عمومی و جهانی به نام ثابت پلانک در سال ۱۹۰۰ جایگزین ایده های قدیمی فیزیک کلاسیک شد. به این ترتیب مقاله ای که پلانک در ۱۴ دسامبر ۱۹۰۰ به انجمن فیزیک آلمان عرضه کرد، و در آن نتایج اکتشاف خود را بیان کرد، در واقع علامت پایان دوره مکانیکی و سرآغاز دوره جدیدی در علم است.

پلانک برای این کشف راه بسیار پرپیچ و خمی را پیمود که ماحصل بیش از بیست سال کار مداوم او در باره طیف تابش گرمایی بود. وی با تواضع زیاد در باره کشفش چنین گفته است: « یک نفر معدنچی را تصور کنید که سالها لاینقطع سینه ی زمین را در جستجوی ماده معدنی معینی شکافته باشد، اما شبی با رگه ای از طلا برخورد کند که اصلاً وجود آن را حدس هم نمی زد. قدر مسلم آن است که اگر او با این رگه برخورد نمی کرد، حتماً دیگری آن را می یافت.»^۳ اما همانطور که پی یروسو در کتاب تاریخ علم گفته است: « ما مسئولیت آن را می پذیریم که جز او هیچ کس قادر نبود تئوری کوانتا را وضع کند».

برای اینکه عظمت کار پلانک را درک کنیم بد نیست در این جا بحث خود در باره تابش گرمایی را با نقل قطعه ای از یک کتاب به پایان ببریم. این کتاب « علم به کجا می رود؟ » نام دارد و نوشته پلانک است. در دیباچه ای که جیمز مورفی بر آن

^۳تاریخ علوم: نوشته پی یروسو، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۵۸

نوشته است چنین می خوانیم:

«... روزی از ماه ژوئن ۱۹۳۲ در خانه بیلاقی اینشتین نزدیک پانزده مایلی مغرب برلن، به دیدار او رفتم. خانه اینشتین بر بالای تپه کم شیبی ساخته شده و دریاچه زیبایی چشم انداز آن را تشکیل می دهد. طبقه آخر آن ایوانی دارد که به صحنه‌ی وسیع یک رصدخانه شبیه است و بر این ایوان دوربینی است که گاهگاه اینشتین با نگاه کردن از آن به ستارگان خود را مشغول می دارد. هنگامی که تاریکی شامگاهی نزدیک می شد و پرتو درخشان خورشید که سراسر روز به سطح دریاچه می خورد رفته رفته حالت آشفستگی پیدا می کرد، با هم به ایوان رفتیم تا فرورفتن خورشید را تماشا کنیم... آنگاه که در داخل اتاق بودیم موضوع اصلی گفتگو همه بحران سیاسی بود، ولی در اینجا، در میان هماهنگی دریاچه و جنگل و خورشید در حال فرو شدن، مطلب عالیتري مرکز بحث را تشکیل می داد. نام ماکس پلانک در ضمن سخن به میان آمد و دنباله بحث به مسائل فلسفی گوناگونی کشید که از فیزیک کوانتومی برخاسته است... من از اینشتین درخواست کردم که برای کتابی که بنامست پلانک بنویسد و در انگلستان منتشر شود، مقدمه ای بنویسد. وی گفت که معرفی پلانک از طرف او به مردم امری است که به نظر وی با جاه طلبی و ادعا همراه است، چرا که کاشف نظریه کوانتومی نیازمند آن نیست که از منبع کم نورتری نور منعکس بر او بتابد. این بود وضع اینشتین در برابر پلانک که با لحن صادقانه، روشن و اصیلی بیان می شد...».

۳ مسئله گرمای ویژه جامدات

آزمایشهای گوناگون نشان داده بودند که ظرفیت گرمایی جامدات گوناگون همگی با هم برابر و تقریباً برابر با 6 کالری بر مول بر درجه کلوین است. دولان⁴ و پتیت⁵ توضیح ساده ای برای این پدیده یافته بودند. در یک مول از یک جامد تعداد N_0 اتم وجود دارد که N_0 عدد آووگادروست. اگر هر اتم را به صورت یک نوسانگر در نظر بگیریم که دایره گرما در جای خود مرتعش می شود و این ارتعاش در سه بعد انجام می شود. اصل همپاری انرژی به ما می گوید که در دمای T مقدار انرژی متوسط آن برابر با $3kT$ است. بنابراین انرژی کل جامد برابر با $3NkT$ و در نتیجه ظرفیت گرمایی آن برابر با

$$C_V = \frac{dU}{dT} = 3NK = 3R \approx 6 \text{ cal/mole } K^{0-1}, \quad (13)$$

است. بنابراین ظرفیت گرمایی جامدات به همین سادگی توصیف می شود. اما مشاهدات بعدی نشان داد که در دماهای پایین ظرفیت گرمایی جامدات به تدریج کم شده و به صورت تابع T^3 به سمت صفر میل می کند. چنین چیزی را نمی شد با الگوهای فیزیک کلاسیک توضیح داد. نخستین بار اینشتین بود که با کار بست نظریه پلانک و در نظر گرفتن طیف گسسته انرژی برای نوسانگرها توضیح کیفی درستی از ظرفیت گرمایی جامدات به دست داد. وی با ساده سازی مسئله فرض کرد که همه اتم های جامد با یک فرکانس یکسان مثلاً ν نوسان می کنند و انرژی kT را با متوسط انرژی یک نوسانگر کوانتومی یعنی $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ جایگزین کرد. این کار انرژی متوسط یک مول از جامد را تبدیل می کند به

$$U = 3N \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (14)$$

Dulong⁴
Petit⁵

که در آن ظرفیت گرمایی ویژه جامد برابر خواهد شد با:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = 3R \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (15)$$

که در آن $x = \frac{h\nu}{kT}$ است. خواننده ب راحتی می تواند نشان دهد که طرف راست این رابطه در دماهای کم یعنی دماهایی که $x \gg 1$ به صورت T^3 رفتار می کند، و در دماهای بالا یعنی $x \ll 1$ تبدیل می شود به $3R$.
به این صورت اینشتین توانست با کاربرد نظریه پلانک، به سادگی منحنی ظرفیت گرمایی جامدات را توضیح دهد. البته می دانیم که فرض های او خیلی ساده بودند، به این معنا که اتم های یک جامد مستقل از هم نیستند و فرکانس یکسان ندارند، بلکه باهم برهم کنش می کنند و کار دقیق آن است که این سیستم را به صورت وجه های مستقل از هم در آوریم که با فرکانس های مختلف نوسان می کنند. این کار سال ها بعد توسط پیتر جی دیبای⁶ انجام شد.

۴ اثر فوتوالکتریک

پدیده فوتوالکتریک به پدیده ای گفته می شود که طی آن تابش نور به سطح ماده باعث کنده شدن الکترون از ماده می شود. این ماده می تواند نیم رسانا یا رسانا باشد و امروزه کاربردهای صنعتی فراوان از جمله در سلول های خورشیدی و فوتوسل ها یافته است. نخستین بار هرتز یعنی کاشف امواج الکترومغناطیسی بود که این پدیده را مشاهده کرد ولی مطالعات جامع درباره آن بعدها توسط فیلیپ لنارد فیزیکدان آلمانی انجام شد. در این پدیده انرژی نور، معمولاً نور فرابنفش، به الکترون درون ماده می تابد. اگر انرژی جذب شده توسط الکترون را با \mathcal{E} نشان دهیم مقداری از آن یعنی W صرف کردن اتم از سطح ماده شده و مابقی آن به صورت انرژی جنبشی الکترون در می آید که باعث پرتاب الکترون از سطح ماده به بیرون می شود. بنابراین اگر انرژی جنبشی الکترون را با K نمایش دهیم داریم

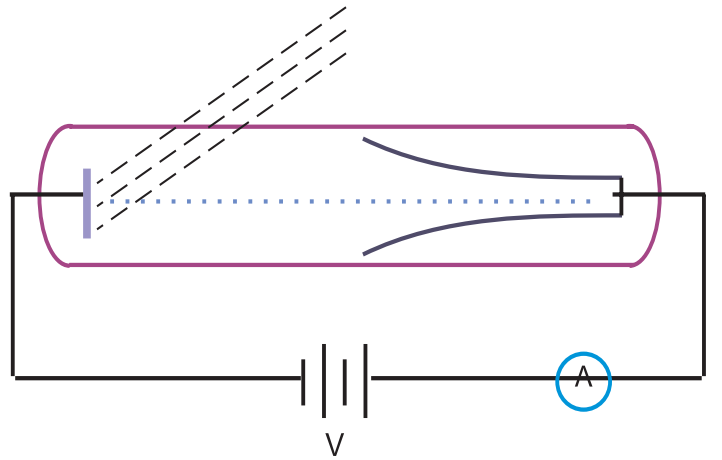
$$\mathcal{E} = W + K, \quad (16)$$

یا

$$K = \mathcal{E} - W. \quad (17)$$

W تابع کار آن ماده نامیده می شود و حداقل انرژی است که تابش می بایست داشته باشد تا بتواند الکترون را از سطح ماده بکند بدون اینکه به آن انرژی جنبشی بدهد. شکل ۴ دستگاهی را که پدیده فوتوالکتریک با آن مشاهده می شود. نور معمولاً فرابنفش به سطح یک فلز درون یک لوله تخلیه شده از هوا می تابد. الکترون های کنده شده را یک الکتروود که به صورت قیف در انتهای دیگر لوله تعبیه شده است جمع کرده و به این ترتیب یک جریان فوتوالکتریک که آن را با I نمایش می دهیم در مدار

Peter J. Debye⁶



شکل ۴: شکل ساده ی آزمایش فوتوالکتریک .

برقرار می شود. این جریان را می توان با یک آمپر متر اندازه گیری کرد. هرگاه قطب منفی مثبت باطری به الکتروود قیفی شکل وصل باشد، الکترون های کنده شده از سطح فلز شتاب می گیرند و با انرژی

$$K + eV \quad (18)$$

به الکتروود دیگر می رسند، که در آن e اندازه بار الکترون و V اندازه ولتاژ است. هرچه اندازه V بیشتر شود انرژی الکترون های رسیده به الکتروود سمت راست بیشتر شده و این امر باعث افزایش جریان فوتوالکتریک می شود. اما هر وقت که قطب مثبت باطری را به الکتروود قیفی شکل متصل کنیم این کار باعث کاهش انرژی جنبشی الکترون ها شده و جریان را کم می کند. وقتی که ولتاژ منفی $-V_0$ را بین الکتروود ها برقرار می کنیم، انرژی جنبشی الکترون های رسیده به الکتروود سمت راست به صفر می رسد به طوریکه دیگر هیچ جریانی بوجود نمی آید. بنابراین داریم

$$K - eV_0 = 0. \quad (19)$$

در نتیجه با اندازه گیری V_0 می توان انرژی جنبشی الکترون های کنده شده را به این ترتیب یعنی با اندازه گیری ولتاژ متوقف کننده تعیین کرد.

از نظر کلاسیک انتظار داریم که

الف: هرچه شدت نور تابیده شده بیشتر باشد، انرژی جنبشی الکترون های کنده شده بیشتر باشد. زیرا شدت نور بیشتر به معنای این است که دامنه میدان الکتریکی و در نتیجه نیرویی که به الکترون ها وارد می شود بیشتر است. هم چنین شدت نور بیشتر به معنای این است که الکترون های بیشتری کنده می شوند و سرعت بیشتری هم دارند که این دو اثر خود را به صورت افزایش جریان فوتوالکتریک نشان می دهد.

ب: مستقل از این که نور تابیده شده چه فرکانسی دارد، در صورتی که به اندازه مدت زمان کافی به سطح ماده تابیده شود، بتواند الکترون ها را از سطح فلز بکند. دلیل این انتظار هم این است که وقتی که نور به مدت زمان کافی به اتم می تابد، الکترون انرژی کافی جذب می کند تا بتواند خود را از قید اتم و سطح ماده رها کند.

ج: بسته به شدت منبع نور و فاصله آن از سطح ماده فاصله زمانی بین تابیدن نور و کنده شدن الکترون از سطح ماده می بایست از مرتبه دقیقه باشد. برای درک این نکته به مثال زیر توجه کنید:

مثال: یک چشمه نوری با توان خروجی یک وات در فاصله یک متری از سطح یک فلز قرار دارد. در این فاصله مقدار توانی که به سطح یک اتم با شعاع یک آنگستروم یا $10^{-10} m$ می رسد برابر است با:

$$P \approx 1 \times 10^{-20} \quad (20)$$

می دانیم که انرژی لازم برای کنده شدن الکترون از سطح فلز از مرتبه 10^{-19} ژول است. اگر همه توان تابش شده به سطح اتم توسط الکترونی که درون آن قرار دارد جذب شود مدت زمانی که لازم است که انرژی لازم برای کنده شدن جذب شود برابر است با:

$$\tau = \frac{10^{-18}}{10^{-20}} \approx 100s. \quad (21)$$

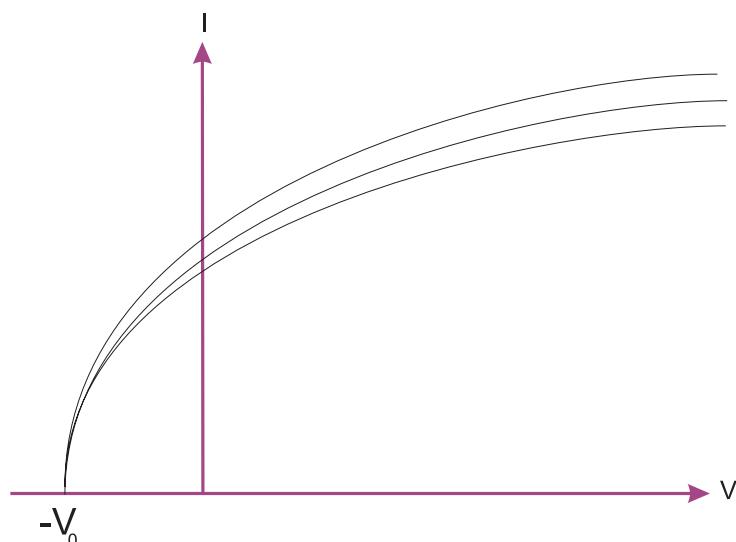
الف: همواره یک فرکانس آستانه وجود دارد، به نحوی که اگر فرکانس نور کمتر از این فرکانس آستانه باشد، هرچقدر هم که شدت نور را زیاد کنیم، الکترونی از سطح فلز کنده نخواهد شد.

ب: بعد از آنکه فرکانس نور تابیده از فرکانس آستانه بیشتر شد، انرژی الکترون های کنده شده به صورت خطی با فرکانس افزایش می یابد، شکل ۶.

ج: افزایش شدت نور اثری در انرژی الکترون های کنده شده ندارد و تنها تعداد آنها را زیاد تر خواهد کرد. افزایش تعداد الکترون ها خود را در افزایش شدت جریان خروجی نشان می دهد.

د: هیچ گونه فاصله زمانی بین تابش نور به فلز و کنده شدن الکترون ها ندارد. به صورت دقیق تر این فاصله زمانی از 10^{-9} ثانیه کمتر است.

بر اساس الگوهای کلاسیک خصلت های فوق را به هیچ وجه نمی توان توضیح داد زیرا در این الگوها میدان های الکتریکی و مغناطیسی ای که در نور وجود دارد الکترون های سطح فلز را به نوسان وادار می کنند و دامنه این نوسان بستگی مستقیمی به



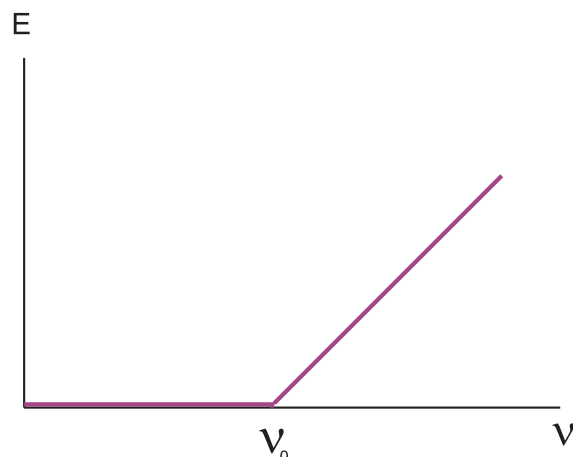
شکل ۵: جریان فوتوالکتریک برحسب ولتاژ بین الکتروودها برای شدت نورهای متفاوت .

شدت نور که همان شدت میدان های الکتریکی و مغناطیسی نور است دارد. بنابراین با هر فرکانسی می توان الکترون ها را از سطح فلز کند مشروط بر آنکه شدت نور از یک حد آستانه بیشتر باشد. هم چنین با افزایش فرکانس نور انرژی الکترون های کنده شده بیشتر نخواهد شد. هرگاه که شدت نور را افزایش دهیم انرژی الکترون های کنده شده نیز می بایست افزایش یابد، زیرا قسمتی از انرژی نور صرف کندن الکترون شده و مابقی آن می بایست به صورت انرژی جنبشی الکترون ها درآید. اهمیت اثر فوتوالکتریک آن است که از هر جهت که نگاه می کنیم تضاد نتایج تجربی اش با آزمایش با قاطعیت با فیزیک کلاسیک ناسازگار است، و از طرف دیگر کاربرد ایده کوانتای نور، آنچنانکه اینشتین پیشنهاد کرده است، با وضوح و سادگی خیره کننده ای تمام مشاهدات تجربی را توضیح می دهد.

پلانک در کار خود تنها قائل به گسیل و جذب تابش به صورت گسسته شده بود. در نظر وی انتشار نور همچنان مطابق با الگوی کلاسیک به صورت امواج پیوسته صورت می گرفت. مفهوم فوتون و البته نه نام آن به صورت بسته ای از انرژی تابشی نخستین بار در کار اینشتین برای توضیح اثر فوتوالکتریک پدیدار شد. وی نور تکفام با فرکانس ν را به صورت بارانی از بسته های انرژی $h\nu$ در نظر گرفت و توانست توصیف ساده ای از اثر فوتوالکتریک ارائه کند. هرگاه انرژی نور تکفام با فرکانس نور را به صورت $h\nu$ در نظر بگیریم و تصور کنیم که قسمتی از این انرژی به اندازه W صرف کندن الکترون می شود، بقیه آن به صورت انرژی جنبشی الکترون های معنی E پدیدار خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$E = h\nu - W. \quad (22)$$

طبیعی است که الکترون وقتی می تواند کنده شود که انرژی فوتون تابیده شده از W بیشتر باشد که به معنای آن است که فرکانس نور می بایست از یک مقدار آستانه $\nu_0 := \frac{W}{h}$ بیشتر باشد. بعد از این فرکانس آستانه انرژی الکترون به صورت خطی با فرکانس نور تابیده زیاد خواهد شد. و بالاخره هرچه که شدت نور را زیاد کنیم، یعنی هرچه تعداد فوتون های ورودی را زیاد



شکل ۶: انرژی الکترون های کنده شده از فلز برحسب فرکانس نور تابیده شده .

کنیم، انرژی الکترون های کنده شده بیشتر نخواهد شد، بلکه تعداد آنها بیشتر خواهد شد و این همان چیزی است که به تجربه می بینیم. به این ترتیب هر سه ویژگی عجیب اثر فوتوالکتریک که در چارچوب فیزیک کلاسیک غیرقابل توضیح بودند به سادگی توضیح داده می شوند.

