درس پنجم: کوانتش فضای فاز

۱ مقدمه

هرآنچه را که درباره رفتار موجی و ذره‌ای گفته‌ایم، از پیشنهاد دوبروی گرفته تا اصل عدم قطعیت و معادله شرودینگر همه را می توان به فراموشی سپرد یا به کناری نهاد. همه این نتایج را می توان از اصول موضوع استنتاج کرد. این کاری است که در این درس انجام می دهیم.

۲ عملگرهای مکان و مختصات

مطابق با اصول موضوع برای ذره ای که دریک بعد حرکت می کند، دو عملگر هرمیتیِ X و P خواهیم داشت که در رابطه جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[X, P] = i\hbar I. \tag{1}$$

خواننده ممکن است از غنای این رابطه و نتایجی که از آن گرفته خواهد شد شگفت زده شود. نخستین نتیجه ای که بدست می آید آن است که فضای هیلبرتی که بخواهد درجات آزادی مکان و تکانه را توصیف کند می بایست بی نهایت بعد باشد، زیرا در یک فضای محدود بعد به ازای هردوعملگر داریم

$$tr([A, B]) = tr(AB) - tr(BA) = 0, \tag{2}$$

واین با رابطه $[X, P] = i\hbar$ مباینت دارد.

———————————————————————————

تمرین: دریک فضای بی نهایت بعدی که دارای پایه بهنجار و متعامدِ $\{|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \cdots\}$ است، عملگرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= |n-1\rangle, \quad a|0\rangle = 0 \\ a^\dagger|n\rangle &= |n+1\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

دراین فضا $tr[a,a^\dagger]$ را حساب کنید. چرا در یک فضای بی نهایت بعدی $tr[A,B]$ می تواند متفاوت با صفر باشد؟

———————————————————————————

فضای هیلبرت را با $\mathcal{H}$ نمایش می دهیم. از آنجا که X یک عملگر هرمیتی است، ویژه بردارهای آن فضای هیلبرت را جاروب می کنند. ویژه بردارهای این عملگر را $|x\rangle$ و ویژه مقادیر آن را با x نشان می دهیم. (از این به بعد علامت $\hat{}$ را بر روی عملگرها نخواهیم نوشت.)

$$X|x\rangle = x|x\rangle. \tag{4}$$

اگر بخواهیم این حالت ها را مطابق با اصول مکانیک کوانتومی تعبیر کنیم باید بگوییم که حالت $|x\rangle$ حالتی است که درآن ذره درست درمکان x قراردارد. زیرا $|x\rangle$ ویژه بردارِ عملگر هرمیتیِ X است که به مشاهده پذیر مکان نسبت داده شده است و مطابق با اصل موضوع اندازه گیری هرگاه این مشاهده پذیر را اندازه بگیریم مقدار x را بدست می آوریم.

از کجا معلوم است که ویژه مقدارهای x مقادیر پیوسته‌ای اختیار می کنند.برای پاسخ گویی به این سوال رابطه‌ای را استنتاج می کنیم که در آینده فواید فراوان دیگری نیز در بر دارد.

———————————————————————————

تمرین: از لم هاسدورف استفاده کنید و از رابطه $[X,P]=i\hbar$ نتیجه بگیرید که

$$e^{\frac{i}{\hbar}a\ P}Xe^{-\frac{i}{\hbar}a\ P} = X + a. \tag{5}$$

———————————————————————————

حال فرض کنید که $X|x\rangle = x|x\rangle$. و قرار دهید $|\phi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}a\ P}$ که درآن a یک عدد حقیقی دلخواه است. از رابطه فوق نتیجه می گیریم که

$$X|\phi\rangle = Xe^{-\frac{i}{\hbar}a\ P}|x\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}a\ P}(X+a)|x\rangle = (x+a)|\phi\rangle. \tag{6}$$

بنابراین هرگاه $|x\rangle$ یک ویژه مقدارِ X باشد، $e^{-\frac{i}{\hbar}a\ P}|x\rangle$ نیز یک ویژه بردار با ویژه مقدارِ $x+a$ است. این رابطه را به شکل زیر می نویسیم:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}a\ P}|x\rangle = |x+a\rangle. \tag{7}$$

بنابراین x مقادیر پیوسته ای از $-\infty$ تا ∞ رااختیارمی کند. این رابطه بیان می کند که عملگر $e^{-\frac{i}{\hbar}a\ P}$ عمل انتقال را در پایه مختصات انجام می دهد.

X یک عملگرهرمیتی است، مقادیر ویژه یعنی x ها حقیقی بودهو بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متفاوت آن بریکدیگر عمود هستند، یعنی

$$\langle x|x'\rangle = 0 \qquad \text{اگر} \qquad x \neq x'. \tag{8}$$

هم چنین این ویژه بردارهایک پایه کامل برای فضا تشکیل می دهند یعنی

$$\int dx|x\rangle\langle x| = I. \tag{9}$$

باید دقت کنیم که حالت $|x\rangle$ یک حالت فیزیکی نیست زیرا هرنوع وسیله اندازه گیری که برای اندازه گیری مکان یک ذره بکارببریم، مثل وقتی که ازیک پرده فلورسانس برای تعیین مکان یک ا لکترون استفاده می کنیم، حتماً دارای قدرت تفکیک محدودی است و تنها می تواند مکان یک ذره را دریک بازه مثل $(x-a, x+a)$ تعیین کند. حالت چنین ذره ای را می توان با $|x-a, x+a\rangle$ نشان داد که یک حالت فیزیکی بهنجاراست یعنی نرم آن یک است. ولی کارکردن با این حالت ها ساده نیست (زیرا بایکدیگر همپوشانی دارند و نمی توان ازآنها به عنوان یک پایه استفاده کرد) و بناکردن ساختمان مکانیک کوانتومی برروی آنها دشوار و بی حاصل است. بنابراین بجای این حالت ها ازحالت های ایده آل $|x\rangle$ استفاده می کنیم که اگرچه فیزیکی نیستند ولی دارای خواص جالب و مهمی هستند. می توان این حالت ها به عنوان یک پایه مناسب برای بسط بردارهای حالت استفاده کرد.

