درس هفتم : نوسانگر هماهنگ

۱ مقدمه

نوسانگر هماهنگ یکی ازمهمترین مسائلی است که درمکانیک کلاسیک و هم چنین مکانیک کوانتومی به آن برمی خوریم. ذره ای به جرم m که دریک پتانسیل دلخواهی مثل $V(x)$ قرار دارد درنزدیکی نقطه تعادل یا مینیمم اش که آن را با x_0 نشان می دهیم پتانسیلی به شکل زیرمی بیند که از بسط $V(x)$ حول x_0 بدست آمده است

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2}V"(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots \quad (1)$$

باقراردادن $m\omega^2 := V"(x_0)$ و انتقال نقطه صفر پتانسیل به $V(x_0)$ و سنجش مختصه مکان نسبت به نقطه x_0 به پتانسیل $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ می رسیم که همان پتانسیل نوسانگر هماهنگ است. بنابراین مادام که انرژی ذره آنقدرکم است که ازنقطه تعادل خیلی دور نمی شود می توان گفت که ذره تنها پتانسیل نوسانگر هماهنگ را می بیند و به همین دلیل حول نقطه تعادل نوسان می کند.

این موضوع برای هر سیستم دلخواهی با هرتعداد درجه آزادی صادق است. به عنوان مثال اتم های یک مولکول دواتمی حول وضعیت تعادلشان نوسان می کنند، یون های یک شبکه جامد نیز درنزدیکی نقطه تعادلشان نوسان می کنند. یک ساختمان بزرگ نیز همین کار را می کند ولی برای این سیستم فیزیکی برخلاف دو سیستم قبلی نیازی به کاربرد مکانیک کوانتومی نیست.

دراین بخش هدف ما آن است که به تفصیل نوسانگر هماهنگ را مطالعه کنیم. علاوه برحل دقیق نوسانگر هماهنگ و مطالعه جنبه های مختلف آن به کاربردهای مختلف آن خواهیم پرداخت و خواهیم دید که دامنه این کاربردها شامل حوزه وسیعی از پدیده ها از ساختمان مولکول ها و کریستال ها گرفته تا الکترودینامیک و اپتیک کوانتومی است.

جمع آوری بعضی از داده های واقعی راجع به نوسانگرهای میکروسکوپی

۲ روش جبری برای مطالعه نوسانگر هماهنگ

هامیلتونی یک نوسانگرهماهنگ به جرم m و فرکانس طبیعی ω دریک بعد به شکل زیراست

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2. \quad (2)$$

نوع کمیت	ضریب
طول	$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
جرم	m
زمان	ω^{-1}
انرژی	$\hbar\omega$
تکانه	$\hbar$

جدول ۱: ضرایب تبدیل کمیت ها

هدف مادراین بخش آن است که طیف انرژی این هامیلتونی را بدست بیاوریم. نخستین کاری که انجام می دهیم آن است که واحدهای جرم و زمان و هم چنین تکانه زاویه ای را آنچنان انتخاب می کنیم که دراین واحد ها m برابر با 1 و ω و $\hbar$ نیز برابر با 1 شوند. دراین صورت هامیلتونی فوق به شکل زیردرمی آید:

$$H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}X^2 \tag{3}$$

می دانیم که $\frac{1}{\omega}$ دیمانسیون زمان، m دیمانسیون جرم و هم چنین $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ دیمانسیون طول دارد. بنابراین هرگاه درواحد های جدیدی که انتخاب کرده ایم مقدار عددی کمیتی را بدست بیاوریم می توانیم با ضرب کردن یک ضریب مناسب مطابق جدول ۲ مقدار آن کمیت را در واحد های استاندارد بدست آوریم.

حال می توانیم دو عملگر به شکل زیر تعریف کنیم.

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP) \\ a^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP). \end{aligned} \tag{4}$$

برحسب این دو عملگر می توان هامیلتونی نوسانگر را به شکل زیر نوشت:

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2}. \tag{5}$$

عملگر $N := a^\dagger a$ یک عملگر هرمیتی و مثبت است. اگر طیف این عملگر را پیدا کنیم طیف H نیز پیدا خواهد شد. برای این کار بهتر است که خواص این عملگر و هم چنین عملگرهای a و $a^\dagger$ را بدست آوریم: با یک محاسبه ساده روابط زیر را بدست می آوریم:

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad [N, a] = -a \qquad [N, a^\dagger] = a^\dagger. \tag{6}$$

نخست توجه می کنیم که عملگر $N = a^\dagger a$ یک عملگرمثبت است. بنابراین تمام ویژه مقدارهای آن می بایست مثبت باشند. ضمناً براحتی می توان نشان داد که اگر

$$N|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \tag{7}$$

آنگاه

$$N(a|\psi\rangle) = (\lambda - 1)(a|\psi\rangle), \qquad N(a^\dagger|\psi\rangle) = (\lambda + 1)(a^\dagger|\psi\rangle). \tag{8}$$