اینشتین مقاله خود درباره اثر فوتوالکتریک را در سال ۱۹۰۵ یعنی همان سالی که سه مقاله بنیادی خود در فیزیک را منتشر کرد، به سالنامه فیزیک فرستاد. اثر وی نه تنها تاییدی بر نظریه پلانک در مورد جذب انرژی تابش به صورت مقادیر گسسته بود بلکه نشان می داد که نور در انتشار خود نیز به صورت بارانی از ذرات منتشر می شود. سالهای بعد بور توانست با استفاده از نظریه پلانک بازم گام های محکم تری در بسط نظریه کوانتومی بردارد اما قاطعترین تایید از تصویر ذره ای نور و وجود فوتون در سال ۱۹۲۳ یعنی سالها بعد از کار اولیه اینشتین به دست آمد. به جاست که در این جا کمی از خط سیر تاریخی منحرف شویم و به این کار، یعنی پژوهش کامپتون بپردازیم.

۵ اثر کامپتون

وقتی که نوری با فرکانس کم به سطح یک فلز می تابد نخواهد توانست الکترون های سطح فلز را بکند و تنها از سطح فلز پراکنده می شود. در تصویر کلاسیک میدان الکتریکی نور تابیده شده الکترون های سطح فلز را به نوسان درمی آورد. فرکانس این نوسان با فرکانس نور تابیده شده یکسان است. الکترون هایی که نوسان می کنند به نوبه خود نوری را با همان فرکانس تولید می کنند که ترکیب همه آنها نور پراکنده شده از سطح فلز را تولید می کند. بنابراین در نظریه کلاسیک طول موج نور تابیده شده می بایست با طول موج نور پراکنده شده یکسان باشد. اما مشاهده دقیق نشان می داد که همواره علاوه بر طول موج اولیه یک طول موج کمی بلند تر نیز در نور پراکنده شده وجود دارد و تفاوت این طول موج دوم با طول موج اولیه بستگی به زاویه پراکندگی



شکل ۷: آلبرت اینشتین

نور دارد. کامپتون در پژوهش های تجربی خود توانست این بستگی را پیدا کند که به شکل زیر است:

$$\lambda' - \lambda \propto (1 - \cos \theta), \quad (23)$$

که در آن θ زاویه بین پرتو پراکنده شده و پرتوی اولیه است. کامپتون توانست با کار بست اندیشه پلانک و اینشتین، این بار با در نظر گرفتن فوتون به مثابه یک گوی و نسبت دادن انرژی $h\nu$ و تکانه $\frac{h\nu}{c}$ به آن این اثر را به سادگی توضیح دهد. برای این کار وی تنها از قوانین پایستگی انرژی و تکانه و نگاه به مسئله به صورت یک برخورد الاستیک ساده بین فوتون و الکترون سود جست. هیچ چیز به اندازه این نمی توانست ماهیت ذره ای نور را به اثبات برساند. شکل ۲۱ استدلال کامپتون را نشان می دهد. در این شکل الکترون ساکن در نظر گرفته می شود و فوتون با انرژی $h\nu$ و تکانه $\frac{h\nu}{c}$ به آن برخورد می کند. بعد از برخورد فوتون منحرف شده و در زاویه θ با فرکانس ν' یعنی انرژی $h\nu'$ و تکانه $\frac{h\nu'}{c}$ پراکنده می شود. تکانه الکترون بعد از برخورد q است. قانون بقای انرژی به ما می گوید که

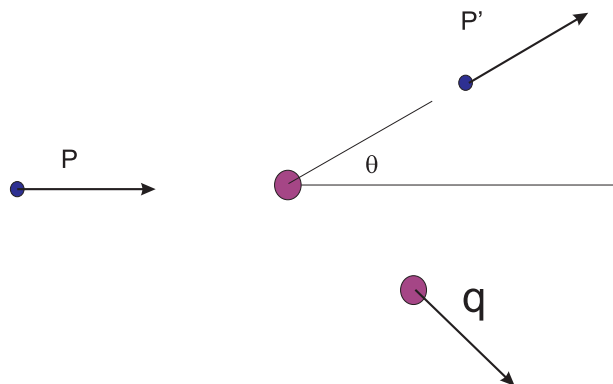
$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{m^2c^4 + q^2c^2} \quad (24)$$

و قانون بقای تکانه می گوید:

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{q} \quad (25)$$

یا

$$(P - P')^2 = q^2 \longrightarrow P^2 + P'^2 - 2PP' \cos \theta = q^2. \quad (26)$$



شکل ۸: اثر کامپتون: گوی های کوچک نشان دهنده فوتون و گوی های بزرگ تر نشان دهنده الکترون هستند.

با ترکیب رابطه 24 و 26 به نتیجه زیر می رسیم:

$$h\nu\nu'(1 - \cos\theta) = mc^2(\nu - \nu'). \quad (27)$$

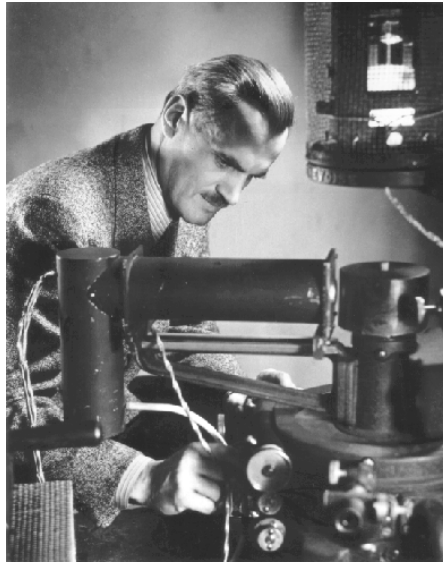
و یا

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \quad (28)$$

این رابطه درست بیانگر همان چیزی است که در تجربه می بینیم. کمیت $\frac{h}{mc}$ بعد طول دارد و طول موج کامپتون برای الکترون نامیده می شود. برای الکترون مقدار عددی آن برابر است با

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \approx 2.41 \times 10^{-12} \text{ m} = 0.0242 \text{ Angstrom}. \quad (29)$$

کوچکی این عدد نشان می دهد که تفاوت طول موج های تابیده و پراکنده شده در مقایسه با طول موج نور مرئی بسیار کوچک است و به همین دلیل می بایست برای دیدن اثر کامپتون از طول موج های کوتاه استفاده کرد. درعین حال این عدد نشان می دهد که تا چه حد آشکار ساختن این تفاوت در آزمایشهای کامپتون دشوار بوده است. اینکه چرا علاوه بر این طول موج بلند تر همواره طول موج اولیه نیز در هر زاویه ای وجود دارد بخاطر آن است که فوتون ها علاوه بر الکترون ها با هسته ها نیز برخورد می کنند و از آنها نیز پراکنده می شوند و برای هسته ها طول موج کامپتون حدوداً دوهزار بار کوچکتر است.



شکل ۹: آرتور کامپتون

به این ترتیب تا سال ۱۹۲۳ کمترین شکی باقی نمانده بود که نور از ذراتی به نام فوتون با انرژی و تکانه معین تشکیل یافته است و این ذرات درست مثل گویهای کوچک در برخورد با دیگر ذرات عمل می کنند و برخورد آنها تابع قوانین مکانیک است. تصویر ذره ای نور در این سال کامل شده بود. در این زمان سه قرن از تثبیت تصویر موجی نور می گذشت. در این مدت طولانی گستره وسیعی از پدیده های مربوط به نور، مثل انعکاس، شکست و تداخل و پراکندگی به کمک تصویر موجی نور توصیف شده بودند. تلسکوپ ها، میکروسکوپ ها، عدسی ها، عینک ها و دوربین ها همه بر همین اساس ساخته و پرداخته شده و رفتار آنها مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته بود. نورشناخت موجی که توسط هویگنس اولین سنگ بناهای آن گذاشته شده بود، به کمک نظریه الکترومغناطیسی ماکسول مبنای بسیار محکمی پیدا کرده بود که می گفت نور چیزی جز امواج الکترومغناطیسی نیست. به کمک نظریه الکترومغناطیس بود که برهم کنش نور و ماده در بسیاری از موارد نیز توضیح داده می شد. اما اینک به نظر می رسید که که منازعه ای که سیصد سال پیش در باره ماهیت موجی یا ذره ای نور به نفع هویگنس حل و فصل شده بود، دوباره و این بار به نفع نیوتن و تصویرش از ذرات نور احیا شده است.

۶ مدل اتمی بور

در سال ۱۹۱۱ رادرفورد مدل اتمی اش را ارائه داد که بخوبی از عهده توضیح آزمایش های پراکندگی ذرات آلفا از اتم ها برمی آمد. در مدل رادرفورد، یک هسته ی بسیار کوچک، تقریباً تمامی جرم اتم را در بردارد و الکترون ها مثل سیارات منظومه شمسی در مدارهای دایره ای به دور آن می چرخند. در این زمان سیصد سال از طرح منظومه خورشید مرکزی کپرنیک می گذشت و مدل او که در آغاز انقلابی و غیر قابل قبول می نمود، برای کلیه دانشمندان حکم طبیعی ترین حرکات را یافته بود. بار دیگر غیرقابل قبول ترین نظریه ی یک دوران در طی گذشت زمان به تصویری روزمره و عادی تبدیل گشته بود. با وجود توفیق کم نظیر، مدل رادرفورد چیزی کم داشت. اگر قبول کنیم که اتم دنیای کوچک متحرکی است، چگونه می توان این امر را توجیه کرد که هرگز از حرکت باز نمی ایستد و تنها ماشین دائم حرکتی است که در طبیعت یافت می شود. بر مبنای الکترومغناطیس کلاسیک الکترونی که به دوره هسته اتم گردش می کند می بایست به دلیل شتابدار بودن پیوسته تابش کند و بدلیل از دست دادن

انرژی خیلی زود به روی هسته سقوط کند. معادله ای که بر حرکت الکترون به دور هسته حاکم است عبارت است از:

$$\frac{mv^2}{r} = K \frac{e^2}{r^2} \quad (30)$$

که در آن $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

نکته مهم آن است که این معادله به خودی خود شعاع یا سرعت الکترون را تعیین نمی کند. بسته به این که الکترون چه انرژی داشته باشد می تواند هر سرعتی و هر شعاعی داشته باشد. درحقیقت می دانیم که انرژی الکترون برابر است با:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - K \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}mv^2 \quad (31)$$

که در نوشتن تساوی آخراز معادله قبلی استفاده کرده ایم. بنابراین هرگاه انرژی الکترون معلوم شود، می توان سرعت حرکت آن به دور هسته و سپس با استفاده از معادله قبلی شعاع حرکت آن به دور هسته را تعیین کرد. به عبارت دیگر در مدل رادفورد هیچ چیزی وجود ندارد که انرژی الکترون و در نتیجه شعاع اتم را به طور طبیعی تعیین کند و ما در واقع نمی دانیم که چرا اتم ها اینقدر کوچکند. این سوال به خودی خود برای دانشمندان اهمیت بنیادین داشته است که چه چیزی اندازه اتم ها را تعیین می کند؟

اگر شعاع اتم ها را حدود یک آنگستروم یعنی 10^{-10} متر بگیریم آنگاه می توان مرتبه سرعت و انرژی الکترون را تخمین زد. سرعت الکترون در حدود یک صدم سرعت نور و انرژی آن حدود چند الکترون ولت است. حال می توان از الکترومغناطیس کلاسیک کمک گرفت که بر مبنای آن ذره ای با بار الکتریکی e و شتاب a با نرخ

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2 a^2}{3 c^3} \quad (32)$$

از خود انرژی تابشی ساطع می کند. برای الکترونی که در شعاع R با سرعت v دور هسته می چرخد، شتاب برابر است با:

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (33)$$

در نتیجه با تقسیم انرژی بر نرخ تابش انرژی می توان دریافت که الکترون بعد از چه مدت می بایست به روی هسته سقوط کند. این مدت تقریباً برابر است با:

$$\tau \approx \frac{\frac{1}{2}mv^2}{P} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2 v^4}{3 R^2 c^3}} \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{3 m R^2 c^3}{4 e^2 v^2} \quad (34)$$

اگر شعاع چرخش الکترون به دور هسته را از مرتبه یک آنگستروم و سرعت حرکت آن را از مرتبه یک صدم سرعت نور بگیریم این مدت زمان برابر خواهد شد با:

$$\tau \approx \frac{3}{4} \frac{1}{9 \times 10^9} \frac{9 \times 10^{-31} \times 10^{-20} \times 3 \times 10^8}{(1.6 \times 10^{-19})^2 \times 10^{-4}} \approx 10^{-10} \text{ ثانیه} \quad (35)$$



شکل ۵۱: نیلزبور، در حوالی سالهای ۱۹۱۵

اگر چه این زمان در مقایسه با مدت زمان گردش الکترون به دور هسته یعنی $T = \frac{2\pi R}{v} \approx 2 \times 10^{-16}$ ثانیه، زمانی طولانی است ولی نشان می دهد که الکترون سرانجام بر روی هسته سقوط می کند.

در سال ۱۹۱۱ نیلزبور که به تازگی در ۱۹۱۱ با درجه دکتری از دانشگاه کپنهاگ فارغ التحصیل شده، با اشتیاق زیاد راهی دانشگاه کمبریج در انگلستان شده بود تا تحت نظر جی. جی. تامسون در باره خواص اتم ها مطالعه کند.

«... پدر عزیزم، خوشحالم که یادداشت هایم در باره سخنرانی جینز برایتان جالب بوده است. مجموعه کامل یادداشت هایم را به خانه می آورم تا باهم در باره اش کار کنیم. جینز اخیراً مشغول کار بر روی فشار تشعشع بوده است. ضمناً از یک دانمارکی چیزهای خیلی زیادی یاد گرفتم که وقتی دیده بود من در سخنرانی جینز از او سوال می کنم، بعد از سخنرانی پیش من آمد و درباره سخنرانی با من حرف زد. به نظر می رسد که چیزهای زیادی در این باره می داند. از همه جالب تر این که اسمش بور بود یا چیزی شبیه به این...»⁷

پس از مدت کمی بور تغییر مکان داد و در ۱۹۱۲ به دانشگاه منچستر رفت تا تحت نظر رادرفورد به کار پردازد. این درست یک سال بعد از آن بود که رادرفورد مدل اتمی اش را ارائه داده بود و بور می خواست که پاسخی برای معمای ساختمان اتمی پیدا کند.

«... نمی دانی چقدر بودن در این جا خوب است، جایی که کسان زیادی هستند که می توان با آنها صحبت کرد و یا کسانی که مطالب بسیاری در باره این چیزها می دانند. استاد رادرفورد به هر چیزی که فکر می کند ایده تازه ای

⁷از نامه ویلیام لارنس براگ (در آن موقع دانشجوی کمبریج) به پدرش ویلیام هنری براگ.

در آن است علاقه نشان می دهد. در سالهای اخیر او روی یک مدل اتمی کار کرده است که به نظر می رسد از هر مدل اتمی دیگری که تا کنون عرضه شده است پایه و اساس محکمتری دارد...»⁸

برای دنیای اتمی رادرفورد هیچ واحد طبیعی انرژی وجود نداشت و الکترونی که به دور هسته می چرخید می توانست هر مقدار انرژی و در نتیجه هر مقدار شعاع و سرعت داشته باشد. نخستین ابتکار شجاعانه بور آن بود که این واحد طبیعی را به طرز زیبایی وضع کند. فرض اول وی آن بود که

الکترون در مدارهای دایره ای به دور هسته اتم می چرخد و تنها مدارهای مجاز برای آن عبارت اند از مدارهایی که تکانه زاویه ای آنها مضربی از $\frac{h}{2\pi}$ یعنی ثابت پلانک باشد.

با قبول چنین فرضی یعنی اینکه ثابت h واحد طبیعی تکانه زاویه ای برای اتم است، بلافاصله همه ابعاد، انرژی ها، سرعت ها و فرکانس های درون اتم تعیین می شوند.

«... اوضاع به خوبی پیش می رود چون فکر می کنم چیزهای جالبی کشف کرده ام. البته هنوز مطمئن نیستم چون آنقدر که در فکر کردن خنگ هستم در محاسبه جزئیاتش سریع نبوده ام. امیدوارم که محاسباتم را تمام کنم و آن را قبل از این که این جا را ترک کنم به رادرفورد نشان دهم...»⁹

استدلال بور چنین بود: فرض کنید که الکترون در مداری دایره ای به شعاع r و با سرعت ثابت v به دور هسته می چرخد. بر مبنای فرض نخست داریم:

$$mvr = n\hbar, \quad (36)$$

که در آن n یک عدد صحیح غیر صفر است. کاربرد قانون نیوتن در مورد الکترون به ما می گوید:

$$K \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (37)$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ترکیب این دو رابطه به دست می دهد:

$$v = \frac{Ke^2}{n\hbar} \quad (38)$$

این رابطه و دیگر روابط مربوط به ساختمان اتم را می توان به شکل بهتری نوشت اگر یک ثابت بدون بعد α به صورت

$$\alpha := \frac{Ke^2}{\hbar c} \quad (39)$$

⁸ از نامه نیلز بور از منچستر به برادرش هارالد بور، ۱۲ ژوئن ۱۹۱۲

⁹ از نامه نیلز بور به برادرش هارالد بور، ۱۷ ژوئن ۱۹۱۲.

تعریف کنیم. این ثابت بدون بعد ثابت ساختار ریز¹⁰ نامیده می شود و مقدار عددی اش برابر است با $\alpha \approx \frac{1}{137}$. در نتیجه رابطه 38 به شکل زیر در می آید:

$$\boxed{v_n = \alpha \frac{c}{n}}. \quad (40)$$

باجایگذاری این مقدار در رابطه 36 می توانیم شعاع را بدست آوریم:

$$\boxed{r_n = \frac{n^2 \hbar}{\alpha m c}} \quad (41)$$

عدد n عدد کوانتومی اصلی نامیده می شود و مقدارهای صحیح غیر صفر اختیار می کند. اولین مدار مربوط به عدد $n = 1$ است. در این مدار سرعت الکترون برابر با αc یعنی $\frac{1}{137}$ سرعت نورو شعاع آن ۱۳۷ برابر

$$\lambda_c := \frac{\hbar}{mc} = 0.00382 \text{ Angstrom}$$

است. این شعاع با نماد a_0 نشان داده می شود و به آن شعاع بور می گویند. مقدار آن برابر است با:

$$\boxed{a_0 := \frac{1}{\alpha} \lambda_c = 137 \times \frac{0.024}{2\pi} \text{ Angstrom} = 0.52 \text{ Angstrom}.} \quad (42)$$

انرژی الکترون از رابطه زیر حساب می شود:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - K \frac{e^2}{r} \quad (43)$$

که با توجه به رابطه $m \frac{v^2}{r} = K \frac{e^2}{r^2}$ برابر است با:

$$E = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}K \frac{e^2}{r}. \quad (44)$$

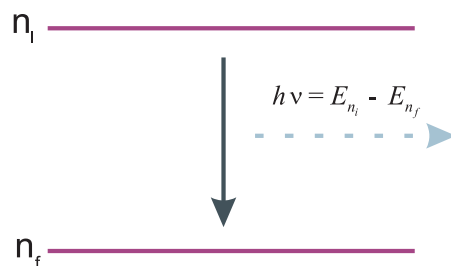
بنابراین وقتی که الکترون در مدار n ام است انرژی آن برابر است با:

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}mv_n^2 = -\frac{1}{2}m\left(\frac{\alpha c}{n}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}mc^2}. \quad (45)$$

انرژی mc^2 ، انرژی در حال سکون الکترون است و مقدار آن برابر است با 0.511 Mev . بنابراین انرژی الکترون در اولین مدارش، یعنی انرژی پایه آن برابر است با:

$$\boxed{E_1 := -\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{137}\right)^2 \times 0.511 \text{ Mev} = -13.6 \text{ ev}.} \quad (46)$$

¹⁰Fine Structure Constant



شکل ۱۱: اصل موضوع سوم بور: اتم فقط وقتی تابش می کند که از یک تراز انرژی به تراز انرژی پایین تر سقوط کند.