حالتی مثل $|\psi\rangle$ تصورکنید. باتوجه به رابطه کامل بودن پایه یعنی رابطه 9 این حالت را می توان به صورت زیربسط داد:

$$|\psi\rangle = \int dx|x\rangle\langle x|\psi\rangle =: \int dx|x\rangle\psi(x). \tag{10}$$

دررابطه آخر نماد $\psi(x)$ را بجای $\langle x|\psi\rangle$ بکاربرده ایم. $\psi(x)$ تابع موج حالت $|\psi\rangle$ درفضای مختصات خوانده می شود. این تابع درواقع مولفه بردار حالت $|\psi\rangle$ درپایه $|x\rangle$ است.

این رابطه بیان می کند که ضریب بسط، یعنی $\psi(x) := \langle x|\psi\rangle$ دامنه احتمال یافتن ذره در نقطه x است، به عبارت دیگر $|\langle x|\psi\rangle|^2$ چگالی احتمال یافتن ذره درنقطه x است و $|\psi(x)|^2\ dx$ احتمال یافتن ذره دربازه‌ای به پهنای dx حول نقطه x است.

دیدیم که هرگاه $x \neq x'$ باشد آنگاه $\langle x|x'\rangle = 0$. می خواهیم ببینیم که درحالتِ $x = x'$، این ضرب داخلی چقدراست. برای این کار کافی است که طرفین رابطه 10 را در $|x'\rangle$ ضرب کنیم. خواهیم داشت:

$$\langle x'|\psi\rangle = \int dx \langle x'|x\rangle\langle x|\psi\rangle, \tag{11}$$

ویا

$$\psi(x') = \int dx \langle x|x'\rangle\psi(x). \tag{12}$$

حال اگر این رابطه را با آنچه که دردرس دوم دیده ایم مقایسه کنیم درمی یابیم که $\langle x'|x\rangle$ چیزی نیست جز تابع دلتای دیراک یعنی

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'). \tag{13}$$

آنچه که تا کنون گفتیم به طور کامل برای عملگر P نیز صادق است. بنابراین تنها به نوشتن رابطه ها و تفسیر تابع موج می پردازیم.

می توان ویژه بردارهای عملگر P را به عنوان پایه ای برای فضای هیلبرت درنظرگرفت:

$$\begin{aligned} &P|p\rangle = p|p\rangle \\ &\langle p|p'\rangle = \delta(p - p') \\ &\int dp|p\rangle\langle p| = I. \end{aligned} \tag{14}$$

حالت $|p\rangle$ حالت ایده آلی است که ازآن به حالتی تعبیرمی کنیم که ذره دقیقاً تکانه p دارد.

———————————————————————————

تمرین: به همان ترتیبی که در بالا استدلال کردیم ثابت کنید که

$$e^{\frac{i}{\hbar}q\ X}|p\rangle = |p + q\rangle. \tag{15}$$

این تمرین نشان می دهد که ویژه مقدارهای عملگرِ P نیز مقادیر حقیقی از $-\infty$ تا ∞ را اختیار می کنند .

———————————————————————————

هربردار حالتِ دلخواهِ $|\psi\rangle$ را می توان برحسب این پایه نیز بسط داد:

$$|\psi\rangle = \int dp|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \int dp\tilde{\psi}(p)|p\rangle. \tag{16}$$

که درآن $\tilde{\psi}(p)$ تابع موج درفضای تکانه خوانده می شوند.
$\tilde{\psi}(p)$ دامنه احتمال این است که دراندازه گیری تکانه ذره ای که درحالت $|\psi\rangle$ قرار دارد مقدار p ظاهرشود. به عبارت ساده تر چگالی احتمال یافتن ذره مورد نظر با تکانه p با تابع $|\tilde{\psi}(p)|^2$ داده می شود. داریم

$$\langle p|P|p'\rangle = p'\delta(p-p') = p\delta(p-p'). \tag{17}$$

هم چنین اثر عملگر P روی توابع موج درفضای تکانه آن است که $\tilde{\psi}(p)$ را به $p\tilde{\psi}(p)$ تبدیل می کند یعنی

$$P: \quad \tilde{\psi}(p) \longrightarrow p\tilde{\psi}(p). \tag{18}$$

به عبارت دیگر وقتی که درپایه تکانه کارمی کنیم می توانیم براحتی به جای عملگرِ P، مقدارِ p را قراردهیم.

۳ رابطه بین پایه های مختصات و تکانه

اکنون سوال می کنیم که چه رابطه ای بین پایه‌ی تکانه و $\{|p\rangle\}$ پایه مختصات $\{|x\rangle\}$ وجود دارد؟ دیدیم که

$$e^{\frac{-i}{\hbar}aP}|x\rangle = |x+a\rangle. \tag{19}$$

حال ازرابطه 19 می توانیم ضرب داخلی $\langle p|x\rangle$ را بدست آوریم. برای این کارطرفین رابطه 19 را در $\langle p|$ ضرب می کنیم و بدست می آوریم

$$\langle p|e^{\frac{-i}{\hbar}aP}|x\rangle = \langle p|x+a\rangle, \tag{20}$$

ویا

$$e^{\frac{-i}{\hbar}ap}\langle p|x\rangle = \langle p|x+a\rangle, \tag{21}$$

که حل آن به فرم زیراست:

$$\langle p|x\rangle = A\ e^{\frac{-i}{\hbar}xp}, \tag{22}$$

ویا

$$\langle x|p\rangle = Ae^{\frac{i}{\hbar}px}, \tag{23}$$

که درآن A یک ثابت است که می بایست تعیین شود.
برای تعیین A به رابطه زیرتوجه می کنیم:

$$\begin{aligned}\delta(x-x') &= \langle x|x'\rangle = \int dp\langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle = \int dpAe^{\frac{i}{\hbar}xp}Ae^{\frac{-i}{\hbar}x'p} \\ &= A^2\int dpe^{\frac{i}{\hbar}(x-x')p} = A^2 2\pi\hbar\delta(x-x').\end{aligned} \tag{24}$$