به این ترتیب انرژی الکترون در مدار شماره n برابر خواهد بود با:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad (47)$$

به این ترتیب می بینیم که بور با وارد کردن ثابت پلانک به درون دنیای اتمی به یکباره همه ساختارهای آن را تعیین کرده است. اکنون می توانیم بگوییم که شعاع طبیعی برای اتم چقدر است و یا سرعت های طبیعی یا انرژی های طبیعی برای الکترون چقدر هستند.

آیا این مدارها پایدارند و الکترون وقتی که در این مدارهاست به روی هسته سقوط نمی کند؟ چگونه می توان به معمای سقوط الکترون به روی هسته، یعنی همان مشکل اساسی مدل رادفورد پاسخ گفت. بور در این جا یک گام شجاعانه برداشت که به کلی با فیزیک کلاسیک تباین داشت، کاری که بیشتر به پاک کردن صورت سوال شبیه بود. فرض دوم وی آن بود که

هنگامی که الکترون در یک مدار گردش می کند هیچ نوع تابشی از خود گسیل نمی کند و انرژی خود را از دست نمی دهد.

بجای آن وی فرض کرد که

الکترون تنها وقتی که از مداری با انرژی E_1 به مداری با انرژی E_2 سقوط کند، انرژی خود را با گسیل فوتونی با فرکانس $\nu = \frac{E_1 - E_2}{h}$ از دست می دهد. برعکس هروقت که الکترون فوتونی را با این انرژی جذب کند از مدار با انرژی E_2 به مدار با انرژی E_1 برانگیخته خواهد شد. شکل (۱۱).

آیا این فرض ها و مدل اتمی ای که بر مبنای آنها ساخته شد صحیح بودند؟ چگونه می شد این مدل را ردّ یا قبول کرد؟ در اینجا بور به طرز هوشمندانه ای به داده های تجربی ناشی از طیف نگاری اتم ها استناد کرد، یعنی تنها جاییکه ساختمان

نام سری	محدوده طول موج	رابطه‌ی سری
<i>Lyman</i>	فوق بنفش	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots$
<i>Balmer</i>	نزدیک فوق بنفش و مرئی	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots$
<i>Paschen</i>	مادون قرمز	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots$
<i>Brackett</i>	مادون قرمز	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots$
<i>Pfund</i>	مادون قرمز	$\kappa = R_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 6, 7, 8, \dots$

خط‌های طیفی برای اتم هیدروژن: 1:

درونی اتم‌ها به کسانیکه از بیرون به آن نگاه می‌کنند آشکار می‌شود.

در آن زمان سالها بود که طیف تابشی اتمها مورد مطالعه و اندازه‌گیری دقیق قرار گرفته بود. طیف تابشی یا نشری اتم‌های گوناگون یک طیف پیوسته نیست بلکه از مجموعه‌ای از خطوط با فرکانس‌های معین تشکیل شده است. هم‌چنین وقتی نور سفید به این اتم‌های می‌تابانیم و به طیف جذبی آنها نگاه می‌کنیم، می‌بینیم که همان خطوط طیف جذبی این بار به صورت تیره در زمینه روشن نور سفید وجود دارند. به این ترتیب یک اتم تنها فرکانس‌های معینی را تابش و یا جذب می‌کند. طیف یک اتم را می‌شد به مثابه اثر انگشت آن در نظر گرفت که در هر شرایطی می‌توانست برای شناسایی یک اتم به کار رود. تا آن موقع با طیف‌سنجی‌های دقیق روابط معینی بین این خطوط یافته شده بود و بعد‌ها نیز روابط بازم بیشتر پیدا شد. معلوم شد که می‌توان خطوط بسیار درهم و برهم طیف را به صورت دسته‌های جداگانه‌ای دسته‌بندی کرد و در هر دسته نظم خاصی بین فرکانس‌ها یا طول موج‌های این خطوط برقرار است. در مورد اتم هیدروژن چندین سری از این خطوط شناسایی شدند که امروزه به نام کاشفان آنها نامگذاری شده‌اند. فرکانس خطوط طیفی چند تا از این دسته‌ها در جدول ۶ نشان داده شده‌اند. در این جدول κ عکس طول موج یعنی $\frac{1}{\lambda}$ و R_H کمیتی است با بعد عکس طول که ثابت رایید برگ برای اتم هیدروژن نامیده می‌شود. مقدار این ثابت برابر است با:

$$R_H = 10967757.6 \pm 1.2 \text{ m}^{-1}. \quad (48)$$

بر مبنای مدل بور هرگاه الکترون از مدار n_i به مدار n_f بجهد، انرژی $E_{n_i} - E_{n_f}$ را به صورت فوتون آزاد می‌کند. فرکانس این فوتون برابر خواهد بود با:

$$\nu := \frac{E_{n_i} - E_{n_f}}{h} = \frac{E_1}{h} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right). \quad (49)$$

برای چنین فوتونی می توان عکس طول موج را بدست آورد که برابر خواهد بود با:

$$\kappa = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{|E_1|}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (50)$$

مقدار عددی ثابت $\frac{|E_1|}{hc}$ برابر است با:

$$\frac{|E_1|}{hc} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{mc}{h} = \frac{\alpha^2}{4\pi\lambda_c} \approx 10988150.39 \text{ m}^{-1}, \quad (51)$$

که با تقریب بسیار خوبی با ثابت رایدربرگ یعنی R_H مساوی است. بدین ترتیب بور توانست با توصیف دقیقی از طیف مرئی اتم هیدروژن، تایید تجربی استواری برای مدل خود پیدا کند. قدم بعدی آن بود که قسمت های دیگر طیف، از جمله طیف نامرئی و اشعه ایکس نیز مورد بررسی قرار گیرند. این آزمایش در سال ۱۹۱۳ در آزمایشگاه رادرفورد انجام گرفت و باز هم به تایید نظریه بور انجامید. کسیکه این آزمایش را انجام داد، مرد جوان بیست و هفت ساله ای بود به نام هاری موزلی (*Harry Moseley*) که متأسفانه کارنامه علمی اش به همین محدود ماند، زیرا در جریان جنگ اول جهانی به سال ۱۹۱۵ کشته شد.

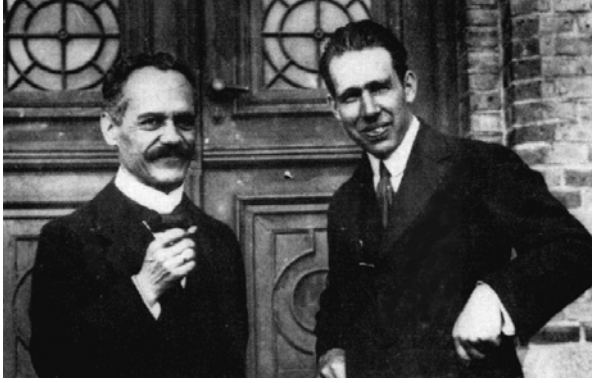
در تاریخ تحول نظریه کوانتومی کار بور اهمیت بسیار زیادی دارد، زیرا وی توانست با کار بست ایده پلانک و با درهم شکستن قوانین فیزیکی که تا دو قرن بعد از نیوتن دوام آورده بودند، برای اولین بار پرده از ساختمان پیچیده ای اتم بردارد. تا آن هنگام ایده های کوانتومی به صورت جداگانه هر کدام برای توصیف آزمایشی خاص به کار گرفته شده بودند، اما کار بور سنتز کامل و موفقی از همه اینها بود آن هم برای توصیف ساختمان اتم. اکنون ساختمان اتم نیز چون جهان نیوتن دارای پایه ای ریاضی شده بود. طی یک دهه بعد بور و همکارانش در موسسه فیزیک نظری ای که در دانمارک برای بسط پژوهش های وی ساخته شده بود، نظریه اتمی و مدل بور را توسعه دادند. نخست زومرفلد و ویلسون اصل کوانتش بور را بر مبنای محکم تر و عام تری استوار ساختند.

«... همکار عزیز، از این که کار بسیار جالب تان را برایم فرستاده اید سپاسگزارم. باید بگویم که قبلاً آن را در مجله فلسفی مطالعه کرده بودم. مسئله امکان محاسبه ثابت رایدربرگ و ربط دادن آن به ثابت پلانک مدتی بود که به ذهن من نیز رسیده بود. چند سال قبل من در این باره گفتگویی با دیبای داشتم. اگر چه در حال حاضر من هنوز نسبت به هر نوع مدل اتمی شگاک هستم، با این وجود محاسبه ثابت رایدربرگ بدون هیچ گفت و گویی یک موفقیت بزرگ است... آیا قصد دارید که مدل اتمی خود را برای اثر زیمن نیز به کار ببرید؟ من میل دارم که روی این مسئله کار کنم. شاید بتوانم وقتی که در ماه اکتبر آقای رادرفورد را می بینم از برنامه ی شما باخبر شوم.»¹¹

بر مبنای این اصل کوانتشی که بعد ها اصل کوانتش بور—زومرفلد نام گرفت در هر حرکت تناوبی به ازای هر زوج مختصه ی مزدوج (q, p) یک اصل کوانتش به صورت زیر وجود دارد

$$\oint pdq = n_q h, \quad (52)$$

¹¹ از نامه آرنولد زومرفلد به نیلز بور، ۴ سپتامبر ۱۹۱۳.



شکل ۲۱: نیلز بور و آرنولد زومرفلد

که در آن n_q یک عدد صحیح است. به کمک این اصل کوانتتش انرژی نوسانگر هارمونیک چنانکه در کار اولیه پلانک مطرح شده بود و کوانتتش انرژی یک سیستم بسیار متفاوت مثل اتم هیدروژن هر دو ناشی از یک اصل کلی تر بودند که به آن کوانتتش کنش (*Quantization of Action*) می گفتند، زیرا در مکانیک کلاسیک کمیتی مثل $\oint pdq$ کنش خوانده می شد. به عنوان مثال در تم هیدروژن کوانتتش کنش برای دو مختصه (θ, P_θ) به شکل زیر درمی آید:

$$\oint p_\theta d\theta = nh, \quad (53)$$

اما از آنجا که در حرکت دایره ای $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = mr^2\omega$ مقدار ثابتی است رابطه بالا به شکل زیر درمی آید:

$$\oint mr^2\omega d\theta = mr^2\omega 2\pi = nh, \quad (54)$$

و یا

$$mvr = n\hbar$$

که همان اصل کوانتتش بوراست که منجر به کوانتتش انرژی اتم هیدروژن مطابق رابطه 45 می شود. دقت کنید که برای مدارهای دایره ای $dr = 0$ و در نتیجه این مدارهای دایره ای متناظر با عدد کوانتومی $n_r = 0$ هستند.

اهمیت قواعد کوانتتش بور- زومرفلد در این است که چارچوب یکنواختی برای قواعد کوانتتش بدست می دهند. به عنوان مثال ما می توانیم با استفاده از این قواعد کوانتتش سطوح انرژی نوسانگر هارمونیک را که قبلاً توسط پلانک تنها به صورت یک اصل موضوع بیان شده بود بدست آوریم.

در نوسانگر هارمونیک کوانتتش عمل برای دو مختصه (x, p) به صورت زیر است

$$\oint pdx = nh. \quad (55)$$

می توان طرف چپ این انتگرال را برای یک نوسانگر هارمونیک براحتی محاسبه کرد. می نویسیم

$$\oint pdx = \oint m\dot{x}dx = \oint m\dot{x}^2 dt = \int_0^T mv^2 dt \quad (56)$$

دریک نوسانگر هارمونیک می دانیم که

$$x = A \sin \omega t, \quad v = A\omega \cos \omega t, \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (57)$$

بنابراین

$$\oint p dx = \int_0^T mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t dt = mA^2\omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt, \quad (58)$$

با توجه به اینکه $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$ مقدار انتگرال بالا خواهد شد

$$\oint p dx = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 T = nh, \quad (59)$$

و یا

$$E = \frac{nh}{T} = n\hbar\omega. \quad (60)$$

به این ترتیب می بینیم که ایده کوانتوم عمل، چنانکه در سالهای اولیه نظریه کوانتومی نامیده می شد، به طور یکنواخت هم به کوانتتس سطوح انرژی نوسانگر هارمونیک و هم به کوانتتس سطوح انرژی اتم هیدروژن می انجامد. سپس با استفاده از مفهوم کوانتتس عمل آرنولد زومرفلد توانست مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن را تعمیم داده به طوریکه مدارهای بیضی را نیز شامل شود. در مدل بور فرض می شد که مدارهای الکترون دایره ای اند و می دانیم که دریک مسئله نیروی مرکزی مدارها عموماً بیضی شکل هستند. برای چنین مدارهایی اصل کوانتتس عمل به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \oint p_\theta d\theta &= n_\theta h \\ \oint p_r dr &= n_r h. \end{aligned} \quad (61)$$

برای مدارهای دایره ای رابطه دوم وجود ندارد یا به عبارت بهتر هر دو طرف تساوی برابر صفر هستند. به عبارت دیگر یک مدار بیضی با دو عدد کوانتومی (n_θ, n_r) توصیف می شود و مدار دایره ای حالت خاصی است که با زوج $(n_\theta, 0)$ مشخص می شود. از آنجا که در حرکت تحت نیروی مرکزی p_θ برابر با تکانه زاویه ای L و یک ثابت حرکت است، شرط کوانتتس اول به صورت زیر در می آید:

$$L = n_\theta \hbar, \quad (62)$$

که تفاوتی با شرط کوانتشی بور ندارد. اما زومر فلد نشان داد که شرط کوانتشی دوم به صورت زیر درمی آید:

$$L\left(\frac{a-b}{b}\right) = n_r h, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (63)$$

که در آن a قطر بزرگ بیضی و b قطر کوچک آن است. با حل معادلات حرکت برای مدارهای بیضی زومر فلد توانست روابط زیر را برای اندازه قطرهای بزرگ و کوچک و هم چنین انرژی مدارها بدست آورد:

$$\begin{aligned} a &= n^2 a_0 \\ b &= n n_\theta a_0 \\ E &= \frac{E_1}{n^2}, \end{aligned} \quad (64)$$

که در آن a_0 شعاع بور (رابطه $a_0 = \frac{h^2}{m e^2}$) و E_1 انرژی حالت پایه اتم بور یعنی $E_1 = -\frac{1}{2} m c^2 \alpha^2$ است. از آنجا که عدد کوانتومی n_r مقادیر صحیح مثبت و شامل صفر و n_θ مقادیر صحیح مثبت را اختیار می کند، عدد کوانتومی n مقادیر صحیح مثبت را اختیار می کند. به این ترتیب بهتر است در اینجا نامگذاری خود را اندکی تغییر دهیم تا با آنچه که بعد ها در مکانیک کوانتومی جدید یاد خواهیم گرفت مطابقت کند. از این به جای (n_r, n_θ) از دو عدد کوانتومی $(n := n_r + n_\theta, l := n_r)$ استفاده می کنیم. به این ترتیب روابط پیشین به صورت زیر درمی آیند:

$$\begin{aligned} a &= n^2 a_0 \\ b &= n(n-l) a_0 \\ E &= \frac{E_1}{n^2} \\ L &= (n-l) h. \end{aligned} \quad (65)$$

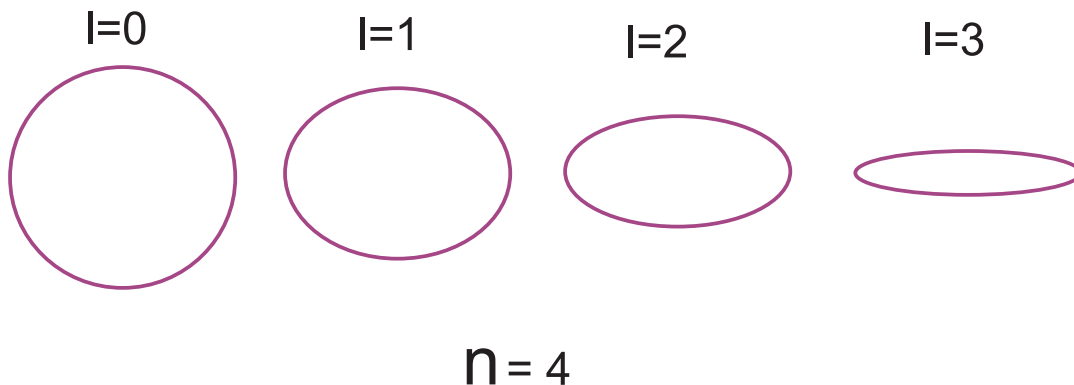
که در آن عدد کوانتومی n موسوم به عدد کوانتومی اصلی مقادیر زیر را اختیار می کند:

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

و به ازای هر عدد کوانتومی اصلی n عدد کوانتومی l مقادیر زیر را اختیار می کند:

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (67)$$

به این ترتیب مدارهای با $l = 0$ مدارهای دایره ای و مدارهای با $l = n-1$ کشیده ترین بیضی ها هستند. ولی به ازای یک n همه این مدارها دارای یک انرژی هستند. شکل (۴۱) مدارهای الکترون را برای $n = 4$ نشان می دهد. انرژی الکترون در این مدارها یکسان است.



شکل ۳۱: مدارهای الکترون در مدل زومرفلد برای اتم هیدروژن

کار مهم دیگر زومرفلد آن بود که اثرات نسبیتی ناشی از سرعت زیاد الکترون را نیز در نظر گرفت و نشان داد که بخاطر این اثرات، واگنی سطوح انرژی از بین می رود، به این معنا که انرژی به هر دو عدد کوانتومی n و l بستگی پیدا می کند. رابطه وی برای انرژی الکترون در یک تراز (n, l) به صورت زیر است:

$$E_{n,l} = -\frac{E_1}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{n-l} - \frac{3}{4n} \right) \right]. \quad (68)$$

بعد از آن به مدت چندین سال انیستینوی بور در کپنهاگ محل آمد و شد و تبادل نظر کسانی بود که در مراکز علمی دنیا بر روی جنبه های گوناگون نظریه کوانتومی کار می کردند.

آن سالها که یک همکاری بی نظیر بین یک نسل کامل از فیزیکدانان از کشورهای مختلف قدم به قدم و مرحله به مرحله به تعمیم منطقی نظریه مکانیک و الکترومغناطیس انجامید، سالهای قهرمانی فیزیک کوانتومی نامیده شده است. برای هرکسی که در این تجربه سهیم بوده است این یک امر فراموش نشدنی خواهد بود که چگونه با ترکیبی از راه های مختلف و معرفی اسلوب های مناسب ریاضی، شیوه جدیدی برای توصیف جهان فیزیکی تدوین یافت. برای چنین کاری موانع بسیاری می بایست از پیش روبرداشته شود، و بسیاری اوقات این کار توسط جوانترین همکاران ما صورت گرفت...»¹²

روزهای اول، کار من در انستیتوی بور آسان نبود. یکباره خود را مواجه با عده زیادی جوان با استعداد از چهارگوشه جهان دیدم که همگی در زباندانی و زبان آوری و حسن معاشرت و هم در آشنایی با فیزیک از من بسیار برتر بودند. بور را زیاد نمی دیدم. ظاهراً سرش به کار اداره انستیتو گرم بود و بدیهی بود که من حق نداشتم بیش از دیگر اعضای انستیتو مزاحم وقت او شوم. اما چند روز بعد به اتاق من آمد و از من خواست که چند روزی برای

¹² نیلزبور، خطا به یاد بود رادرفورد، ۱۹۵۸.

پیاده گردی در جزیره زیلند با او همراه شوم. گفت که در خود انستیتو فرصت چندانی برای گفتگوهای طولانی نیست و می خواهد مرا بهتر بشناسد. این بود که دو نفری کوله بر پشت به راه افتادیم....¹³

در این سالها بود که جنبه های مختلف مدل اتمی بور مورد مطالعه وسیع قرار گرفت ، به عنوان مثال سعی می شد که الگوی اتمی بور برای توضیح رفتار اتم در میدان الکتریکی (شکافت خطوط طیفی موسوم به اثر اشتارک) ، یا میدان مغناطیسی (شکافت خطوط طیفی موسوم به اثر زیمنان) ، و نظایر آن بکار برده شود. هم چنین سعی می شد که مدل اتمی بور به اتم های چند الکترونی تعمیم داده شود. برای درک دشواری هایی که در این راه وجود داشته است بهتراست ساده ترین اتم یعنی اتم هلیوم را در چارچوب نظریه کوانتومی قدیمی مطالعه کنیم. فرض می کنیم که هر دو الکترون اتم هلیوم در مدارهای دایره ای به شعاع های r_1 و r_2 به دور هسته هلیوم می چرخند. در این صورت اگر بخواهیم اصل کوانتس بور را برای این دو مدار به کار ببریم باید بنویسیم

$$mv_1 r_1 = n_1 \hbar \quad mv_2 r_2 = n_2 \hbar. \quad (69)$$

معادلات حرکت الکترون ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= -K \frac{2e^2}{r_1^3} \vec{r}_1 + K \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ m \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= -K \frac{2e^2}{r_2^3} \vec{r}_2 + K \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \end{aligned} \quad (70)$$

حال آیا می توان با استفاده از این روابط مقادیر گسسته ای برای انرژی اتم که به صورت زیر است بدست آورد؟

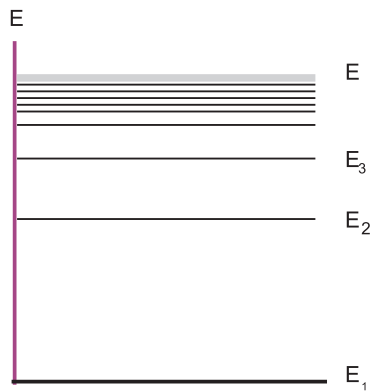
$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - K \frac{2e^2}{r_1} - K \frac{2e^2}{r_2} + K \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (71)$$

پاسخ این سوال منفی است. به عبارت دیگر نظریه قدیمی کوانتومی نمی توانست طیف ساده ترین اتم ها مثل اتم هلیوم را از نظر کمی به دقت توصیف کند. هم چنین در مورد اتم هیدروژن اگر چه می شد فرکانس خطوط تابشی را از مدل بور استخراج کرد، ولی شدت این خطوط را به هیچ وجه نمی شد از مدل قدیمی کوانتومی محاسبه کرد. با این وجود پیشرفت های پدیده شناسی و کیفی بسیاری در این سالها صورت گرفت، که می توانست به تقریب از پس توصیف بعضی چیزها برآید.

۱.۶ اصل تناظر (Correspondence Principle)

یکی از اصولی که توسط بور وضع شده بود و اغلب مورد استفاده قرار می گرفت، اصلی بود موسوم به اصل تناظر یا *Correspondence Principle*.

در واقع هرگاه به شکل ?? نگاه کنیم متوجه می شویم که به ازای اعداد کوانتومی بزرگ n دیگر گسسته بودن سطوح انرژی مشهود نیست. بنابراین انتظار داریم که برای اعداد کوانتومی بزرگ نتایج مکانیک کوانتومی نزدیک به نتایج کلاسیک باشند. این اصل که به اصل تناظر مشهور است تنها یک مشاهده نیست بلکه اصل راهنمایی بود که در سالهای نظریه کوانتومی قدیمی



شکل ۴۱: سطوح انرژی اتم هیدروژن. برای ترازهای بالا نتایج کوانتومی و نتایج کلاسیک می بایست بسیار نزدیک باشند.

در کپنهاگ، به کمک آن سعی می شد نظریه کوانتومی برای درک مسائل پیچیده تر مثل ساختمان اتم های چند الکترونی یا محاسبه شدت خطوط طیفی مورد استفاده قرار می گرفت. برای فهم این اصل به مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن توجه می کنیم. می دانیم که برای مدار n ام، شعاع، سرعت و انرژی به ترتیب برابرند با:

$$r_n = \frac{n^2 \hbar}{\alpha mc}, \quad v_n = \alpha \frac{c}{n}, \quad E_n = -\frac{1}{2n^2} \alpha^2 mc^2. \quad (72)$$

بنابر اصل دوم بور وقتی که الکترون از لایه n ام به لایه $n-1$ ام جهش می کند، فوتونی صادر می کند با فرکانس

$$\omega = \frac{E_n - E_{n-1}}{\hbar} = \frac{1}{2\hbar} \alpha^2 mc^2 \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (73)$$

حال برای n های بزرگ می توان طرف راست را با تقریب بسیار خوب به صورت زیر نوشت:

$$\omega \approx \alpha^2 mc^2 \frac{1}{\hbar n^3} \quad (74)$$

اما از رابطه 72 می توانیم فرکانس گردش الکترون به دور هسته را بدست آوریم که برابر است با

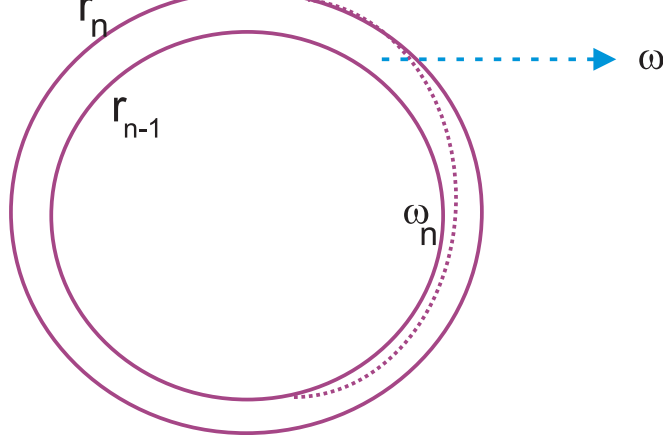
$$\omega_n = \frac{v_n}{r_n} = \alpha^2 mc^2 \frac{1}{n^3 \hbar}. \quad (75)$$

که با فرکانس فوتون تابش شده یکسان است. دقت کنید که اگر چه با افزایش عدد کوانتومی n شعاع مدارها به صورت مربعی زیاد می شود، اما این مدارها به طور نسبی به هم نزدیک تر می شوند. دلیل این امر هم این است که با استفاده از رابطه ی 72

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_n} \approx \frac{2}{n}. \quad (76)$$

بنابراین جهش کوانتومی که از مدار n به مدار $n-1$ صورت می گیرد، برای n های بزرگ حرکت در یک مدار تقریبی دایره ای با شتاب تقریبی ω_n است.

¹³ جزء وکل: ورنر هایزنبرگ، ترجمه علی معصومی همدانی



شکل ۵۱: گذار از یک مدار به مدار دیگر با اعداد کوانتومی بزرگ. فرکانس گردش الکترون به دور هسته با فرکانس فوتون تابش شده برابر می شود.

بر مبنای فیزیک کلاسیک، انتظار داریم که وقتی الکترون یک حرکت دایره ای انجام می دهد نوری با همان فرکانس چرخش اش تابش کند. بنابراین وقتی که مدارهای با اعداد کوانتومی بزرگ را در نظر می گیریم نتایج ما با نتایج فیزیک کلاسیک مطابق یا متناظر است و آثار کوانتومی تنها وقتی ظاهر می شود که مدارهای با اعداد کوانتومی کوچک یعنی مدارهای درونی اتم را مطالعه کنیم.

این اصل به اصل تناظر مشهور است. آیا می توان از این تناظر استفاده بیشتری کرد و برای سوالاتی که با اصول اولیه بور نمی توان به طور دقیق به آنها پاسخ گفت، پاسخ های تقریبی فراهم کرد؟ برای پاسخ گویی به این سوال و برای آشنایی با نمونه ای از استفاده هایی که در دوران نظریه کوانتومی قدیمی از این اصل می شده است یک مثال ساده را بررسی می کنیم. مثلاً آیا می توان با استفاده از اصل تناظر چیزی راجع به شدت خطوط طیفی فهمید؟ از فیزیک کلاسیک می دانیم که اگر ذره ای با بار الکتریکی e شتاب a داشته باشد توان تابشی اش برابر است با:

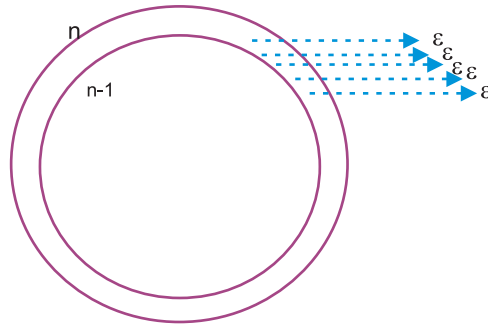
$$P = K \frac{2}{3} \frac{a^2}{c^3}. \quad (77)$$

حال اگر الکترونی در مداری با عدد کوانتومی n باشد شتاب اش برابر است با

$$a_n = \frac{v_n^2}{r_n}, \quad (78)$$

و فرکانس دورانی اش برابر است با $\omega_n = \frac{v_n}{r_n}$. بنابراین تناظر، اگر n های بزرگ را در نظر بگیریم فوتون تابش شده دارای همین فرکانس و در نتیجه دارای انرژی $\epsilon = \hbar \omega_n = \hbar \frac{v_n}{r_n}$ است. بنابراین می توانیم از تقسیم توان تابشی بر انرژی یک فوتون می توان نرخ فوتون هایی را که در واحد زمان تابش می شوند (یعنی احتمال تابش فوتون در واحد زمان) را پیدا کنیم (شکل ۶۱). این نرخ برابر است با:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{P}{\mathcal{E}_n} = K \frac{2e^2}{3} \frac{1}{c^3} \frac{\frac{v_n^4}{r_n^2}}{\frac{\hbar v_n}{r_n}} \\ &= K \frac{2}{3} \frac{e^2}{\hbar r_n} \frac{v_n^3}{c^3}. \end{aligned} \quad (79)$$



شکل ۶۱: با تقسیم توان تابش شده بر انرژی یک فوتون می توان نرخ تابش فوتون ها در واحد زمان را بدست آورد.

با استفاده از رابطه 72 طرف راست این رابطه ساده خواهد شد. عبارت نهایی برابر خواهد بود با:

$$R_n = \frac{2}{3} \frac{\alpha^5 mc^2}{n^5 \hbar}. \quad (80)$$

جالب است که بدانیم، مشاهدات تجربی و همچنین محاسبات دقیقی که با مکانیک کوانتمی جدید نیز انجام می دهیم این عبارت را صرف نظر از ضریب عددی آن تایید می کنند. آنچه که بدست آمد، برای مدارهای با عدد کوانتومی بزرگ معتبر است. برای مدارهای با عدد کوانتومی کوچک، یعنی مدارهای درونی چه باید کرد؟ در این جا اگر بخواهیم از اصل تناظر استفاده کنیم تنها می توانیم به حدس و گمان متوسل شویم. مثلاً می توانیم بگوییم که احتمالاً عامل $\frac{1}{n^5}$ ناشی از تفاضل دو عامل $\frac{1}{(n-1)^4}$ و $\frac{1}{n^4}$ بوده است که برای n های بزرگ به آن صورت درآمده است. به عبارت دقیق تر می توانیم جایگزینی زیر را انجام دهیم:

$$\frac{1}{n^5} \longrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(n-1)^4} - \frac{1}{n^4} \right). \quad (81)$$

بنابراین می توان حدس زد که نرخ گذار از حالت n به $n-1$ (برای همه n ها) چیزی شبیه به این است

$$R_{n \rightarrow n-1} = \frac{2}{3} \alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(n-1)^4} - \frac{1}{n^4} \right), \quad (82)$$

و یا در حالت کلی تر، نرخ گذار از حالت n_1 به حالت n_2 عبارت است از:

$$R_{n_1 \rightarrow n_2} = \frac{2}{3} \alpha^5 \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_2^4} - \frac{1}{n_1^4} \right), \quad (83)$$

و در نتیجه با دانستن انرژی فوتون های تابشی که می بایست به صورت $\frac{E_{n_1} - E_{n_2}}{\hbar}$ در نظر گرفته شوند، می توان عبارتی برای شدت خطوط طیفی بعضی از خطوط طیفی بدست آورد (زیرا مدارهای بیضی را مطالعه نکرده ایم). ولی اندازه گیری شدت خطوط طیفی نشان می داد که این عبارت ها فقط با تقریب درست هستند.

با این محاسبه می‌خواستیم بگوییم که چگونه در آن سالها بور و همکارانش و دیگر فیزیکدانان سعی می‌کردند که الگوی بور را برای حل مسائل پیچیده تر بکار ببرند و از چه مفاهیم و ابزاری استفاده می‌کردند.

در همین سال‌ها بود که با ترکیبی از استدلال‌های از نوع فوق‌بعلاوه تقارن همراه با داده‌های ناشی از شیمی و طیف‌نگاری اتمی، مدل لایه‌ای برای اتم‌های چند الکترونی نیز عمده‌تاً توسط خود بور شکل گرفت. هر لایه که چیزی شبیه به گروهی از مدارها با شعاع‌های نزدیک به هم است ظرفیت معینی برای پذیرش الکترون دارد و الکترون‌های آخرین لایه خواص شیمیایی اتم را تعیین می‌کنند. به این ترتیب مبنای کیفی خوبی برای خواص تناوبی عناصر، چنانکه در جدول مندلیف می‌بینیم فراهم آمد. شکلی که هنوز هم به عنوان سمبل اتم به کار می‌رود و در آن هسته اتم در احاطه مدارهای بیضوی گوناگون و متقاطع نشان داده می‌شود، در واقع حاصل فعالیت‌های بور در آن دوران است. بور با قدرت بی‌نظیری که در ترکیب استدلالات فیزیکی و داده‌های مشاهداتی شیمی و طیف‌نگاری داشت تلاش زیادی در توصیف ساختمان اتم‌های چند الکترونی انجام داد، که با موفقیت‌های نسبی نیز همراه بود. وی در سخنرانی‌هایش در این دوران شکل مدارهای مختلف را در اتم‌های چند الکترونی روی تابلوهایی بزرگ به رنگ‌های سیاه و سرخ می‌کشید تا بتواند تصویر واضح تری از ساختمان اتم بدست دهد. متأسفانه از تابلوهایی اولیه امروزه اثری باقی نمانده است. روبه‌مرفته‌ها اگرچه پیشرفت‌های درخشانی در این دوران حاصل شد، معلوم بود که مدل اتمی بور و اصل تناظر نمی‌تواند مدل دقیق و محکمی برای توصیف پدیده‌های اتمی باشد.

«... کارهای پژوهشی اولیه من در اوایل سالهای ۱۹۲۰ که مبتنی بر مدارهای اتمی بور بود، کاملاً ناموفق از آب درآمد. من قصد داشتم مدارهای بور را واقعی تلقی کنم و برای آنها یک صورت بندی ریاضی درست کنم. هر مدار بور به یک الکترون تعلق داشت و برای این که اتم‌های چند الکترونی را توصیف کنم نیاز داشتم که یک نظریه برای مدارهای بور در برهم کنش با یکدیگر بسازم. من مثل خیلی‌های دیگر به شدت روی این مسئله کار کردم که البته حاصلی در برداشت و نمی‌توانست داشته باشد.»¹⁴

بندریج معلوم شد که نارسایی‌های مدل اتمی قدیمی با اصلاحات جزئی در مدارهای بور و یا اصول اولیه او رفع نخواهند شد و عبور از موانع پیش رو جز به کمک یک تغییر بنیادین در نظریه‌های فیزیکی امکان پذیر نیست. در این سالها مکاتب مهم دیگری در برلین و هم چنین گوتینگن در زمینه فیزیک اتمی فعال شده بودند. مکتب گوتینگن به خصوص به لحاظ اتکا بر ریاضیات دقیقی که ناشی از حضور ریاضیدانان بزرگی مثل دیوید هلیبرت و ریچارد کورانت بود، تاثیر جدی در تولد مکانیک کوانتومی جدید داشته است. در برابر این مکتب بور نمی‌توانست از ساختمان اتمهای چند الکترونی خود دفاع بایسته‌ای انجام دهد.

شهرهای کوچک دانشگاهی بطرز دل‌انگیزی به یکدیگر شبیه‌اند. گوتینگن¹⁵ نیز با کمبریج انگلستان یا ییل¹⁶ تفاوت چندانی ندارد: شهرستانی کوچک که از شهرهای بزرگ دور است و کسی جز برای ملاقات استادان دانشگاه به آنجا نمی‌آید در صورتیکه استادان در اینکه مقرشان مرکز جهان است کوچکترین شک و تردیدی به خود راه نمی‌دهد.

¹⁴پاول دبراک: مبانی ریاضی نظریه کوانتومی، ۱۹۷۸.
¹⁵Gottingen
¹⁶Yale

دهند. روی سردر ساختمان راتسکلر¹⁷ به لاتین این جمله حک گشته است: « خارج از گوتینگن زندگی نیست¹⁸ ».

منظره شهر گوتینگن نیز چون دیگر شهرهای دانشگاهی مستور از جاده های بشماری است که استادان پس از صرف ناهار در آن قدم می زنند و اگر دانشجویی را در جرگه خود بپذیرند، از خوشحالی در پوست خود نخواهد گنجید. احتمالاً قبل از قرن نوزدهم گوتینگن شهر آرام و بی سروصدایی بوده است. راهی که گوتینگن را به دنیای خارج مرتبط می ساخت راه آهنی بود که بازدیدکنندگان را از برلین و کشورهای خارج به آنجا می آورد. آنها با شور و هیجان هر چه تمام تر در انتظار آن بودند که در باره آخرین پیشرفت های علم فیزیک با استادان این دانشگاه به گفتگو بنشینند. اهالی گوتینگن عقیده داشتند در قطار برلین علم و دانش همواره در حال پیشرفت است زیرا در اینجا بود که مردم در باره افکار جدید بحث و تبادل نظر می کردند.

در سال ۱۹۲۱ کرسی فیزیک این دانشگاه به ماکس بورن داده شد. بورن در این زمان چهل سال داشت و در این جا بود که کنفرانسهای متعددی ترتیب داد تا کلیه علاقمندان به فیزیک اتمی را در این شهر کوچک دانشگاهی گرد هم جمع کند.¹⁹

یکی از کسانی که به گوتینگن آمد تا تحت نظر ماکس بورن کار کند رنر هایزنبرگ بود که دکترایش را به تازگی تحت نظر آرنولد زومرفلد به پایان رسانده بود. در اواخر ۱۹۲۴ وی به کار روی نظریه طیفی پرداخت. ایده انقلابی ای که می بایست سرانجام نقطه پایانی بر مدل اتمی بور و یا بسیار مهم تر از آن نقطه پایانی بر درک و تصور کلاسیک ما از الکترون و دنیای میکروسکوپی به مثابه یک دنیای مانوس باشد که با زبان رایج در زندگی روزمره قابل توصیف اند، توسط هایزنبرگ ارایه شد. وی نشان داد که برای درک و توصیف دقیق دنیای میکروسکوپی مجبوریم که تمامی تصورات خود را که از دنیای ماکروسکوپی وام گرفته ایم بدون بریزیم. مسیر الکترون چیزی نبود که هرگز بلافاصله بر ما آشکار شده باشد، ما تنها به کمک واسطه های تجربی وجود چنین چیزی را استنتاج می کنیم، چون عادت کرده ایم که به الکترون نیز مثل یک گوی بیلیارد و یا توپ فکر کنیم. مثل همیشه ایده انقلابی ای که راهگشا شده بود از شک و تردید در مفاهیمی حاصل شده بود که طی سالیان دراز و بدون هیچ دلیل منطقی در ذهن ما رسوب کرده بود. همانگونه که اینشتین چند سال از آن در نظریه نسبیت خاص نشان داده بود مفهوم همزمانی مطلق یک مفهوم به غلط جاافتاده است، هایزنبرگ نیز بعد از ارایه مکانیک جدیدش با آزمایش های فکری ساده ای نشان داد که این ایده که ما می توانیم چیزی مثل مسیری الکترون را به تصور خود در آوریم، یک مفهوم بدیهی نیست و اگر چنین کنیم خیلی زود به تناقض دچار می شویم. ولی قبل از آنکه به آزمایش های فکری ای از این نوع پردازیم لازم است که اساس مکانیک جدیدی که هایزنبرگ معرفی کرد و طی چند ماه توسط ماکس بورن و پاسکال ژوردن توسعه یافت و به مکانیک ماتریسی²⁰ معروف شد را بیان کنیم.