بنابراین خواهیم داشت $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ و درنتیجه

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}xp}. \tag{25}$$

هرگاه بخواهیم این رابطه را براساس اصول موضوع مکانیک کوانتومی تفسیرکنیم باید بگوییم که ذره ای که دقیقاً با تکانه p درحرکت است دامنه احتمال یافتن آن درنقطه ای مثل x برابراست با $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}xp}$. این تابع نشان دهنده یک موج تخت است که که طول موج آن از رابطه $\lambda = \frac{h}{p}$ بدست می آید. بنابراین توانسته ایم دوگانگی موج و ذره و اصل دوبرویی را از اصول موضوع خود استخراج کنیم و نیازی نیست که آن ها رابه عنوان یافته های تجربی جداگانه ای درزیربنای مکانیک کوانتومی بکارببریم. یک بارکه اصول موضوع مکانیک کوانتومی را بپذیریم همه نتایج نظری و تجربی را باید بتوانیم ازآن اصول استخراج کنیم. نکته دیگری که درباره این رابطه اهمیت دارد آن است که احتمال (ونه دامنه احتمال) یافتن یک ذره که درحالت $|p\rangle$ قراردارد برابراست با مقدار ثابت $\frac{1}{2\pi\hbar}$. یعنی احتمال یافتن ذره درتمام نقاط فضا یکسان و درنتیجه احتمال کل برابر با بی نهایت است. این امر ناشی از ایده آل بودن حالت $|p\rangle$ است، زیرا این حالت نشان دهنده آن است که با یک اندازه گیری توانسته ایم تکانه یک ذره را با دقت بی نهایت و با تفکیک صفر دقیقاً تعیین کنیم ومی دانیم که هرنوع اندازه گیری قدرت تفکیک محدودی دارد. درعمل تنهامی توانیم حالت هایی تهیه کنیم که تکانه آن ها تقریباً معین باشد. چنین حالت هایی را می توان به شکل زیرنشان داد:

$$|\phi\rangle = \int dp\phi(p)|p\rangle \tag{26}$$

که درآن $\phi(p)$ تابعی است که دراطراف یک تکانه مثل $\overline{p}$ مقدار غیرصفردارد.

حال که ضرب داخلی $\langle x|p\rangle$ معلوم شده است می توانیم رابطه بین تابع موج درفضای مختصات و تابع موج درفضای تکانه را پیداکنیم: داریم

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \int dx\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dxe^{-i\frac{px}{\hbar}}\psi(x),$$

$$\tilde{\psi}(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dp\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp e^{i\frac{px}{\hbar}}\tilde{\psi}(p). \tag{27}$$

بنابراین تابع موج درفضای تکانه یعنی $\tilde{\psi}(p)$ و تابع موج درفضای مختصات یعنی $\psi(x)$ تبدیل فوریه یکدیگر هستند.

۱.۳ عنصرماتریسی عملگرها درپایه های مختصات و تکانه

واضح است که هرکدام از عملگرهای X و P درپایه مربوط به خود قطری هستند به این معنا که

$$\langle x'|X|x\rangle = x\delta(x-x') \qquad \langle p'|P|p\rangle = p\delta(p-p'). \tag{28}$$

برای اینکه عملگر X را درپایه $\{|p\rangle\}$ بنویسیم به ترتیب زیرعمل می کنیم:

$$\begin{aligned}
\langle p'|X|p\rangle &= \langle p'|X(\int dx|x\rangle\langle x|p\rangle) = \int dx x\langle p'|x\rangle\langle x|p\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx x e^{ix\frac{p-p'}{\hbar}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})e^{ix\frac{p'-p}{\hbar}} \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-p').
\end{aligned} \tag{29}$$

هم چنین می توان عملگر P را درپایه $\{|x\rangle\}$ نوشت. برای این کار توجه می کنیم که

$$\begin{aligned}
\langle x'|P|x\rangle &= \langle x'|P(\int dp|p\rangle\langle p|x\rangle) = \int dp p\langle x'|p\rangle\langle p|x\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp p e^{-ip\frac{x-x'}{\hbar}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp(i\hbar\frac{\partial}{\partial x})e^{-ip\frac{x-x'}{\hbar}} \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x'),
\end{aligned} \tag{30}$$

ویا

$$\langle x|P|x'\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x'). \tag{31}$$

به کمک این روابط می توانیم اثر عملگرهای X و P را روی توابع موج چه درنمایش مختصات و چه درنمایش تکانه بدست بیاوریم. می نویسیم:

$$X|\psi\rangle = \int dx X|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx x\psi(x)|x\rangle. \tag{32}$$

این رابطه نشان می دهد که اثر عملگر X روی تابع موج $\psi(x)$ به صورت زیراست:

$$X : \psi(x) \longrightarrow x\psi(x). \tag{33}$$

امااثر عملگر تکانه روی تابع موجِ $\psi(x)$ غیربدیهی است. زیرا

$$\begin{aligned}\langle x|P|\psi\rangle &= \int dx'\langle x|P|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle = \int dx'(\frac{\hbar\partial}{i\partial x}\delta(x-x'))\psi(x') \\ &= \frac{\hbar\partial}{i\partial x}\int dx'\delta(x-x'))\psi(x') = \frac{\hbar\partial}{i\partial x}\psi(x).\end{aligned} \tag{34}$$

که نشان می دهد اثرعملگر P روی تابع موجِ $\psi(x)$ به صورت مشتق است :

$$P : \psi(x) \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x). \tag{35}$$

به طور مشابه می توان اثر عملگرهای X و P را روی تابع موج درفضای تکانه یعنی $\tilde{\psi}(p)$ بدست آورد. بامحاسبات مشابه بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}&\langle p|P|\psi\rangle = p\langle p|\psi\rangle \\ &\langle p|X|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p).\end{aligned} \tag{36}$$

که به طور خلاصه نشان دهنده اثرات زیرروی تابع موج درفضای تکانه است:

$$\begin{aligned}&P : \tilde{\psi}(p) \longrightarrow p\tilde{\psi}(p) \\ &X : \tilde{\psi}(p) \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p).\end{aligned} \tag{37}$$

بالاخره می توان اثر عملگر $T_a := e^{\frac{i}{\hbar}aP}$ را روی تابع موج درفضای مختصات بدست آورد: باتوجه به اینکه $T_a := e^{-\frac{i}{\hbar}aP}|x\rangle = |x+a\rangle$ خواهیم داشت

$$\langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}aP}|\psi\rangle = \langle x-a|\psi\rangle. \tag{38}$$

درنتیجه اثر عملگر T_a روی تابع موج $\psi(x)$ چنین است:

$$(T_a := e^{-\frac{i}{\hbar}aP}) : \psi(x) \longrightarrow \psi(x-a). \tag{39}$$

۴ رابطه عدم قطعیت

در درس های پیشین به طور کیفی رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ را بیان کردیم. اکنون وقت آن است که شکل دقیق این رابطه را بیان کنیم و آن را از اصول موضوع نتیجه بگیریم. هرگاه روی حالت $|\psi\rangle$ اندازه گیری مختصه X یا تکانه P انجام دهیم، میزان عدم یقینی را که در این اندازه گیری ها بدست می آوریم می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}, \qquad \Delta P = \sqrt{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2}. \tag{40}$$

باید توجه کنیم که تمام این عناصر ماتریسی روی حالتِ $|\psi\rangle$ محاسبه شده‌اند، یعنی $\langle X\rangle = \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle$ و الی آخر. رابطه عدم قطعیت بیان می کند که

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{41}$$

برای اثبات این رابطه دو عملگر زیر را تعریف می کنیم:

$$A := \hat{X} - \langle\hat{X}\rangle, \qquad B := \hat{P} - \langle\hat{P}\rangle. \tag{42}$$

براحتی معلوم می شود که

$$[A, B] = i\hbar. \tag{43}$$

حال حالت های زیر را تعریف می کنیم:

$$|\alpha\rangle = A|\psi\rangle, \qquad |\beta\rangle = B|\psi\rangle. \tag{44}$$

داریم

$$(\Delta X)^2 = \langle\psi|(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle)^2|\psi\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle, \qquad (\Delta P)^2 = \langle\psi|(\hat{P} - \langle\hat{P}\rangle)^2|\psi\rangle = \langle\beta|\beta\rangle. \tag{45}$$

می دانیم که به ازای هر عدد حقیقی λ

$$||\ |\alpha\rangle - i\lambda|\beta\rangle\ || \geq 0 \tag{46}$$

با باز کردن سمت چپ خواهیم داشت و استفاده از 53 بدست می آوریم:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle + \lambda^2\langle\beta|\beta\rangle + \lambda\hbar \geq 0. \tag{47}$$

این رابطه به ازای هر مقدارِ λ برقرار است. از جمله به ازای مقداری از λ که طرف چپ را کمینه می کند. هرگاه این مقدار کمینه یعنی $\lambda = -2\frac{\langle\alpha|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$ را درسمت چپ قرار دهیم به رابطه عدم قطعیت می رسیم.

۵ معادله شرودینگر در پایه های مختصات و تکانه

بنابراصل موضوع چهارم دیدیم که دینامیک حالت های کوانتومی به صورت زیر داده می شود:

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle. \tag{48}$$

که درآن $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$ هامیلتونی نامیده می شود. دراین بخش می خواهیم این معادله را درپایه مختصات وتکانه تصویرکنیم:

باتصویرکردن این رابطه درپایه مختصات بدست می آوریم:

$$\langle x|\left[\frac{P^2}{2m} + V(X)\right]|\psi(t)\rangle = i\hbar\langle x|\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t). \tag{49}$$

ویا

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial_x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t). \tag{50}$$

این معادله دیفرانسیل، معادله شرودینگرنامیده می شود و درواقع چیزی نیست جزتصویر معادله $H|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$ درپایه مختصات. می توان همین معادله را درپایه تکانه نیز تصویرکرد که دراین صورت به شکل زیرمی آید.

$$\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t) + V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})\tilde{\psi}(p,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t). \tag{51}$$

ازآنجا که برای پتانسیل های پیچیده کارکردن با عملگر $V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})$ بسیاردشواراست همیشه معادله دینامیک را درپایه مختصات تصویرمی کنیم .

۶ کوانتش بیش ازیک ذره

تاکنون خود رابه کوانتش یک ذره مقید کردیم. دراین بخش می خواهیم کوانتش سیستمی بابیش ازیک ذره را بررسی کنیم. برای سادگی خود رامقید می کنیم به یک سیستم دوذره ای که دریک بعد حرکت می کنند. تمامی مفاهیم دراین سیستم نیز قابل بیان هستند و تعمیم به بیش از دوذره کاملاً سرراست است . درمکانیک کلاسیک حالت این سیستم با چهارمختصه $x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2$ و باکروشه های پوآسون زیرمشخص می شود:

$$\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{52}$$

درمکانیک کوانتومی این مشاهده پذیرها با عملگرهای هرمیتی $X_1,\ X_2,\ P_1,\ P_2$ و روابط تعویضگری زیر نمایش داده می شوند:

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0, \qquad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{53}$$

نخستین کاری که باید انجام دهیم آن است که فضای هیلبرتی بسازیم که این روابط درآن نمایش داده شوند. فضای هیلبرت یک ذره راقبلاً ساخته ایم و دیده ایم که چگونه دراین فضا عملگرهای X و P عمل می کنند به نحوی که رابطهٔ $[X,P]=i\hbar\ I$ برقرارمی شود. ازاین موضوع و خواصی که برای ضرب تانسوری فضاهای برداری می شناسیم کمک می گیریم و فضای هیلبرتی می سازیم که روابط 53 درآن برقرارشوند. اگر فضای هیلبرت یک ذره را با $\mathcal{V}$ نمایش دهیم فضای هیلبرت دوذره را $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ می گیریم وقرارمی دهیم

$$X_1 := X\otimes I, \qquad X_2 := I\otimes X, \qquad P_1 := P\otimes I, \qquad P_2 := I\otimes P. \tag{54}$$

بنابراین عملگر X_1 روی فضای اول مثل X وروی فضای دوم مثل عملگرواحد عمل می کند باتوصیف مشابهی برای بقیه عملگرها. بنابه خواص ضرب تانسوری عملگرها بدیهی است که بااین تعریف روابط تعویضگری 53 برقرارمی شوند.
تمامی روابطی که احتیاج داریم بدون نیازبه اثبات مستقل از خواصی که برای فضای ضرب تانسوری می شناسیم حاصل می شوند.