« وقتی می خواهم حالت نظریه اتمی را در آن ماه ها مجسم کنم، همیشه به یاد یک کوهپیمایی می افتم که با برخی

¹⁷Rathskeller

¹⁸Extra Gottingen non est vita

¹⁹عروج انسان: ژاکوب برونوفسکی

²⁰Matrix Mechanics

از دوستانم در جنبش جوانان، احتمالاً در اواخر پاییز ۱۹۲۴ داشتم. این بار از کرویت²¹ راه افتادیم و به دریاچه آخن رسیدیم. هوای درّه تعریفی نداشت و کوه‌ها در پرده ابر پوشیده بود. هنگام صعود، مه کم کم ما را در خود گرفت و چیزی نگذشت که خود را در دل انبوهی از صخره‌ها و بوته‌ها یافتیم، بی آنکه نشانی از راه دیده شود. تصمیم گرفتیم که صعود را ادامه دهیم، گرچه دل‌مان می‌خواست که اگر حادثه‌ی ناگواری روی داد، به پایین برگردیم. اما یکباره مه چنان غلیظ شد که چشم چشم را نمی‌دید و ما فقط با فریاد زدن می‌توانستیم با هم ارتباط داشته باشیم، و در همان هنگام بالای سر ما روشن تر شد و نور یکباره رنگ عوض کرد، ظاهراً یک پارچه مه داشت از بالای سر ما رد می‌شد. بعد یک مرتبه، لبه یک دیواره‌ی پرشیب درست روبرویمان ظاهر شد که در نور خورشید غرق بود. لحظه‌ای بعد دوباره مه پایین آمد، اما آنقدر دیده بودیم که بتوانیم راهمان را از روی نقشه پیدا کنیم. پس از ده دقیقه کوهنوردی دشوار، در نور خورشید قرار گرفتیم – در بلندترین نقطه بر فراز دریای مه. در طرف جنوب قله‌های جبال زون وند²² و آن سو تر ارتفاعات برف پوش آلپ مرکزی دیده می‌شد، و همه نفس راحتی کشیدیم. در فیزیک اتمی هم ظاهراً زمستان ۱۹۲۴–۱۹۲۵ ما را به قلمرو مه آلودی کشانیده بود اما در همانجا نور از پشت مه کورسویی می‌زد و نوید چشم اندازه‌های جدید را می‌داد.

هایزنبرگ می‌خواست موقعیت بگرنج فیزیک اتمی را از نو بازنویسی کند و نقطه شروع خود را تنها و تنها کمیت‌های مشاهده پذیر قرار دهد و از اصرار بر وجود مسیر و مدار برای الکترون دست بردارد. بنابراین نظری ما از درون اتم تنها مجموعه‌ای از خطوط طیفی با شدت‌های گوناگون می‌بینیم. در بین این فرکانس‌ها نظم‌ی برقرار است، به این معنا که می‌توان فرکانس‌های خطوط طیفی را با دو شاخص مثل $\nu_{n,m}$ نشان داد به طوری که بین آنها رابطه زیر برقرار باشد:

$$\nu_{n,m} + \nu_{m,p} = \nu_{n,p}. \quad (84)$$

این رابطه بلافاصله به ما می‌گوید که همه فرکانس‌ها را می‌توان بر اساس یک سلسله فرکانس اصلی نوشت، یعنی

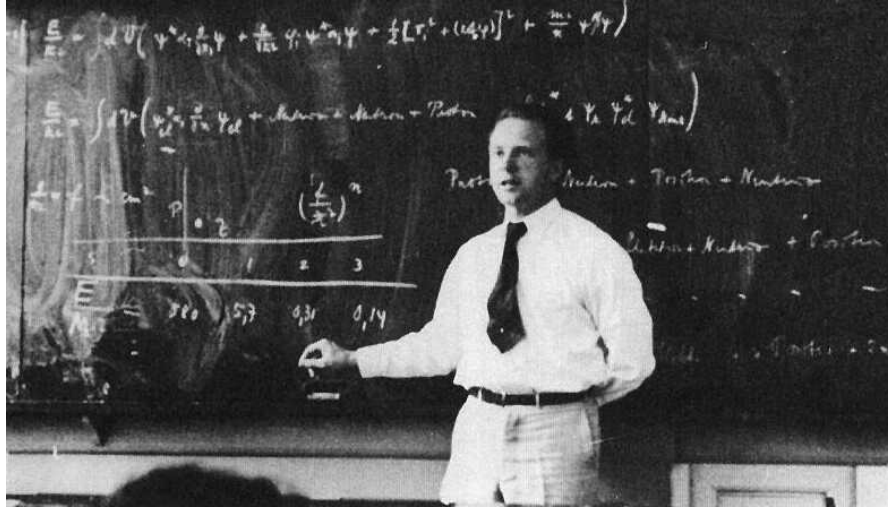
$$\nu_{n,m} = \nu_n - \nu_m. \quad (85)$$

از آنجا فوتونی با فرکانس $\nu_{m,n}$ انرژی $h\nu_{m,n}$ دارد، نتیجه می‌گیریم که انرژی فوتون برابر است با:

$$h\nu_{n,m} = h\nu_n - h\nu_m =: E_n - E_m, \quad (86)$$

این امر به این معناست که الکترون در درون اتم یک رشته از انرژی‌های مجاز $\{E_m\}$ دارد که گذار بین این لایه‌های انرژی منجر به صدور یا جذب فوتون می‌شود. بنابراین مسئله ساختن مدلی از سینماتیک و دینامیک درون اتم است به نحوی که این فرکانس‌های اصلی را تولید کند.

Kreuth²¹
Sonnwend²²



شکل ۸۱: ورنر هایزنبرگ در سالهای حضور در موسسه بور در کپنهاگ

در اواخر ماه مه ۱۹۲۵ به تب یونجه دچار شدم و چنان بیمار شدم که از بورن دو هفته مرخصی گرفتم. فوراً راه افتادم و به هلی گولند²³ رفتم، امید داشتم که در آنجا در آغوش هوای دریا و دور از شکوفه ها و چمنزارها با سرعت شفا یابم. ظاهراً هنگامی که به آنجا رسیدم قیافه‌ای تماشایی داشتم، چون بانوی میزبانم نگاهی به من انداخت و پیش خودش گفت که حتماً کتک کاری کرده‌ام و قول داد که در دوران نقاهت از من پرستاری کند. اتاقم در طبقه دوم بود، و چون خانه در ارتفاعات حد جنوبی آن جزیره صخره‌ای بنا شده بود، چشم انداز با شکوه دهکده و تپه های شنی و دریا زیر پایم بود. وقتی روی بالکن نشستم فرصتی یافتم تا به این حرف بوربندیشم که وقتی انسان به دریا می نگرند انگار بخشی از بی نهایت را در دسترس خود دارد.

بجز گردشهای طولانی، چیزی در هلی گولند نبود که توجه مرا از مسئله‌ای که داشتم منحرف کند. بنابراین سرعت پیشرفتم بسیار بیش از گوتینگن بود. ظرف چند روز همه موانع ریاضی را که معمولاً در شروع این نوع کارها راه پیشرفت را سد می کند از سر راه کنار زدم و توانستم مسئله را به صورت ساده‌ای در آورم. و با چند روز دیگر کار، برابرم روشن شد که در یک فیزیک اتمی که نخواهد چیزی جز کمیت های مشاهده پذیر را به خود راه بدهد، چه چیزی باید جای شرایط کوانتومی بور- زومرفلد را بگیرد.....

Heligoland²³

آنچه که هایزنبرگ یافته بود آن بود که سینماتیک و دینامیک الکترون در درون اتم می بایست به زبان کاملاً متفاوتی از زبان کلاسیک و نیوتنی توصیف شود. در این جا فرصت آن را نداریم که گام های هایزنبرگ را به همراه او دوباره طی کنیم. خواننده ای که به این کار علاقه دارد می بایست به مقاله اولیه هایزنبرگ و یا بیان ساده تر آن²⁴ رجوع کند. در این جا تنها به شکل نهایی فرض های او می پردازیم. به بیان امروزی مکانیک جدید او را می توان چنین توصیف کرد. به هر متغیر دینامیکی مثل x و یا p و یا \hbar (هامیلتونی) یک ماتریس مربعی نسبت می دهیم، مثل X, P, h . (فعلاً مساله را برای سادگی یک بعدی در نظر گرفته ایم.) این ماتریس ها در رابطه های جابجایی ای صدق می کنند که متناظر با رابطه گروهی پوآسون هستند: یعنی بجای

$$\begin{aligned} \{x, p\} &= 1 \\ \frac{dx}{dt} &= \{x, h\} \\ \frac{dp}{dt} &= \{p, h\}. \end{aligned} \quad (87)$$

بین متغیرهای دینامیکی کلاسیک می بایست روابط زیر را بین ماتریس ها برقرار کنیم:

$$\begin{aligned} [X, P] &= i\hbar \\ i\hbar \frac{dX}{dt} &= [X, H] \\ i\hbar \frac{dP}{dt} &= [P, H]. \end{aligned} \quad (88)$$

رابطه بین کمیت ها کمابیش همان رابطه بین آنها در حالت کلاسیک است، به این معنا که اگر در حالت کلاسیک داریم $h = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ، در حالت کوانتومی هم داریم

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X). \quad (89)$$

بنابر مکانیک ماتریسی هایزنبرگ، از این ماتریس ها می توان مقادیر مشاهده پذیر را بدست آورد به این معنا که برای هر ماتریس مقادیر مشاهده پذیر همان ویژه مقادیر آن ماتریس هستند. بنابراین ویژه مقادیر هامیلتونی H لایه های مجاز انرژی سیستم را بدست می دهند، یا مقادیر مشاهده پذیر تکانه ویژه مقادیرهای ماتریس P هستند. از آنجا که مقادیر مشاهده پذیر می بایست حقیقی باشند، ماتریس های مربوطه می بایست هرمیتی باشند. هایزنبرگ خود توانست در اولین مقاله خود از این طریق سطوح انرژی نوسانگر هارمونیک یعنی ویژه مقادیرهای ماتریس

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2, \quad (90)$$

را بدست آورد و نشان دهد که این سطوح انرژی نوسانگر هارمونیک چیزی نیستند جز $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

²⁴ تولد کوانتوم مکانیک جدید به زبان امروزی: محمد خزّمی، مجله گاما، شماره ۲، بهار ۱۳۸۳.

وقتی نتایج نهایی محاسبات را پیش رویم دیدم ساعت سه بعد از نیمه شب بود: اصل بقای انرژی برای همه جمله ها صادق از کار درآمده بود و من دیگر در انسجام و سازگاری ریاضی مکانیک کوانتومی که محاسباتم نویدش را می داد، تردیدی نداشتم. در آغاز بیم زده شدم، حس می کردم که از پشت پرده پدیده های اتمی به دنیای درون این پدیده ها، با آن زیبایی عجیبش، نگاه می کنم و از اینکه باید این ساخت غنی ریاضی را که طبیعت با این دست و دلبازی پیش رویم گستره است بکاوم، تقریباً گیج بودم. از فرط هیجان خوابم نبرد، و وقتی که سپیده زد به طرف کناره جنوبی جزیره راه افتادم. مدتها بود که دلم می خواست از صخره ای که بر دریا سایه افکن بود صعود کنم. آن روز این کار را بدون زحمت انجام دادم و در آنجا به انتظار طلوع خورشید نشستم.....²⁵

بعد از انتشار مقاله هایزنبرگ به فاصله کوتاهی بورن و ژوردان در مقاله ای و سپس هر سه باهم در مقاله سومی مکانیک کوانتومی جدید یا مکانیک ماتریسی را مدون کردند. به فاصله کوتاهی ولفگانگ پاولی مکانیک ماتریسی را برای اتم هیدروژن بکاربرد. برای این مسئله سه بعدی بنابر مکانیک ماتریسی روابط جابجایی بین ماتریس ها به شکل زیر است:

$$[X_i, X_j] = 0 \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{i,j}, \quad i, j = x, y, z, \quad (91)$$

و ترازهای انرژی عبارتند از ویژه مقادیر ماتریس هامیلتونی که به شکل زیر است:

$$H = \frac{P.P}{2m} - K \frac{e^2}{R}, \quad (92)$$

که در آن $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ و $P.P = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$. به این ترتیب پاولی اولین کسی بود که در چارچوب مکانیک کوانتومی جدید، ترازهای انرژی اتم هیدروژن را محاسبه کرد و نشان داد که دقیقاً همان مقادیری را دارند که در مدل اتمی بور بدست آمده بود.

۷ مکانیک موجی

مقارن همین زمان اروین شرودینگر مشغول بسط مکانیک موجی و استفاده از آن برای حل مسئله ساختمان اتمی بود. وی توانست به فاصله ۵ روز بعد از انتشار مقاله پاولی طیف اتم هیدروژن را با استفاده از مکانیک موجی بدست آورد. برای آنکه داستان پیدایش مکانیک موجی را بازگو کنیم می بایست چند ماهی به عقب بازگردیم، یعنی به زمانی که لویی دوبروی در فرانسه با استفاده از نسبیت خاص به این نتیجه رسیده بود که همچنان که نور خاصیت ذره ای دارد ممکن است که ذرات مادی نیز خواص موجی داشته باشند. وی پیشنهاد کرده بود که به ذره ای با انرژی E و تکانه P می توان موجی با فرکانس ω و

²⁵ جزء وکل، ورنر هایزنبرگ، ترجمه علی معصومی همدانی

بردار موج k نسبت داد و رابطه خصلت های موجی و ذره‌ای به شکل زیر است:²⁶

$$E = \hbar\omega, \quad P = \hbar k. \quad (93)$$

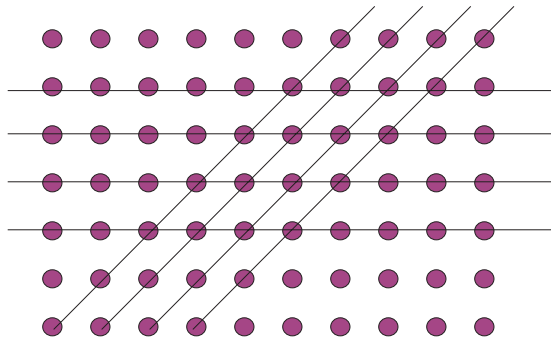
به فاصله کوتاهی دیویسون و گرمر²⁷ و سپس مستقلاً جی. پی. تامسون²⁸ توانستند نشان دهند که الکترون ها در برخورد از شبکه های بلوری طوری پراکنده می شوند که انگار امواجی با طول موج دوبروی و با رابطه دقیق $\lambda = \frac{h}{P}$ به آنها وابسته است و این امواج الکترونی هستند که با هم تداخل می کنند و تعداد الکترون های ثبت شده روی اشکارسازها را تعیین می کنند. طرح ساده شده آزمایش تداخل امواج مادی را می توان در شکل ?? مشاهده کرد. اتم های بک بلور در یک شبکه منظم قرار گرفته اند و بسته به ساختمان بلوری این اتم های صفحه های متعددی را تعریف می کنند. دونمونه از این صفحه ها در شکل ۹۱ نشان داده شده است ولی تعداد واقعی صفحات خیلی بیشتر است. حال صفحه های افقی را در نظر بگیرید. موجی که به این صفحات می تابد و دارای طول موج λ است، یک بار از صفحه اول منعکس می شود (مثل هر موج دیگری زاویه بازتابش مساوی با زاویه تابش است) و یک بار هم از صفحه دوم و الی آخر. البته می توان تصور کرد که موج بتدریج که بدرون بلور نفوذ می کند از انرژی آن کاسته می شود و در نتیجه تنها می توان انعکاس موج را از صفحه اول و دوم در نظر گرفت. حال برای آنکه موج های بازتابیده شده باهم تداخل سازنده داشته باشند می بایست تفاوت راه این دو موج مضربی از طول موج λ باشد. بنابراین با توجه به شکل اگر زاویه تابش θ چنان باشد که شرط

$$2d \cos \theta = n\lambda \quad (94)$$

برقرار شود، یک نوار روشن (ناشی از تداخل سازنده) مشاهده می شود و در غیر این صورت نواری با شدت کم روی صفحه فلورسانسی که الکترون ها را ثبت می کند دیده می شود. در آزمایش واقعی طرح های تداخلی که روی صفحه ی فلورسانس تشکیل می شود، ناشی از تداخل امواج از صفحه های مختلف است. ابا دانستن ساختمان بلور می توان با مطالعه دقیق این طرح ها به طول موج تابیده شده به بلور پی برد. به این طریق بود که دیویسون و گرمر و هم چنین تامپسون توانستند ایده امواج دوبروی را به طریق تجربی تایید کنند. امروزه این روش تکامل بسیاری یافته است و می توان از آن به طریق معکوس استفاده کرد به این معنا که موج های شناخته شده را به یک بلور می تابانند و ساختمان بلور را از آن استخراج می کنند.

²⁶ برای درک عمیق تری از پیشنهاد دوبروی و چگونگی استدلال وی رجوع کنید به ترجمه مقاله او «تابش - موج ها و کوانتوم ها»، لویی دوبروی، مجله گاما، شماره ۵، زمستان ۱۳۸۳، یا شرح ساده ای از آن «یادداشتی بر مقاله ی دوبروی: تابش - موج ها و کوانتوم ها»، امیرحسین فتح الهی، همان شماره از مجله گاما.

²⁷ Davisson and Gremmer
²⁸ G. P. Thompson



شکل ۹۱: دو نمونه از صفحه‌هایی که توسط شبکه اتم‌های یک بلور تعریف می‌شوند.