برای $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ می توانیم پایه‌ای انتخاب کنیم که درآن مکان هردو ذره معلوم است مثل پایهٔ

$$\{|x_1,x_2\rangle := |x_1\rangle\otimes|x_2\rangle\}, \qquad X_1|x_1,x_2\rangle = x_1|x_1,x_2\rangle, \qquad X_2|x_1,x_2\rangle = x_2|x_1,x_2\rangle, \tag{55}$$

ویاپایه‌ای که درآن تکانه هردوذره معلوم است مثل پایهٔ

$$\{|p_1,p_2\rangle := |p_1\rangle\otimes|p_2\rangle\}, \qquad P_1|p_1,p_2\rangle = p_1|p_1,p_2\rangle, \qquad P_2|p_1,p_2\rangle = p_2|p_1,p_2\rangle. \tag{56}$$

هرکدام ازاین پایه های متعامد وکامل هستند. برای پایه مختصاتی داریم

$$\langle x_1,x_2|x'_1,x'_2\rangle = \langle x_1|x'_1\rangle\langle x_2|x'_2\rangle = \delta(x_1-x'_1)\delta(x_2-x'_2), \tag{57}$$

و

$$\begin{aligned} &\int dx_1dx_2|x_1,x_2\rangle\langle x_1,x_2| = \int dx_1dx_2(|x_1\rangle\otimes|x_2\rangle)(\langle x_1\rangle\otimes\langle x_2|) \\ =\ &\int dx_1|x_1\rangle\langle x_1|\otimes\int dx_2|x_2\rangle\langle x_2 = I\otimes I = I. \end{aligned} \tag{58}$$

عین روابط برای پایه تکانه نیزبرقراراست:

$$\langle p_1,p_2|p_1',p_2'\rangle = \langle p_1|p_1'\rangle\langle p_2|p_2'\rangle = \delta(p_1-p_1')\delta(p_2-p_2'), \tag{59}$$

و

$$\int dp_1dp_2|p_1,p_2\rangle\langle p_1,p_2| = I. \tag{60}$$

هرگاه $|\psi\rangle$ حالت سیستم دوذره ای داده شود توابع موج آن آن درفضای مختصات وتکانه عبارت خواهند بوداز

$$\psi(x_1,x_2) = \langle x_1,x_2|\psi\rangle \qquad \tilde{\psi}(p_1,p_2) = \langle p_1,p_2|\psi\rangle. \tag{61}$$

بالاخره هرگاه دوذره بایکدیگربرهم کنش نداشته باشند هامیلتونی آنهابه شکل زیرخواهد بود:

$$H = H_1(X_1,P_1) + H_2(X_2,P_2) = H_1(X,P)\otimes I + I\otimes H_2(X,P). \tag{62}$$

تحت این شرایط ویژه توابع H بااستفاده از ویژه توابعِ H_1 و H_2 بدست می آیند. فرض کنید

$$H_1|\phi_n\rangle = E_n^{(1)}|\phi_n\rangle, \qquad H_2|\chi_m\rangle = E_m^{(2)}|\chi_m\rangle. \tag{63}$$

دراین صورت به ازای هردوویژه حالت ازنوع فوق یک ویژه حالت $|\Psi_{n,m}\rangle := |\phi_n\rangle\otimes|\chi_m\rangle$ خواهیم داشت که انرژی آن برابراست با $E_{n,m} := E_n^{(1)} + E_m^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & H|\Psi_{n,m}\rangle = (H_1\otimes I + I\otimes H_2)(|\phi_n\rangle\otimes|\chi_m\rangle) \\ = \quad & (H_1|\phi_n\rangle)\otimes|\chi_m\rangle + |\phi_n\rangle)\otimes H_2|\chi_m\rangle \\ = \quad & E^{(1)}|\phi_n\rangle\otimes|\chi_m\rangle + E_m^{(2)}|\phi_n\rangle\otimes|\chi_m\rangle = E_{n,m}|\Psi_{n,m}\rangle. \end{aligned} \tag{64}$$

۷ کوانتش ذره ای که درسه بعد حرکت می کند.

تاکنون برای سادگی به مطالعه ذره ای پرداختیم که دریک بعد حرکت می کند. روابط کوانتش بسادگی برای ذره ای که درسه بعد حرکت می کند با توجه به آنچه که در بخش پیشین آموختیم بدست می آیند. درمکانیک کلاسیک حالت این ذره با

مختصات $x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$ و تکانه های $p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z$ مشخص می شود. بین این مختصات و تکانه ها روابط کروشه پواسون زیر برقرارند.

$$\{x_i, x_j\} = 0 \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{65}$$

درمکانیک کوانتومی روابط کروشه پواسون فوق به تعویضگرهای زیرتبدیل می شوند.

$$[X_i, X_j] = 0, \qquad [P_i, P_j] = 0, \qquad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{66}$$

فضای هیلبرت یک ذره را با V نشان می دهیم که عملگرهای X و P نمایش داده می شوند. در آغاز این درس این فضا را نسبتاً به تفصیل مطالعه کردیم. با توجه به آنچه که در بخش گذشته دیدیم می توانیم فضای هیلبرتی را بسازیم که این عملگرها را در آن نمایش دهیم. فضای هیلبرت را برای ذره‌ای که در سه بعد حرکت می کند به صورت $\mathcal{V} = \mathcal{V}\otimes\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$ در نظر می گیریم و نمایش عملگرها را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} X_1 &:= X\otimes I\otimes I, \qquad X_2 = I\otimes X\otimes I, \qquad X_3 = I\otimes I\otimes X, \\ P_1 &:= P\otimes I\otimes I, \qquad P_2 = I\otimes P\otimes I, \qquad P_3 = I\otimes I\otimes P. \end{aligned} \tag{67}$$