۸ معادله شرودینگر

اگر اندیشه امواج دوبرویی را بپذیریم به این معنا که به ذره‌ای با تکانه‌ی P و انرژی E موجی با طول موج $\lambda = \frac{h}{P}$ و فرکانس $\nu = \frac{E}{h}$ نسبت دهیم آنگاه یک موج تخت معادله‌ای به شکل دارد:

$$\psi = Ae^{-i(\omega t - kx)} = Ae^{\frac{-i}{\hbar}(Et - Px)} \quad (95)$$

و یک بسته موج دلخواه که برای سادگی فرض می‌کنیم در راستای x حرکت می‌کند، ترکیبی خطی از امواج تخت است که می‌توان آن را به شکل زیر نشان داد:

$$\psi(x, t) = \int \phi(P) e^{\frac{-i}{\hbar}(Et - Px)} dP. \quad (96)$$

نخستین کاری که شرودینگر کرد، آن بود که معادله‌ای را که چنین موجی در آن صدق می‌کند بدست آورد. برای این کار مشتقات $\psi(x, t)$ را محاسبه می‌کنیم و تعیین می‌کنیم که چه رابطه بین آنها برقرار است. از رابطه فوق بدست می‌آوریم

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \int \phi(P) E e^{\frac{-i}{\hbar}(Et - Px)} dP. \quad (97)$$

چنانچه ذره در پتانسیل $V(x)$ قرار داشته باشد انرژی و تکانه آن در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$E = \frac{P^2}{2m} + V(x). \quad (98)$$

بنابراین در رابطه 97 مقدار E را از این رابطه جایگذاری می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= \int \phi(P) \left(\frac{P^2}{2m} + V(x) \right) e^{\frac{-i}{\hbar}(Et - Px)} dP \\ &= \int \phi(P) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) e^{\frac{-i}{\hbar}(Et - Px)} dP \end{aligned}$$



شکل ۰۲: لویی دو بروی

$$= \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t), \quad (99)$$

و یا

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t). \quad (100)$$

برای سادگی امواج مادی را در یک بعد در نظر گرفتیم. در سه بعد این امواج به شکل زیر هستند:

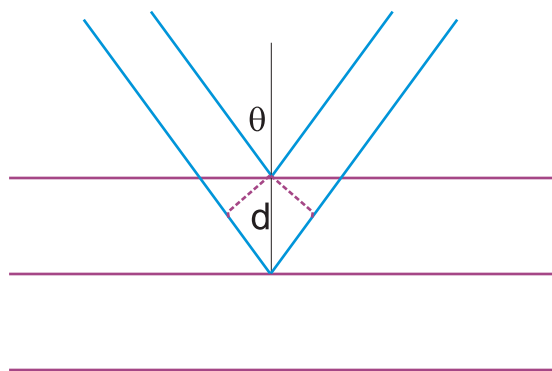
$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \phi(P) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - P \cdot \mathbf{r})} dP. \quad (101)$$

و تکرار همان استدلال قبلی نشان می دهد که این امواج در معادله زیر که معادله شرودینگر نامیده می شود صدق می کنند.

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t).} \quad (102)$$

چگونه چنین معادله ای منجر به ترازهای انرژی گسسته می شود. در تجربه ای که با امواج از هرنوع داشته ایم می دانیم که وقتی یک موج به یک ناحیه بسته یا متناهی مقید می شود، فرکانس ها و طول موج های آن مقادیر معینی را اختیار می کنند و از آنجا که برای امواج مادی فرکانس چیزی جز انرژی نیست، می توانیم انتظار داشته باشیم که امواج مادی وقتی به یک ناحیه بسته مقید شوند حتماً انرژی ذرات وابسته به آنها مقادیر گسسته ای را اختیار خواهند کرد. برای درک بهترین خاصیت به یک مثال ساده توجه می کنیم. برای پاسخ به این سوال کافی است یک مثال ساده یک بعدی در نظر بگیریم. ذره ای را در نظر می گیریم که کاملاً آزاد است در یک ناحیه $0 \leq x \leq L$ حرکت کند. اندازه انرژی این ذره را E می گیریم. بنابر فیزیک کلاسیک، انرژی E هر مقداری می تواند اختیار کند. اما در مکانیک موجی، این ذره با یک موج با انرژی E توصیف می شود یعنی با موج

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(Et - Px)} + Be^{\frac{i}{\hbar}(Et + Px)}. \quad (103)$$



شکل ۱۲: طرح ساده تداخل امواج از یک بلور

اما این موج می بایست چنان باشد که در شرایط مرزی $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ صدق کند. این شرایط مرزی منجر به روابط زیر خواهند شد:

$$B = -A, \quad PL = n\hbar\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (104)$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}. \quad (105)$$

یعنی ترازهای انرژی معین برای ذره وجود خواهد داشت.

پس از استخراج معادله اش، مهم ترین مسئله پیش روی شرویدینگر آن بود که به همان ترتیب بالا نشان دهد که سطوح انرژی الکترون در اتم هیدروژن را می توان از حل معادله زیر بدست آورد

$$H\psi(x) \equiv \left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 - K\frac{e^2}{r}\right]\psi(x) = E\psi(x). \quad (106)$$

وی این کار را با موفقیت انجام داد و همان مقادیری را برای انرژی بدست آورد که قبلاً بور در مدل کوانتومی قدیمی و پاولی در مکانیک ماتریسی بدست آورده بود.

«انستیتوی کهن وین که به تازگی با از دست دادن لودویگ بولتزمان سوگوار شده است، ساختمانی که در آن فریتز هازنورل و فرانترزاکسنر کار خود را دنبال می کردند و در آن بسیاری از شاگردان دیگر بولتزمان را در حال آمد و شد می دیدم، چشم مرا به اندیشه هایی که توسط آن متفکر بزرگ صورتبندی شده بود باز کرد. خط فکری او را می توان نخستین عشق علمی من نامید. هیچ چیز دیگری به این اندازه مرا به وجد



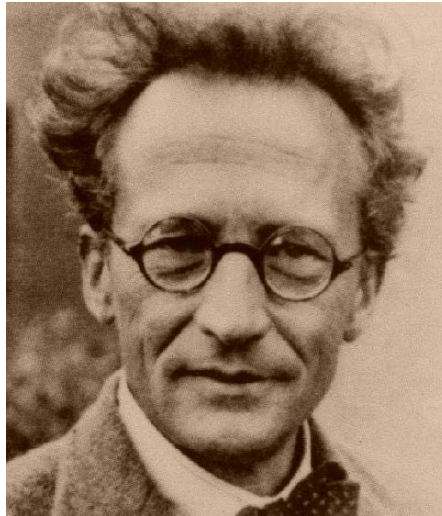
شکل ۲۲: کلینتون دیویسون

و شوق نیاورده و هرگز نیز چنین نخواهد شد. بسیار آهسته به نظریه اتمی جدید نزدیک شدم. در مورد نظریه اتمی چیزهای فراوانی را آزمودم و طرد کردم (بعضی از خودم و بعضی از دیگران) تا اینکه لااقل روشنی فکر را حتی اگر به خرج شدیدترین تغییر انقلابی هم بوده باشد، حفظ کنم. نخستین چیزی که تاحدی مایه آرامش خاطر شد، اندیشه امواج الکترونی دوبروی بود، که آن را کامل کردم و به صورت نظریه مکانیک موجی درآوردم. ولی هنوز از اینکه بتوانیم راه جدید فهم طبیعت را که از یک سوی با مکانیک موجی و از سوی دیگر با مکانیک ماتریسی هایزنبرگ آغاز شده است، چنانکه باید دریابیم، بسیار دوریم.²⁹

در نگاه اول شرودینگر گمان داشت که مسئله آزار دهنده جهش های الکترونی را که هیچ توضیحی برای آن وجود نداشت نیز حل کرده است. دیگر نیازی نبود که فرض کنیم الکترون از یک مدار به یک مدار (یا از یک لایه انرژی به یک لایه انرژی دیگر) می جهد، و تفاوت انرژی اش را به صورت فوتون گسیل می کند. در تصویر شرودینگر موج درون اتم یک مجموعه نوسانات طبیعی با فرکانس های $\nu_n, n = 1, 2, 3, \dots$ دارد. وقتی که چنین اتمی را تحریک کنیم، درست مثل وقتی که لوله صوتی را تحریک می کنیم و پدیده تشدید اتفاق می افتد و صداهایی با فرکانس های $\nu_m - \nu_n$ از لوله صوتی بیرون می آید، اتم نیز امواجی با فرکانس های $\nu_m - \nu_n$ به بیرون می فرستد که همان فوتون ها هستند. به نظر می رسد که به طور خیلی طبیعی شرودینگر توانسته است هم مسئله سطوح گسسته ی انرژی و هم مسئله جهش الکترون ها را حل کند! در ضمن به نظر می رسد که راه شرودینگر راهی برای حل معمای ساختمان اتمی بدست آورده است که از مکانیک ماتریسی مجرد و غیرشهودی هایزنبرگ بسیار ساده تر است.

«...تقریباً با ناراحتی به خانه رفتم. همان شب به بور نامه نوشتم و او را از سمینار شرودینگر که به دعوت زومرفلد

²⁹ از خطابه اروین شرودینگر به مناسبت عضویت در فرهنگستان علوم پروس - ۴ ژوئیه ۱۹۲۹



شکل ۳۲: اورین شرویدینگر

در مونیخ ارایه کرده بود و بحث های بعد از آن مطلع کردم. شاید به خاطر همین نامه بود که بور از شرویدینگر دعوت کرد تا قسمتی از سپتامبر را در کپنهاگ بگذرانند. شرویدینگر موافقت کرد و من هم به دانمارک برگشتم. مباحثه بور و شرویدینگر از همان ایستگاه قطار شروع شد و هر روز از صبح تا پاسی از شب گذشته در خانه بور ادامه می یافت. برای من بسیار دشوار است که شدت و حرارت این بحث ها و میزان اعتقاد عمیقی که این دو به کارهای خود داشتند و شور و هیجانی را که در دفاع از آن ها به کار می بردند، بازگو کنم. تنها می توانم امیدوار باشم که نسخه خیلی کمرنگی از مکالمات آنها را یاد آوری کنم:

شرویدینگر: « مطمئناً با من موافقید که تمام ایده پرش کوانتومی سرانجام به یک چیز خیلی بی معنی منتهی خواهد شد. شما اول ادعا می کنید که اگر اتم در یک حالت پایا باشد، الکترون حرکت تناوبی انجام می دهد ولی از خود تشعشع نمی کند، درحالیکه بر اساس نظریه ماکسول باید تابش کند. بعد می گوئید که الکترون می باید از یک مدار به مدار دیگر بجهد تا تابش کند. آیا این جهش پیوسته است یا ناگهانی؟ اگر پیوسته است، فرکانس حرکت و انرژی آن می بایست پیوسته تغییر کند، در این صورت چگونه می توان خطوط گسسته و تیز را در طیف اتم توضیح داد؟ اگر هم ناگهانی است می توان پرسید که چگونه و با چه قانون حرکتی دقیقاً از یک مدار به یک مدار دیگر می جهد؟ در واقع ایده جهش کوانتومی جز فانتزی و خیال چیز دیگری نیست؟ »

بور: « تمام این ها درست. اما این ثابت نمی کند که جهش ها واقعاً وجود ندارند. تنها می توان گفت که ما نمی توانیم آنها را تصور کنیم، زیرا مفاهیمی که از زندگی روزمره و تجربیات فیزیک کلاسیک به عاریت گرفته ایم برای بیان جهش های کوانتومی کافی نیستند. این هم چیز عجیبی نیست، چون در این جا با فرایندهایی سرو کار داریم که مستقیماً توسط حواس ما ادراک نمی شوند. »

شرویدینگر: « نمی خواهم به بحث های طولانی درباره شکل گرفتن مفاهیم وارد شوم و ترجیح می دهم که این کار را به فیلسوفان واگذار کنم. تنها می خواهم بدانم که درون اتم واقعاً چه اتفاقی می افتد. برای من اهمیتی ندارد که چه زبانی برای توصیف آن به کار می برید. اگر الکترون ها درون اتم هستند و اگر الکترون ها ذره هستند، چنانچه همه ما اعتقاد داریم، در این صورت می بایست به طریقی حرکت کنند. باید بتوان لااقل در اصول تعیین کرد که در یک حالت پایا چگونه حرکت می کنند و چگونه از یک حالت پایا به یک حالت پایای دیگر می جهند؟ ... »

و به این ترتیب بحث ها شب ها و روزها ادامه می یافت تا اینکه سرانجام شرویدینگر شاید بدلیل کار طاقت فرسا، با حالت تب دار به بستر بیماری افتاد. در حالیکه همسر بور وظیفه پرستاری او را بر عهده گرفته بود و برایش چای و کیک می آورد، بور بر لبه تختش می نشست و ادامه می داد: « ولی خوب باید قبول کنی که در مکانیک موجی تناقضات حل نمی شوند بلکه به گوشه ای رانده می شوند...» در پایان اقامت شرویدینگر در کپنهاگ هیچ کدام از طرفین قانع نشده بودند زیرا هیچکدام قادر نبودند تصویر کامل و جامعی از مکانیک کوانتومی ارائه دهند...»³⁰

اگر چه ساختمان ریاضی مکانیک موجی شرویدینگر می توانست بخوبی از عهده توصیف طیف اتم هیدروژن برآید اما تعبیر وی از الکترون به عنوان یک موج پیوسته که دچار تشدید می شود ابهاماتی داشت. مسئله این بود که در پدیده تشدید فرکانس هایی مثل $\nu_m + \nu_n$ نیز وجود دارند در حالیکه هیچ فوتونی با این فرکانس ها تابش نمی شد. هم چنین برخلاف تصور شرویدینگر که برای الکترون ماهیتی گسترده و موجی قائل بود، آزمایش نشان می داد که الکترون یک ذره است و بنابراین تنها راه برای تعبیر تابع موج $\psi(x, t)$ آن بود که فرض کنیم مربع این تابع احتمال یافتن ذره در نقطه x در زمان t است. این تعبیر از آن ماکس بورن بود که در آن زمان استاد دانشگاه گوتینگن در آلمان بود.

چرا خود ψ را نمی شد به عنوان موج در نظر گرفت. دلیل اش این بود که تابع ψ برخلاف تابع $|\psi|^2$ در یک معادله پیوستگی صدق نمی کرد و هر تابعی که بخوهد نقش چگالی احتمال را بازی کند حتماً می بایست در چنین معادله ای صدق کند. برای این که این تعبیر درست باشد می بایست یک معادله پیوستگی احتمال به شکل

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot J = 0 \quad (107)$$

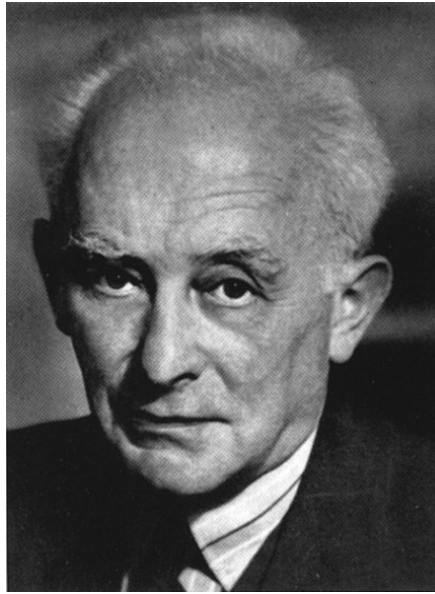
برقرار باشد که رابطه ای بین این چگالی احتمال یعنی $\rho = |\psi|^2$ و بردار جریان احتمال یعنی J بدست دهد. معادله شرویدینگر عبارت است از:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(r)\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi. \quad (108)$$

هرگاه مزدوج مختلط طرفین این معادله را بنویسیم (برای پتانسیل حقیقی) خواهیم داشت:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V(r)\psi^* = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*. \quad (109)$$

³⁰ خاطرات سالهای ۱۹۲۶ - ۱۹۲۷، ورنر هایزنبرگ



شکل ۴۲: ماکس بورن

باضرب کردن ψ^* در رابطه اول و ψ در رابطه دوم و کم کردن دو رابطه از هم به نتیجه زیر می رسیم

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi. \quad (110)$$

با استفاده از اتحاد های برداری می توان این معادله را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi. \quad (111)$$

و نهایتاً

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0, \quad (112)$$

که در آن

$$\rho = \psi^*\psi, \quad J = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \quad (113)$$

چگالی احتمال و بردار جریان احتمال هستند. هرگاه برای یک موج تخت از نوع $\psi = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ چگالی و جریان احتمال را حساب کنیم بدست می آوریم

$$\rho = A^2, \quad \vec{J} = A^2\frac{\hbar\vec{k}}{m}, \quad (114)$$

که نشان می دهد جریان احتمال برابر است با چگالی احتمال ضرب در سرعت ذرات. این رابطه به این شکل با تعبیرشهودی ما از جریان نیز سازگاری دارد.

بالاخره کدام یک از دو تصویرهای زیرگ و شرودینگر بیانگر مکانیک کوانتومی جدید بودند؟ مکانیک موجی شرودینگر نشان می داد که کمیت اصلی یعنی تابع موج $\psi(x)$ در یک معادله خطی صدق می کند و اگر ψ_1 و ψ_2 هر دو جواب معادله شرودینگر باشند، ترکیب خطی آنها نیز یک جواب معادله شرودینگر خواهد بود. بنابراین مجموعه تمام این توابع موج یک فضای برداری تعریف می کنند که می توانیم آن را با \mathcal{H} نشان دهیم. از آنجا که این توابع موج نشان دهنده چگالی احتمال هستند، می بایست بردارهای فضای \mathcal{H} بهنجاری پذیر باشند به این معنا که $\int dx \psi^* \psi$ می بایست محدود باشد یعنی فضای \mathcal{H} فضای توابع انتگرال مجذور پذیر است که آن را فضای هیلبرت می نامیم. حال می توانیم از خود بپرسیم که متوسط مکان یک ذره که آن را با $\langle X \rangle$ نشان می دهیم چقدر است. این متوسط برابر است با:

$$\langle X \rangle = \int dx x |\psi(x)|^2 = \int dx x \psi^*(x) x \psi(x), \quad (115)$$

که می توان آن را به عنوان عنصر ماتریسی یک عملگر X در فضای برداری توابع انتگرال مجذور پذیر تلقی کرد. اثر این عملگر روی توابع موج به صورت زیر است:

$$X : \psi(x) \rightarrow x \psi(x). \quad (116)$$

برای محاسبه متوسط تکانه به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\langle P \rangle = m \frac{d\langle X \rangle}{dt} = m \frac{d}{dt} \int \psi^* x \psi = m \int x \frac{\partial \rho}{\partial t} = -m \int x \frac{\partial J}{\partial x} \quad (117)$$

که در آن $J = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x})$. با استفاده از انتگرال جزء به جزء می توان با کمی محاسبه به نتیجه زیر رسید:

$$\langle P \rangle = \int \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi dx \quad (118)$$

که می توان آن را به عنوان عنصر ماتریسی یک عملگر $P \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ در فضای توابع انتگرال پذیر تلقی کرد. اثر این عملگر روی این توابع به شکل زیر است:

$$P : \psi(x) \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x). \quad (119)$$

نکته جالب آن است که این دو عملگر در همان رابطه ای صدق می کنند که هایزنبرگ پیشنهاد کرده بود، یعنی

$$[P, X] = \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, x \right] = i\hbar. \quad (120)$$

طی چند ماه نشان داده شد که مکانیک موجی و مکانیک ماتریسی هر دو جنبه های متفاوت از یک ساختار واحد هستند. در این سنتز نهایی پاوول دیراک نقش برجسته ای داشت. وی بیش از هر چیز بر زیبایی و انسجام ریاضی تکیه داشت.