براحتی معلوم می شود که این عملگرها در روابط جابجایی 66 صدق می کنند. ازآنجا که همه عملگرهای X_i باهم جابجامی شوند می توان ویژه بردارهای مشترک همه آنها را تعیین کرد. این ویژه بردارها را براحتی می توان از ضرب تانسوری ویژه بردارهای عملگر X که در بخش اول این درس بدست آوردیم بسازیم. قرار می دهیم

این ویژه بردارها را با $|\vec{x}\rangle$ نشان می دهیم:

$$|\vec{x}\rangle := |x_1\rangle\otimes|x_2\rangle\otimes|x_3\rangle, \tag{68}$$

از تعریف این بردارها و هم چنین عملگرهای X_i در 67 معلوم می شود که

$$X_i|\vec{x}\rangle = x_i|\vec{x}\rangle. \tag{69}$$

هم چنین معلوم می شود که روابط تعامد این بردارها به صورتِ

$$\langle\vec{x}|\vec{x'}\rangle = \langle x_1|x'_1\rangle\langle x_2|x'_2\rangle\langle x_3|x'_3\rangle = \delta(x_1 - x'_1)\delta(x_2 - x'_2)\delta(x_3 - x'_3) =: \delta^3(\vec{x} - \vec{x'}), \tag{70}$$

و روابط تعامد آنها به فرم زیراست:

$$\int d\vec{x}|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| = I, \qquad d\vec{x} := d^3x = dxdydz. \tag{71}$$

به همین سیاق می توانیم ویژه بردارهای مشترک تکانه هارا تعیین کنیم:

$$P_i|\vec{p}\rangle = p_i|\vec{p}\rangle, \tag{72}$$

باروابط تعامدِ

$$\langle\vec{p}|\vec{p'}\rangle = \delta^3(\vec{p}-\vec{p'}), \tag{73}$$

ورابطه کامل بودنِ

$$\int d\vec{p}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = I. \tag{74}$$

هم چنین داریم

$$\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}}. \tag{75}$$

عملگرِ $\frac{-i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}$ نقش انتقال دهنده به اندازه بردار $\vec{a}$ را به عهده دارد.

$$e^{\frac{-i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}}|\vec{x}\rangle = |\vec{x}+\vec{a}\rangle. \tag{76}$$

ازاین رابطه می توان نتیجه گرفت

$$\langle\vec{x}|e^{\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}}|\psi\rangle = \langle\vec{x}+\vec{a}|\psi\rangle. \tag{77}$$

۸ ذره آزاد در یک بعد

در بخش های گذشته تنها به توضیح سینماتیک یک ذره که دارای متغیرهای دینامیکی مکان و تکانه است پرداختیم. این کار یعنی مشخص کردن فضای هیلبرت ذره و عملگرهایی که درآن فضای هیلبرت مشاهده پذیرهای مربوط به این ذره را نشان می دهند. دراین بخش می خواهیم دینامیک یک ذره‌ی آزاد را نگاه کنیم. در فصل آینده به مطالعه یک ذره در پتانسیل های

مختلف خواهیم پرداخت. نخست ذره‌ی آزاد را در یک بعد در نظر می گیریم . تعمیم آن به سه بعد کاملاً سرراست است.

برای ذره آزاد هامیلتونی عبارت است از:

$$H = \frac{P^2}{2m} \tag{78}$$

بنابراین هر ویژه حالت تکانه یک ویژه حالت هامیلتونی نیز هست:

$$H|p\rangle = E_p|p\rangle. \tag{79}$$

که درآن $E_p = \frac{p^2}{2m}$. واضح است که طیف انرژی دراین جا پیوسته است و هرمقدارانرژی مثل $E = \frac{p^2}{2m}$ واگنی دوگانه دارد زیرا هم حالت $|p\rangle$ و هم حالت $|-p\rangle$ هردو یک انرژی دارند.
فرض کنید که حالت اولیه یکی ازاین ویژه حالت های انرژی باشد، یعنی داشته باشیم

$$|\psi(0)\rangle = |p\rangle. \tag{80}$$

دراین صورت بردارحالت درزمان t برابرخواهد بود با:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_pt}|p\rangle. \tag{81}$$

درلحظه صفر تابع موج درفضای مختصات عبارت است از:

$$\psi(x,0) := \langle x|\psi(0)\rangle = \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}. \tag{82}$$

درلحظه t تابع موج برابر خواهد بود با

$$\psi(x,t) := \langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}E_pt}|p\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_pt}\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(px-E_pt)}. \tag{83}$$

این تابع موج نشان دهنده یک موج تخت است که فرکانس و طول موج آن به ترتیب برابرند با:

$$\omega = \frac{E_p}{\hbar}, \qquad \lambda = \frac{p}{\hbar}. \tag{84}$$

بنابراین فرض های اولیه انشتین و دوبروی ازاصول موضوع مکانیک کوانتومی استخراج می شوند.
این تابع موج ازمنهای بی نهایت تا بعلاوه بی نهایت درفضا گسترده است. چنین تابع موجی بهنجارنیست و برای آن احتمال یافتن ذره درتمام نقاط فضا یکسان است. دلیل این گستردگی تابع موج و نابهنجاری همان ایده آل بودن وغیر واقعی بودن حالت $|p\rangle$ است. حالت های فیزیکی حالت هایی هستند که ازترکیب خطی این حالت ها بدست می آیند. یک حالت واقعی از یک ذره آزاد عبارت است از:

$$|\psi\rangle = \int dp\tilde{\psi}(p)|p\rangle. \tag{85}$$

بهنجاربودن این حالت به این معناست که شرط زیربرآورده می شود:

$$\int dp|\psi(p)|^2 = 1. \tag{86}$$

برای چنین ذره‌ای تابع موج درفضای مختصات عبارت است از:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dp\psi(p)\langle x|p\rangle = \int dp\psi(p)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}xp}. \tag{87}$$

براحتی می توان نشان داد که با توجه به شرط بهنجارش درفضای تکانه یعنی رابطه 86، تابع موج درفضای مختصات نیز بهنجاراست یعنی انتگرال مجذور آن درتمام فضا برابر با یک است. درنتیجه چنین تابع موجی تنهادرناحیه محدودی از فضا مقدار غیر صفر دارد و به همین دلیل این تابع موج یا حالت را یک بسته موج [1] می گوییم، زیرا از ترکیب خطی امواج تخت با طول موج های متفاوت بدست آمده است و درعین حال درهمه فضا گسترده نیست.

هرگاه درلحظه صفر ذره درچنین حالتی باشد، پس از گذشت زمان t، حالت ذره عبارت خواهد بود از:

$$|\psi(t)\rangle = \int dp\psi(p)e^{-\frac{i}{\hbar}E_pt}|p\rangle. \tag{88}$$

درنتیجه تابع موج درپایه مختصات عبارت خواهد بوداز:

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \int dp\psi(p)e^{-\frac{i}{\hbar}E_pt}\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\psi(p)e^{\frac{i}{\hbar}(px-E_pt)}. \tag{89}$$

هرگاه که تابع موج اولیه درفضای تکانه یعنی $\psi(p)$ معلوم باشد، تابع موج درفضای مختصات درلحظه t بامحاسبه این انتگرال یافته خواهد شد.
به عنوان مثال فرض کنید که در لحظه‌ی صفر ذره در حالتی باشد که تابع موج آن در پایه تکانه به شکل زیر باشد:

$$\tilde{\psi}(p,0) = Ae^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{90}$$

[1] Wave Packet

دراین جا A یک ضریب بهنجارش است. این تابع موج بیان می کند که درلحظه‌ی صفر تکانه‌ی متوسط ذره برابر است با p_0 اما تکانه آن دقیقاً p_0 نیست بلکه پهنایی به اندازه‌ی σ دارد. هرگاه تابع موج در پایه مختصات را بخواهیم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\langle x|\psi(0)\rangle = \int dp\langle x|p\rangle\langle p|\psi(0)\rangle = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ixp}{\hbar}} \tilde{\psi}(p,0) \tag{91}$$

با جایگذاری 90 در 91 بدست می آوریم:

$$\psi(x,0) = A\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} e^{\frac{-(p-p_0)^2}{2\sigma^2}} dp. \tag{92}$$

برای محاسبه‌ی این انتگرال ، انتگرال ده را بر حسبِ متغیر $q := p - p_0$ بازنویسی می کنیم تا به شکل زیر درآید:

$$\psi(x,0) = Ae^{\frac{ip_0x}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq e^{\frac{iqx}{\hbar} - \frac{q^2}{2\sigma^2}}. \tag{93}$$

حال با یک انتگرال گاووسی مواجهیم که جواب آن ساده است و بنابراین تابع موج $\psi(x,0)$ برابر است با:

$$\psi(x,0) = Be^{\frac{ip_0x}{\hbar}} e^{-fracx^2\hbar^2/\sigma^2}, \tag{94}$$

که درآن B یک ضریب بهنجارش است . این تابع موج بازهم گاووسی است ولی این بار گستردگی آن در مختصات پهنای

$$\sigma_x(0) = \frac{\hbar}{\sigma} \tag{95}$$

را دارد که در واقع بیانگر اصل عدم قطعیت است. هم چنین فاکتورِ $e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}$ نشان دهنده‌ی یک موج است که می خواهد با تکانه p_0 یا عدد موجی $p_0/\hbar$ به سمت راست منتشر شود. البته همانطور که خواهیم دید از آنجا که این موج تخت تنها متوسط تکانه‌اش p_0 است و تکانه‌های دیگر هم در ترکیب خطی آن دخالت دارند، به تدریج پخش خواهد شد و پهنای آن افزایش خواهد یافت. این پاشندگی ناشی از این است که رابطه انرژی و تکانه به صورت $E = \frac{p^2}{2m}$ است و در نتیجه رابطه بین فرکانس و عدد موجی خطی نیست بلکه به صورت زیر است :

$$\omega \equiv \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{96}$$

بنابراین سرعت فاز یک موج که دارای عدد موجی k است برابراست با

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} \tag{97}$$

که نشان می دهد امواج با طول موج های مختلف با سرعت فازهای گوناگون حرکت می کنند و باعث پخش شدن موج می شوند. اما همانطور که می دانیم سرعت گروه این بسته های موج از رابطه‌ی زیر بدست می آید:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \tag{98}$$

ذرهٔ آزادی درنظرمی گیریم که درلحظه t دقیقاً درنقطه x قرار دارد. می پرسیم درزمان t' ، دامنه احتمال یافتن این ذره درنقطهٔ x' چقدراست؟ برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که حالت ذره درلحظه t برابراست با $|x\rangle$. بعدازگذشت $t'-t$ ثانیه حالت آن برابراست با $|\psi\rangle = U(t'-t)|x\rangle$ که درآن $U(t'-t) = e^{-i\frac{H(t'-t)}{\hbar}}$ عملگرتحول و $H = \frac{P^2}{2m}$ هامیلتونی ذره آزاد است. حال اگر دراین لحظه مکان ذره را اندازه بگیریم دامنه احتمال اینکه آن را درنقطه x' پیدا کنیم برابرخواهد بود با $\langle x'|\psi\rangle$. بنابراین دامنه احتمال برابراست با:

$$\langle x'|U(t'-t)|x\rangle = \langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|x\rangle = \langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{P^2}{2m}(t'-t)}|x\rangle. \tag{99}$$

این کمیت را انتشارگر ذره آزاد می نامند و آن را با $K(x',t';x,t)$ نشان می دهند. برای محاسبه شکل صریح انتشار گر به ترتیب زیرعمل می کنیم:

$$\begin{aligned} K(x,t';x,t) &= \langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{P^2}{2m}(t'-t)}|x\rangle = \int dp\langle x'|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{P^2}{2m}(t'-t)}|p\rangle\langle p|x\rangle \\ &= \int dp e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t'-t)}\langle x'|p\rangle\langle p|x\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t'-t)+\frac{i}{\hbar}(x'-x)p}. \end{aligned} \tag{100}$$