«... کارهای پژوهشی اولیه من در اوایل سالهای ۱۹۲۰ که مبتنی بر مدارهای اتمی بود، کاملاً ناموفق از آب درآمد. من قصد داشتم مدارهای بور را واقعی تلقی کنم و برای آنها یک صورت بندی ریاضی درست کنم. هر مدار بور به یک الکترون تعلق داشت و برای این که اتم های چند الکترونی را توصیف کنم نیاز داشتم که یک نظریه برای مدارهای بور در برهم کنش با یکدیگر بسازم. من مثل خیلی های دیگر به شدت روی این مسئله کار کردم که البته حاصلی در بر نداشت و نمی توانست داشته باشد. هایزنبرگ نشان داده بود که برای حل این مسئله می بایست از یک ریاضیات کاملاً جدید که مبتنی بر کمیت های جابجا نشونده است استفاده کرد. اگر چه مدارهای بور مفاهیم فیزیکی قابل لمسی بودند ولی به درد چنین نظریه ای نمی خوردند. در آن هنگام بود که من آنچه را که باید، آموختم. یاد گرفتم که به عنوان اساس یک نظریه جدید به هیچ روی به مفاهیم قابل لمس فیزیکی اعتماد نکنم و تنها در جستجوی یک طرح منسجم ریاضی باشم، حتی اگر در نگاه اول هیچ نوع ارتباطی به فیزیک نداشته باشد. می بایست توجه خود را به یافتن یک طرح ریاضی زیبا معطوف می کردم...»³¹

در فصل آینده اصول موضوع مکانیک کوانتومی را چنان که کمابیش در آن دوران تدوین شده است بیان می کنیم و از این به بعد مکانیک کوانتومی را بر این اصول موضوع بنا می کنیم. اما قبل از آن می بایست به مفهوم دوگانگی موج و ذره پردازیم.

۹ اصل عدم قطعیت

اگر چه تلاش برای درک ساختمان اتمی و توضیح داده های طیفی به مکانیک ماتریسی جدید منجر شده بود ولی همچنان این سوال اساسی پیش روی هایزنبرگ وجود داشت که چرا می بایست تصویر کلاسیک خود از الکترون و مسیر آن را بدور بیندازیم. چرا نمی توان حتی به صورت ذهنی تصور کرد که الکترون در درون اتم مسیر معینی را که سلسله ای از نقاط پیوسته به هم در فضاست می پیماید؟ مگر این نیست که مسیر الکترون را بالاخره در اتاقک ابر می بینیم؟ چرا نباید برای الکترون در اتم مسیری درست مثل یک گوی قائل شد؟

«... در خلال آخرین ماه های سال ۱۹۲۶ تفسیر فیزیکی مکانیک کوانتومی محور اصلی بحث های بور و من بود. من در آن موقع در یک اتاقک زیر شیروانی در طبقه بالای انیستیتوی کپنهاگ که از پنجره هایش می شد درختان فالید پارک³² را دید، زندگی می کردم. بور اغلب شب هادیروقت به اتاق من می آمد و ما ساعت ها روی انواع واقسام آزمایش های ذهنی کار می کردیم تا تعبیر صحیح مکانیک جدید را بفهمیم...»

³¹ پاوول دیراک: مبانی ریاضی نظریه کوانتومی، ۱۹۷۸.
³² Falled Park



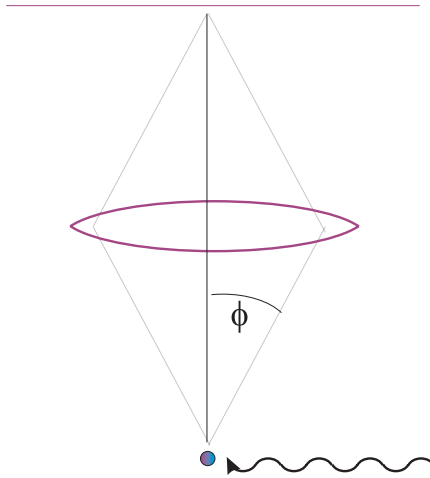
شکل ۵۲: پاول آدریان موریس دیراک

مسیر الکترون در اتاقک ابر را توضیح دهیم. از یک سو در صورتی که مکانیک کوانتومی هیچ جایی برای مسیر الکترون وجود نداشت، از سوی دیگر مسیر الکترون را در اتاقک ابر می شد به وضوح مشاهده کرد...»³³

«... پاسی از شب گذشته بود که یک مرتبه به یاد گفتگویی با اینشتین افتادم که گفته بود: « این نظریه است که تعیین می کند چه چیزی را می توان مشاهده کرد.» بلافاصله قانع شدم که کلید در بسته ای را که این همه مدت پشت آن مانده ام می توانم در این جا پیدا کنم. تصمیم گرفتم که برای یک پیاده روی بعد از نیمه شب به پارک بروم و درباره این موضوع فکر کنم. همیشه براحتی گفته بودیم که واقعاً مسیر الکترون را در اتاقک ابر می توان مشاهده کرد. اما شاید واقعاً آنچه را که در اتاقک ابر می دیدیم چیزی جز مجموعه ای گسسته از لکه های تقریبی و نامعینی که نشان می داد الکترون از آنجا عبور کرده است نبود. در واقع هم آنچه را که در اتاقک ابر می دیدیم چیزی جز قطرات آبی که خیلی بزرگ تر از اندازه الکترون هستند نبود. بعد از بازگشت، با یک محاسبه کوتاه نشان دادم که در چارچوب مکانیک ماتریسی می توان قائل به مسیرهای تقریبی برای ذرات شد، ولی این تقریب حدی داشت به این معنا که نمی توان مکان و تکانه یک ذره را با دقتی که حاصل ضرب شان از ثابت پلانک کمتر باشد تعیین کرد، چیزی که بعد ها به نام اصل عدم یقین شناخته شد...»

میکروسکوپ هایزنبرگ:

³³خاطرات سالهای ۱۹۲۶ - ۱۹۲۷، ورنر هایزنبرگ



شکل ۶۲: میکروسکوپ هایزنبرگ برای مشاهده مکان الکترون

فرض کنید که بخواهیم مکان ذره ای را با دقت خیلی زیاد تعیین کنیم. برای این کار از یک میکروسکوپ خیلی دقیق استفاده می کنیم، شکل ۶۲. از اپتیک کلاسیک می دانیم که با چنین میکروسکوپی تنها می توان مکان الکترون را با دقت

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \phi} \quad (121)$$

تعیین کرد. به همین دلیل برای آنکه دقت خود را بالا ببریم از طول موج های کوتاه استفاده می کنیم و زاویه ϕ را نیز هرچه بزرگ تر می گیریم (یا از طریق گرفتن عدسی پهن تر یا از طریق نزدیک بردن عدسی). امامی دانیم که «مشاهده» الکترون در میکروسکوپ یعنی اینکه فوتونی از منبع نور به آن برخورد کرده و پراکنده شده و از طریق عدسی به چشم (یا دستگاه حساسی که فوتون ها را ثبت می کند) می رسد. هرگاه چنین فوتونی به الکترون اصابت کرده و از طریق عدسی به چشم ما برسد، اندازه تکانه اش در راستای x به مقدار زیر نامعین است

$$\Delta p_x \sim 2p \sin \phi = 2 \frac{h}{\lambda} \sin \phi, \quad (122)$$

زیرا ما نمی دانیم که دقیقاً چه مسیری را پیموده و به چشم یا دستگاه ما رسیده است. حال اگر از قانون بقای تکانه استفاده کنیم نتیجه می گیریم که مولفه P_x تکانه الکترون نیز به همین اندازه نامعین است. بنابراین

$$\Delta x \Delta p_x \sim \frac{\lambda}{\sin \phi} 2 \frac{h}{\lambda} \sin \phi = 2h = 4\pi\hbar. \quad (123)$$

یعنی عمل مشاهده مکان الکترون تکانه آن را حداقل به میزان بالا آشفته می کند و بنابراین مسیر الکترون حتی به صورت ذهنی چیزی نیست که ما بتوانیم بدون مختل کردن اش آن را مشاهده کنیم زیرا به محض اینکه در یک لحظه مکان الکترون را مشاهده می کنیم دیگر سرعت اش آن چیزی نیست که قبلاً داشت و سرعت جدید و تصادفی ای پیدا می کند و به راه دیگری می رود.

اکنون می توانیم بفهمیم که چرا مدارهای بور برای الکترون نمی توانند واقعی باشند؟ چرا هایزنبرگ در شک کردن به واقعی بودن چنین مدارهایی محق بوده است؟ باز هم ملاک هایزنبرگ آن است که تنها چیزهایی واقعی هستند که بتوان آنها را با

آزمایش و مشاهده سنجید. بقیه تصویرهای ذهنی ما هستند و ربطی به واقعیت فیزیکی ندارند.

آیا مدارهای الکترون در اتم بور واقعیت دارند؟

برای آنکه یک مدار الکترون مثلاً مدار شماره n را مشاهده کنیم می بایست آن را بادقتی اندازه گیری کنیم که با مدار نزدیکی مثل مدار شماره $n - 1$ اشتباه نشود. بنابراین می بایست دقت ما چنان باشد که

$$\Delta r \ll R_n - R_{n-1} = \frac{\hbar n^2}{\alpha m c} - \frac{\hbar (n-1)^2}{\alpha m c} \approx \frac{2\hbar n}{\alpha m c} \quad (124)$$

اما این دقت در اندازه گیری مکان باعث منتقل کردن تکانه ای از مرتبه $\frac{\alpha m c}{2n} \gg \frac{\hbar}{\Delta r}$ به الکترون می شود. چنین تکانه ای باعث تغییر انرژی الکترون به مقدار زیر می شود

$$\Delta E \approx \frac{p^2}{2m} \gg \frac{1}{2} \frac{m c^2 \alpha^2}{n^2} = E_n, \quad (125)$$

که از انرژی الکترون در مدار n ام بسیار بیشتر است و همین باعث پرتاب شدن الکترون از مدارش می شود، یعنی اینکه نمی توان الکترون را هنگامی که در مدارش می چرخد، مشاهده کرد.

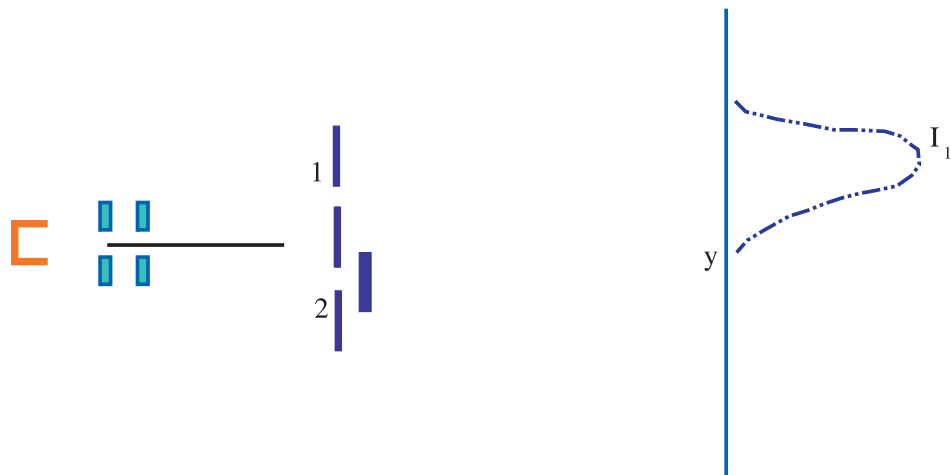
۱۰ دوگانگی موج و ذره: آیا الکترون ذره است یا موج؟ هردو است یا هیچ کدام؟

برای فهم دوگانگی موج و ذره (اگر بتوان البته آن را فهمید) بهترین راه آن است که به آزمایش دوشکاف³⁴ توجه کنیم. این آزمایش که در واقع شکل ساده شده آزمایش پراکندگی ذرات از یک کریستال و تداخل امواج است، تنها یک آزمایش ذهنی نیست زیرا امروزه با پیشرفت هایی که در نانوفیزیک انجام شده است می توان واقعاً آن را در آزمایشگاه انجام داد.

۱.۱۰ آزمایش دوشکاف

شکل ۷۲ طرح ساده آزمایش دوشکاف را نشان می دهد. در سمت چپ این شکل یک فیلامان حرارتی وجود دارد که بخاری از ذرات بارداریونیزه را از خود متصاعد می کند. میدان های الکتریکی به همراه مجموعه ای از یکسوکننده ها ذرات با تکانه مشخص را جدا می کنند. شکاف پایینی مسدود شده است. مکان هر ذره که روی پرده می نشیند (توسط یک آشکارساز) ثبت می شود. هرگاه این آزمایش را برای مدت طولانی انجام دهیم در اثر نشست ذرات روی یک پرده مثلاً یک پرده فلئورسانس یک طرح I_1 بوجود خواهد آمد. $I_1(y)$ در واقع متناسب با تعداد ذرات نشسته شده روی نقطه y است.

³⁴Double-Slit Experiment



شکل ۷۲: آزمایش دو شکاف : تنها شکاف بالایی باز است و طرح I_1 روی پرده مشاهده می شود.

شکل (۸۲) همان آزمایش را نشان می دهد با این تفاوت که این بار شکاف بالایی بسته است. طرحی که می بینیم برابر است با I_2 . در شکل (۹۲) هر دو شکاف باز هستند. انتظار داریم که این بار رابطه زیر برقرار باشد:

$$I_{1+2}(y) = I_1(y) + I_2(y). \quad (126)$$

اما آنچه که در آزمایش می بینیم آن است که ذرات مطابق با طرح I_{12} که یک طرح تداخلی است روی پرده می نشینند. این طرح درست مثل طرح تداخلی دو موج است که که طول موج آنها از رابطه $\lambda = \frac{h}{p}$ بدست آمده باشد، شکل ۱۳. در این شکل فاصله شکاف یک تا نقطه مورد نظر در پرده را با r_1 و فاصله شکاف دو را تا آن نقطه با r_2 نشان می دهیم. طرح روی پرده را تنها به این صورت می توانیم تبیین کنیم که انگار دو موج همفاز از شکاف های ۱ و ۲ با هم تداخل کرده اند و تعداد الکترون های ثبت شده روی پرده متناسب با شدت این موج است. هیچ طرح و الگوی ریاضی دیگری نمی تواند طرح روی پرده را توصیف کند. هرچقدر هم که عجیب به نظر برسد این تنها الگویی است که به طور دقیق نتایج آزمایش های بی شمار پراکندگی الکترون ها و دیگر ذرات را در موقعیت های گوناگون می تواند توصیف کند. در آزمایش دو شکاف تنها می توانیم بگوییم که هرگاه طرح I_1 را برابر با شدت موجی بگیریم که از شکاف ۱ به پرده می رسد یعنی

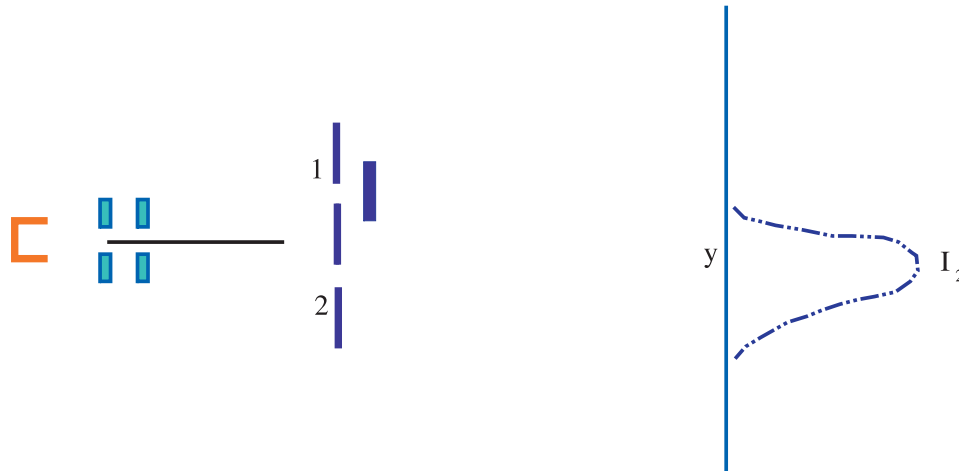
$$I_1 = |\psi_1|^2 \quad (127)$$

و هم چنین هرگاه طرح I_2 را برابر با شدت موجی بگیریم که از شکاف ۲ به پرده می رسد یعنی

$$I_2 = |\psi_2|^2, \quad (128)$$

آنگاه طرح I_{12} برابر است با شدت موجی که از تداخل این دو موج بدست می آید یعنی

$$I_{12} = |\psi_1 + \psi_2|^2. \quad (129)$$



شکل ۸۲: آزمایش دو شکاف : تنها شکاف پایینی باز است و طرح I_2 روی پرده مشاهده می شود.

هرگاه قرار دهیم

$$\psi_1(r, t) = Ae^{ikr_1 - \omega t} = Ae^{ik(r - \frac{a}{2}\theta) - \omega t}, \quad \psi_2(r, t) = Ae^{ikr_2 - \omega t} = Ae^{ik(r + \frac{a}{2}\theta) - \omega t}, \quad (130)$$

که در آن فرض کرده ایم فاصله پرده تا شکاف ها نسبت به فاصله دو شکاف از هم بسیار بزرگ است، آنگاه

$$I_{12} = |\psi_1(r, t) + \psi_2(r, t)|^2 = 4I \cos^2 \frac{ak}{2} \theta. \quad (131)$$

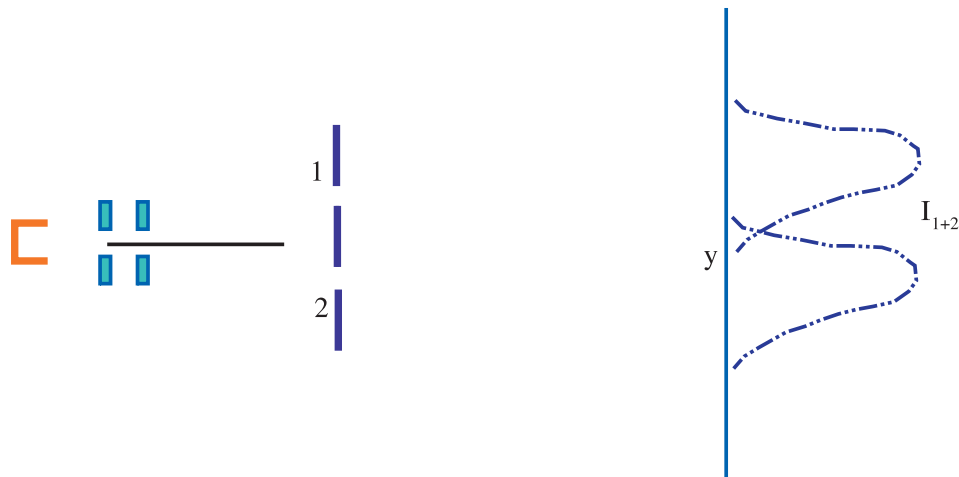
از آنجا که برای θ های کوچک، $y \approx D\theta$ شدت ورود الکترون ها را روی پرده می توانیم به عنوان تابعی از y بنویسیم. این تابع برابر خواهد بود با

$$I_{12} = 4I \cos^2 \frac{ak}{2} \frac{y}{D}. \quad (132)$$

این طرح تموجی یا نوارهای روشن و تاریک درست همان چیزی است که در آزمایش می بینیم، یعنی اینکه وقتی هر دو شکاف باز هستند، در نقطه مرکزی $y = 0$ شدت طرح برابر با صفر است و اولین نوار تاریک در نقطه

$$y = \frac{\pi D}{ak} = \frac{\lambda D}{2a}$$

قرار دارد. از روی محل این نوار تاریک می تواند با استفاده از این رابطه k و در نتیجه طول موج الکترون ها را بدست آورد. عملاً این همان کاری بود که دیویسون و گرمر و هم چنین تامسون انجام دادند و در دوران جدید نیز با دقت خیلی بیشتری انجام



شکل ۹۲: آزمایش دو شکاف : هر دو شکاف باز هستند . طرح روی پرده یعنی طرح I_{1+2} طرح ای است که انتظار داریم ببینیم.

شده است. فعلاً به این بسنده می کنیم که به الکترون ها موجی وابسته است که شدت آن تعداد آنها را در هر نقطه از زمان و فضا نشان می دهد.