انتگرال بدست آمده یک انتگرال گاووسی است که براحتی قابل محاسبه است . بامحاسبه این انتگرال مقدار انتشارگر به شکل زیرمحاسبه می شود:

$$K(x',t';x,t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t'-t)}}e^{\frac{-i}{2\hbar}\frac{m(x-x')^2}{(t'-t)}}. \tag{101}$$

۹ تمرین ها

تمرین: نشان دهید که برای هر تابع $f(X)$ که بسط تیلور داشته باشد، رابطه زیر صحیح است :

$$[P, f(X)] = i\frac{d}{dX}f(X). \tag{102}$$

——————————————————————————

تمرین: نشان دهید که برای هر تابع $f(P)$ که بسط تیلور داشته باشد، رابطه زیر صحیح است:

$$[f(P), X] = i\frac{d}{dP}f(P). \tag{103}$$

——————————————————————————

تمرین: هرگاه a یک عدد حقیقی باشد، درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$e^{-iaP}Xe^{iaP} = X + aI, \tag{104}$$

و از آنجا نشان دهید که برای هرتابع f داریم:

$$e^{-iaP}f(X)e^{iaP} = f(X + aI). \tag{105}$$

——————————————————————————

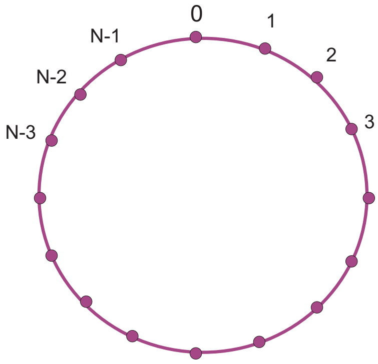
تمرین: می دانیم که حالت $|x\rangle$ که نشان دهنده جایگزیدگی ذره درست در یک نقطه‌ی x با دقت بی نهایت است، یک حالت فیزیکی نیست. حالت های زیر را در نظر بگیرید:

$$|x, \delta\rangle := \frac{1}{\delta}\int_{x-\frac{\delta}{2}}^{x+\frac{\delta}{2}} |y\rangle dy. \tag{106}$$

طرف راست روابط زیر را حساب کنید و آنها را معنا کنید:

$$\begin{aligned} &\langle x, \delta|x', \delta\rangle, \\ &e^{-iaP}|x, \delta\rangle \end{aligned} \tag{107}$$

——————————————————————————



شکل ۱: یک شبکه یک بعدی تناوبی. فاصله نقاط از هم برابر است با a. نقطه n ام دارای مختصه‌ی $x = na$ است.

تمرین: روی محیط یک دایره به شعاع R ، N نقطه با فاصله های مساوی a قرار گرفته اند. $Na = 2\pi R$. نقاط روی این شبکه با اعداد صحیحِ $0, 1, 2, N-3, N-2$ و $N-1$ مشخص می شوند و هر نقطه‌ی n دارای مختصه na است. (شکل ؟؟) وقتی که ذره در نقطه‌ی na است می گوییم ذره در حالت $|n\rangle$ است. بردارهای $|n\rangle$ را متعامد و یکه می گیریم .

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}. \tag{108}$$

این بردارها یک فضای هیلبرت N بعدی را جاروب می کنند:
از آنجا که شبکه تناوبی است حالتِ $|N+k\rangle$ با حالت $|k\rangle$ یکی است. دراین فضا عملگرهای X و S به ترتیب زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{N-1} |n+1\rangle\langle n|, \\ X &= \sum_{n=0}^{N-1} na|n+1\rangle\langle n|, \end{aligned} \tag{109}$$

الف: نشان دهید که عملگر S یکانی است و عملگر X هرمیتی است.

ب: نشان دهید که

$$SXS^{-1} = X + a \tag{110}$$

ج: ویژه مقدارها و ویژه بردارهای هر دو عملگرِ X و S را پیدا کنید.

د: شکل ماتریسی X و S را به صورت ماتریس های $N \times N$ بنویسید.

د: حال تعداد نقاط روی دایره یعنی N را به بی نهایت و فاصله بین آن ها یعنی a را به سوی صفر میل دهید به قسمی که Na ثابت باقی بماند. دراین صورت آیا می توانید با انجام درست حد گیری در بردارها و عملگرهای فوق ، عملگرهای X و P و ویژه بردار های آنها را بازتولید کنید؟ آیا از رابطه‌ی $SXS^{-1} = X + a$ می توانید رابطه‌ی $[X, P] = iI$ را نتیجه بگیرید؟

تمرین: اگر قرار دهیم $L_j = \epsilon_{jkl} X_k P_l$ یعنی

$$L_1 = X_2P_3 - X_3P_2, \qquad L_2 = X_3P_1 - X_1P_3, \qquad L_3 = X_1P_2 - X_2P_1, \tag{111}$$

طرف راست روابط جابجایی زیر را حساب کنید:

$$\begin{array}{lll} [L_j, L_k], & [L_j, X_k], & [L_j, P_k], \\ [L_j, X^2], & [L_j, P^2], & [L^2, L_k], \\ [L^2, X_k], & [L^2, P_k], & [L^2, X^2], \end{array} \tag{112}$$

که درآن منظور از X^2 ، P^2 و L^2 عمگرهای زیرهستند:

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, \qquad P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \qquad L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \tag{113}$$

تمرین: در لحظه‌ی صفر یک الکترون دقیقا در مبداء مختصات است. بعد از گذشت یک نانوثانیه با چه احتمالی می توان این ذره را در فاصله‌ی بیش از یک نانو متری از نقطه صفر مشاهده کرد؟ نخست فرض کنید که الکترون در یک فضای یک بعدی حرکت می کند و سپس مسئله را برای فضای سه بعدی حل کنید.