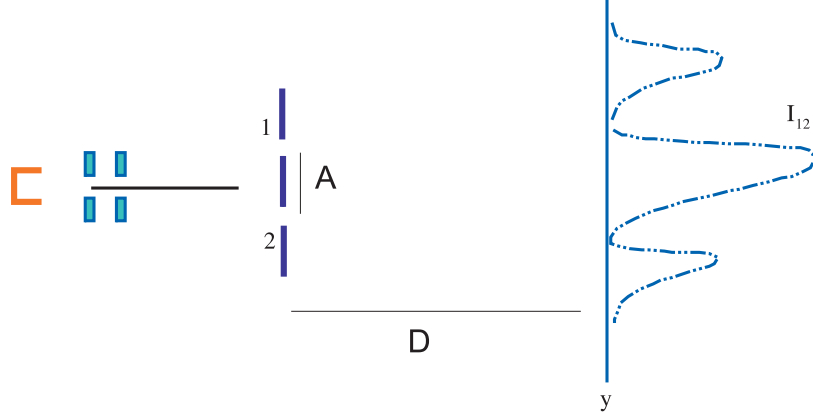
اکنون وقت آن رسیده است که به سوالات گوناگونی که این آزمایش ما را با آن مواجه می کند بازگردیم. در طرح تداخلی الکترون ها روی پرده چندین نکته جالب و شگفت انگیز وجود دارد:

الف : در جاهایی از پرده باز کردن هر دو شکاف با هم باعث شده است که تعداد حتی کمتری ذرات نسبت به وقتی که تنها یک شکاف باز بود به آن نقطه برسد. در جاهایی نیز مثل وسط پرده تعداد ذرات دوبرابر آن مجموع تعداد ذراتی است که در صورت باز بودن هر کدام از شکاف ها به تنهایی به پرده می رسید.

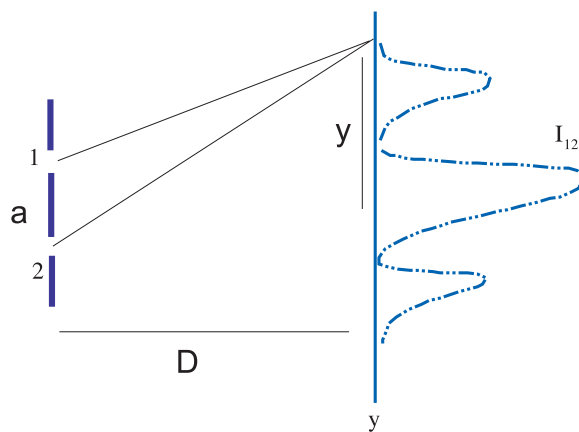
ب : برعکس در جاهای دیگری از ذرات باز کردن هر دو شکاف باعث شده است که تعداد ذراتی که به آن نقطه می رسد بیشتر از مجموع ذراتی شود که در صورتی که هر دو شکاف بازمی بود به آن نقطه می رسید.

ج : شکل این طرح تداخلی با رقیق کردن چشمه ذرات بطوریکه در هر آن فقط و فقط یکی از ذرات از شکاف ها عبور کند، تغییر نمی کند. بنابراین نمی توان گفت که ذرات هنگام باز بودن هر دو شکاف بایکدیگر طوری برهم کنش می کنند که اثرات بالا دیده شود.

د : هر کدام از ذرات را روی پرده نهایی به طور کامل توسط آشکارساز ثبت می کنیم و آشکارساز ما ماهیت ذره ای آن را



شکل ۳: آزمایش دو شکاف : هر دو شکاف باز هستند . طرح روی پرده یعنی طرح I_{12} طرح ای است که واقعاً روی پرده می بینیم.



شکل ۱۳: تداخل دو موج.

بخوبی تایید می کند. بنابراین نمی توان گفت که ذره در این آزمایش مثل یک موجود پیوستار عمل کرده است و بخشی از آن از یک شکاف و بخشی دیگر از یک شکاف دیگر عبور کرده است.

هن: البته می توان در گزاره (د) شک کرد. ممکن است که ذره در حین عبور از دو شکاف به صورت یک پیوستار (چیزی شبیه یک ابر) رفتار می کند و سپس در انتها موقع نشستن روی پرده تمامی این ابر دوباره به صورت یک ذره کوچک متمرکز می شود. برای پی بردن به راز رفتار ذره می توان درست پشت شکاف ها آشکارسازهایی گذاشت تا بفهمیم که ذره درست موقع عبور از شکاف ها چگونه رفتار می کند. اگر چنین کاری بکنیم متوجه می شویم که در آنجا هم ذره به صورت یک ابر یا ژله یا چیزی شبیه به آن رفتار نمی کند بلکه به تمامی (باتمام جرم و بار و دیگر خصوصیات خود) در آشکارساز ثبت می شود. ولی در این جا متوجه یک اتفاق مهم می شویم و آن این است که تلاش ما برای پی بردن به راز رفتار ذره باعث شده است که طرح تداخلی I_{12} از بین رفته است و جای خود را به طرح معمولی I_{1+2} داده است. ظاهراً ذره از تلاشی که برای پی بردن به رفتار اسرار آمیزش انجام داده ایم عصبانی شده است و دیگر آن کارشگفت انگیز را نمی کند.



شکل ۲۳: اینشتین و بور

و: حال که ذره تن به مشاهده ظریف خود رانمی دهد ما می توانیم به منطق ساده روی آوریم. بالاخره هر ذره ای که روی پرده می نشیند یا از شکاف ۱ آمده است یا از شکاف ۲.

تعداد ذراتی که روی پرده نشسته اند برابرند با تعداد ذراتی که از شکاف ۱ آمده اند + تعداد ذراتی که از شکاف ۲ آمده اند. اما تعداد ذراتی که از شکاف ۱ عبور کرده و روی پرده نشسته اند برابر است با I_1 و تعداد ذراتی که از شکاف ۲ عبور کرده و روی پرده نشسته اند برابر است با I_2 . پس حتی بدون مشاهده نزدیکی شکاف ها می توانیم حکم کنیم که طرحی که سرنجام روی پرده ثبت می شود می بایست برابر با $I_1 + I_2$ باشد.

در صورتی که اتم ها درست مثل اشیایی که ما با آنها آشنا هستیم مثل توپ فوتبال عمل کرده باشند استدلال بالا صحیح است. بالاخره هر اتم یا از شکاف بالایی عبور کرده و به پرده رسیده است و یا از شکاف پایینی و می بایست طرح مشاهده شده همان طرح بدون تداخل یعنی طرح I_{1+2} باشد. در حال حاضر ما نمی توانیم بفهمیم که الکترون ها یا ذرات میکروسکوپی دیگر چرا چنین رفتاری از خود بروز می دهند. مسئله حتی از این هم بدتر است. مانه تنها نمی توانیم چرایی رفتار الکترون ها را توضیح دهیم حتی چگونگی رفتار آن را بهتر از این نمی توانیم توضیح دهیم. در مقابل ایراداتی از این نوع که « بالاخره الکترون یا از این شکاف عبور می کند و یا از آن شکاف و در این صورت نمی بایست طرح تداخلی داشته باشیم » تنها می توانیم به این بسنده کنیم که بگوییم وقتی سوال عبور الکترون از شکاف ها را به صورت عملی و تجربی می خواهیم بررسی می بینیم که طرح تداخلی واقعا از بین می رود و ما به تناقضی بر نمی خوریم! برای آنکه بتوانیم واقعا تعیین کنیم که الکترون از کدام یک از شکاف ها عبور کرده است می بایست بتوانیم مکان آن را روی پرده ای که شکاف ها در آن قرار دارد با دقتی بیش از فاصله دو شکاف تعیین کنیم، یعنی اینکه $\Delta y' \ll a$. (در این جا y' را برای مختصه مکان در روی پرده اول و y را برای مختصه مکان روی پرده ای که الکترون ها روی آن می نشینند بکار می بریم.) اما چنین دقتی نیازمند آن است که به تکانه آن یعنی p_y عدم دقتی معادل Δp_y وارد کنیم به نحوی که $\Delta p_y \approx \frac{\hbar}{\Delta y'} \gg \frac{\hbar}{a}$. اما چنین ضربه ای به الکترون ها باعث می شود که زاویه نشستن الکترون روی پرده به ترتیب زیر مختل شود:

$$\Delta \theta \sim \frac{\Delta p_y}{p_x} \gg \frac{\frac{\hbar}{a}}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{\lambda}{a} \quad (133)$$

این امر به معنای آن است که مکان الکترون ها روی پرده نهایی دچار عدم قطعیتی به صورت زیر شود

$$\Delta y \gg D \Delta \theta = \frac{\lambda D}{2a}, \quad (134)$$

و این به معنای از بین رفتن طرح تداخلی است زیرا فاصله نوارهای روشن و تاریک از مرتبه $\frac{\lambda D}{2a}$ است. بنابراین نمی توانیم هم طرح تداخلی را ببینیم و هم تعیین کنیم که الکترون از کدام شکاف عبور کرده است.

اغلب در تاریخ علم اتفاق افتاده است که در برهه‌هایی از زمان فهمیده‌ایم که آنچه را که قرن‌ها بدیهی می‌پنداشته‌ایم اصلاً بدیهی نیستند بلکه رسوبات ذهنی ما هستند که هیچ‌گاه بدهت آنها را مورد شک قرار نداده‌ایم. زمان مطلق و این که همزمانی دو رویداد از دیدگاه همه ناظران برقرار است یکی از این مفاهیم بود که با پیدایش نسبیت مورد بازنگری قرار گرفت. تقریباً در همه موارد شک و تردید در این امور به ظاهر بدیهی از همان ابتدا آغاز نمی‌شود، و این هم طبیعی است چرا که این مفاهیم طی قرن‌ها در ذهن ما جا خوش کرده‌اند، بلکه معمولاً برای رفع ناسازگاریهای جدی‌ای که بین نظریه‌های قبلی و جهان تجربی و مشاهدات واقعی ظهور کرده است ما مجبور می‌شویم که ساختار ریاضی نظریه‌هایمان را متحول کنیم تا با مشاهدات تجربی جور در بیایند. اما این ساختارهای جدید چنان‌اند که با آن امور به ظاهر بدیهی تناقض دارند و در این هنگام است که به فکر می‌افتیم درباره بدهت آن امور بازنگری کنیم. همزمانی مطلق که تا سال ۱۹۰۵ یعنی سال پیدایش نسبیت بدیهی تصور می‌شد یکی از این مفاهیم بود. ایده وجود یک مسیر واقعی برای ذرات میکروسکوپی نیز یکی دیگر از این امور است. به همان نوع استدلال‌های متکی بر آزمایش‌های ذهنی که اینشتین نشان داده بود همزمانی مطلق امری بدیهی نیست، بور و هایزنبرگ نشان دادند که تصور یک مسیر برای الکترون امری تناقض‌آمیز است. البته این استدلال‌های متکی بر قبول دوگانگی موج و ذره است، یعنی اینکه با استدلال‌ها و شواهد تجربی‌ای بیرون از مکانیک کوانتومی هنوز نمی‌توانیم نشان دهیم که مسیر الکترون و تعیین همزمان مکان و سرعت آن اموری هستند که تصورشان باطل است. بنابراین آنچه که هایزنبرگ و سپس بعد‌ها بور و دیگران نشان دادند آن است که مکانیک کوانتومی از نظر مفهومی نیز یک نظریه بدون تناقض است.

بررسی ما از چگونگی تولد مکانیک کوانتومی در این جا به پایان می‌رسد. در درس آینده ما نقطه شروع خود را اصول موضوع مکانیک کوانتومی قرار خواهیم دید و سعی می‌کنیم که همه بنای مکانیک کوانتومی را بر اساس آنها استوار کنیم. بعد از نشیب و فراز فراوان طی مدت بیش از یک ربع قرن سرانجام اصول مکانیک کوانتومی کمابیش مثل اصول موضوعه هندسه اقلیدسی به طور کامل تدوین شده بود.

تاریخ فیزیک در قرن بیستم تاریخ موفقیتی ابدی است. قوه تصور اجتماعی بشر هرگز نتیجه‌ای که از نظر اهمیت با این موفقیت قابل مقایسه باشد عرضه نداشته است. اهرام مصر، حماسه ایلید، اشعار و کلیساهای عظیم تاریخ بشریت، هیچ‌کدام را تاب مقابله با این غول عظیم نیست. مردانیکه با قدرت تصور خویش مدارج مختلف این راه را پیموده‌اند قهرمانان پیشتاز عصر ما را تشکیل می‌دهند. مندلیف با ورقهای گوناگونش از عناصر شیمیایی، جی. جی. تامسون که اعتقاد یونانی کهن را مبنی بر تقسیم‌ناپذیری اتم ریشه‌کن ساخت، رادفورد که به آن شکل یک منظومه شمسی داد، نیلز بور که موجب شد صحت این تصویر به اثبات برسد، و بالاخره اروین شرودینگر، ورنر هایزنبرگ، ماکس بورن و پاوول دیراک....³⁵

³⁵عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی،



شکل ۳۳: ورنر هایزنبرگ در سالهای پیری

۱۱. قدردانی

در تصحیح متن این درسنامه آقای محمد صادق فیض به من کمک بسیاری کرده‌اند، زیرا با صبر و حوصله تمام متن را خوانده و اشکالات و ایرایشی آن را به من یادآوری کرده‌اند. به این وسیله از ایشان تشکر می‌کنم.

۱۲. مسئله‌ها

۱ - تابش جسم سیاه در کلاس چگالی انرژی تابشی در واحد حجم در واحد فرکانس را بدست آورده ایم.

الف: با استفاده از این رابطه کل چگالی انرژی تابشی در واحد حجم را که در همه فرکانس‌ها تابش می‌شود بدست آورید.

ب: طول موجی را که در آن بیشترین چگالی انرژی تابشی وجود دارد بدست آورده و رابطه آن را با دما مشخص کنید. اگر دمای یک جسم به 6000 درجه کلوین برسد، بیشترین انرژی تابشی خود را در چه طول موجی تابش می‌کند.

ج: کل کیهان را می‌توان به مثابه یک سیستم در نظر گرفت که در آن انرژی تابشی به صورت فوتون‌ها به تعادل گرمایی رسیده است. در حال حاضر دمای این سیستم 2.7 درجه کلوین است. با توجه به پاسخ خود به قسمت‌های قبلی این سوال مشخص کنید که فوتون‌های تابش زمینه کیهانی بیشتر چه طول موجی دارند.



شکل ۴۳: نیلز بور و ولفانگ پاوولی

د: اگر شعاع کیهان را حدود ۱۵ میلیارد سال نوری بگیریم، مقدار کل انرژی تابشی موجود در کیهان چقدر است؟

۲ - تابش جسم سیاه در یک محفظه خالی چگالی انرژی تابشی در واحد حجم در واحد طول موج برابر است با $u(\lambda)$.

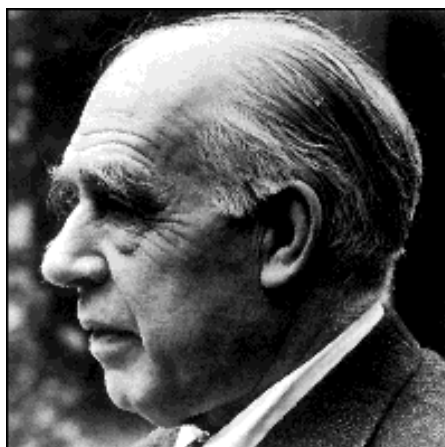
الف: فرض کنید که در دیواره این محفظه یک سوراخ بسیار کوچک وجود دارد. برای سادگی فرض کنید که این المان یک مربع بسیار کوچک در صفحه xy است. در فاصله زمانی t و $t + dt$ تمام فوتون هایی که درون محفظه قرار دارند و فاصله آنها و هم چنین جهت سرعت آنها مقادیر مناسبی دارند می توانند از این المان عبور کرده و از محفظه خارج شوند. با یک استدلال هندسی، چگالی انرژی تابشی از واحد سطح در واحد طول موج که آن را با $S(\lambda)$ نشان می دهیم بدست آورید و نشان دهید که

$$S(\lambda) = \frac{c}{4}u(\lambda), \quad (135)$$

که در آن c سرعت نور است.

۳ - فوتون الف: تعداد فوتون هایی را که یک لامپ معمولی ۴۰ وات در مدت زمان یک ساعت تابش می کند تخمین بزنید.

ب: اگر فوتون های تابش شده از این لامپ همه در یک جهت حرکت کنند، تکانه کل آنها چقدر خواهد بود؟ اگر یک ذره یک گرمی چنین تکانه ای داشته باشد، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ اگر چنین لامپی به مدت ۱۰۰۰ ساعت کار کند چقدر از جرم آن کاسته خواهد شد؟



شکل ۵۳: نیلز بور در آخرین سالهای عمر

ج: انرژی و تکانه فوتون های زیر را برحسب الکترون ولت تخمین بزنید.

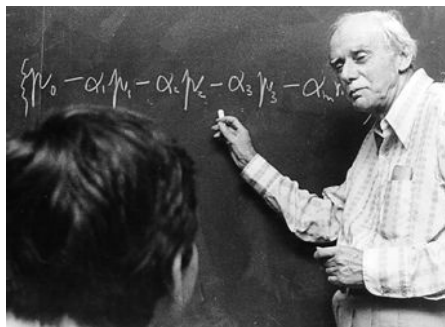
— فوتون های اشعه x ، فوتون های اشعه مرئی، فوتون های میکرومتر، فوتون های رادیویی .

۴ — آزمایش کامپتون الف : در آزمایش کامپتون فرض کنید که الکترون قبل از برخورد با فوتون با سرعت v در حال حرکت است. برای سادگی فرض کنید که سرعت اولیه فوتون و الکترون در یک امتداد است. حال رابطه بین طول موج فوتون پراکنده شده و فوتون اولیه را بدست آورید.

ب: فرض کنید که انرژی جنبشی الکترون ای که در قسمت الف به آن اشاره شد، در حدود 10 الکترون ولت است و فوتون های ورودی طول موجی برابر با 1 نانومتر است. حساب کنید که طول موج فوتون خروجی چقدر است. اگر الکترون اولیه ساکن بود، این تفاوت طول موج چقدر می شد؟

۵ — مدل اتمی بوهر الف: در مدل اتمی بوهر، هرگاه الکترون از لایه دوم به لایه اول سقوط کند، طول موج فوتون گسیل شده چقدر خواهد بود؟

ب : در مدل اتمی بوهر نشان دهید که فرکانس گردش الکترون به دور هسته برابر است با $\nu = \frac{2|E|}{h n}$ که در آن E انرژی کل الکترون است.



شکل ۶۳: پاول دیراک در سالهای پیری

ج: وقتی که الکترون گذاری از لایه n_i به لایه n_f انجام می دهد طول موج فوتون گسیل شده در رابطه زیر صدق می کند:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (136)$$

که در آن R ثابت رایدربرگ خوانده می شود. مقدار این ثابت را در مدل اتمی بوهر بدست آورید. مقدار عددی آن را نیز محاسبه کنید.

د: سری بالمر به آن دسته از خطوط طیفی گفته می شود که ناشی از گذار الکترون از لایه های بالاتر به لایه $n_f = 2$ است. سه طول موج بزرگتر را در سری بالمر تعیین کنید. هم چنین تعیین کنید که خطوط بالمر در چه محدوده ای از طول موج ها قرار دارند.

ه: سوال قبلی را برای سری لایمن ($n_f = 1$) پاسخ دهید.

و: در مدل اتمی بوهر هرگاه جرم هسته را محدود و برابر با M در نظر بگیریم، ثابت رایدربرگ تغییر خواهد کرد. ثابت رایدربرگ جدید را بدست آورید.