بنابراین عملگر a دائماً ویژه مقدارهارا پایین می آورد. درنتیجه می بایست یک ویژه بردار پایینی وجود داشته باشد که اثر a آن را به صفرببرد. این ویژه بردار را با $|\psi_0\rangle$ نشان می دهیم

$$a|\psi_0\rangle = 0 \longrightarrow N|\psi\rangle = 0. \tag{9}$$

بقیه ویژه بردارها بااثر $a^\dagger$ روی این حالت ساخته می شوند:

$$|\psi_n\rangle := (a^\dagger)^n|\psi_0\rangle, n = 1,\ 2,\ \cdots. \tag{10}$$

بااستفاده از رابطه 8 معلوم می شود که ویژه مقدار حالتِ $|\psi_n\rangle$ برابر با n است، یعنی

$$N|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle. \tag{11}$$

باتوجه به رابطه 8 واضح است که

$$a^\dagger|\psi_n\rangle = |\psi_{n+1}\rangle. \tag{12}$$

حال می پرسیم که اثر عملگر a روی $|\psi_n\rangle$ چیست؟ انتظار داریم که حالتی که بوجود می آید متناسب با $|\psi_{n-1}\rangle$ باشد. برای آنکه ضریب تناسب را بدست آوریم از رابطه زیر استفاده می کنیم که خواننده می تواند براحتی درستی آن را نشان دهد:

$$[a, {a^\dagger}^n] = n{a^\dagger}^{n-1}. \tag{13}$$

بااستفاده از این رابطه می توان نشان داد که:

$$a|\psi_n\rangle = a{a^\dagger}^n|\psi_0\rangle = ({a^\dagger}^n a + n{a^\dagger}^{n-1})|\psi_0\rangle = n|\psi_{n-1}\rangle. \tag{14}$$

حال می توانیم اندازه هرکدام از بردارهای $|\psi_n\rangle$ را حساب کنیم:

$$\begin{aligned}\langle\psi_n|\psi_n\rangle &= \langle\psi_0|a^n{a^\dagger}^n|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|a^{n-1}(a{a^\dagger}^n)|\psi_0\rangle \\ &\langle\psi_0|a^{n-1}({a^\dagger}^n a + n{a^\dagger}^{n-1})|\psi_0\rangle = n\langle\psi_{n-1}|\psi_{n-1}\rangle.\end{aligned} \tag{15}$$

درنتیجه $\langle\psi_n|\psi_n\rangle = n!$.
بنابراین اگر بردارهای حالت بهنجار شدهٔ $|\psi_n\rangle$ را بانماد $|n\rangle$ نشان دهیم آنچه را که بدست آورده ایم می توانیم به شکل زیربازنویسی کنیم

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{16}$$

و

$$\hat{H}|n\rangle = (n+\frac{1}{2})|n\rangle \longrightarrow H|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle. \tag{17}$$

تساوی دوم دردستگاه واحد های استاندارد نوشته شده است.
ازرابطه 16 می توانیم عناصر ماتریسی عملگرهای a و $a^\dagger$ را بدست آوریم:

$$\langle n|a|m\rangle = \sqrt{m}\langle n|m-1\rangle = \sqrt{m}\delta_{n,m-1}, \qquad \langle n|a^\dagger|m\rangle = \sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle = \sqrt{m+1}\delta_{n,m+1}. \tag{18}$$

شکل صریح ماتریس های بی نهایت بعدی a و $a^\dagger$ به صورت زیراست:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & & & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & & & & \\ & & & 0 & \sqrt{4} & & & \\ & & & & 0 & \cdot & & \\ & & & & & 0 & \cdot & \\ & & & & & & 0 & \cdot \\ & & & & & & & \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$
a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & & & & \\ & & \sqrt{3} & 0 & & & \\ & & & \sqrt{4} & 0 & & \\ & & & & \cdot & 0 & \\ & & & & & \cdot & 0 \\ & & & & & & \end{pmatrix} \tag{20}
$$

۱.۲ عناصر ماتریسی مختصات و تکانه

می توانیم عناصرماتریسی X و P و درنتیجه هر مشاهده پذیردیگری را درپایه انرژی بدست آوریم. برای این کار توجه می کنیم که ازتعریف عملگرهای a و $a^\dagger$ داریم

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \\
P &= \frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger).
\end{aligned} \tag{21}
$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
\langle n|X|n\rangle &= \langle n|\frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)|n\rangle = 0 \\
\langle n|P|n\rangle &= \langle n|\frac{1}{\sqrt{2}i}(a - a^\dagger)|n\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

هم چنین

$$
\begin{aligned}
\langle n|X^2|n\rangle &= \langle n|\frac{1}{2}(a + a^\dagger)^2|n\rangle = n + \frac{1}{2} \\
\langle n|P^2|n\rangle &= \langle n|\frac{-1}{2}(a - a^\dagger)^2|n\rangle = n + \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

دردستگاه واحدهای استاندارد خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
\langle n|X^2|n\rangle &= \frac{\hbar}{m\omega}(n + \frac{1}{2}) \\
\langle n|P^2|n\rangle &= \hbar m\omega(n + \frac{1}{2}).
\end{aligned} \tag{24}
$$

اگر انرژی جنبشی را با T و انرژی پتانسیل را با V نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\langle n|T|n\rangle &= \frac{1}{2m}\langle n|P^2|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(n+\frac{1}{2})\\ \langle n|V|n\rangle &= \frac{1}{2}m\omega^2\langle n|X^2|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(n+\frac{1}{2}).\end{aligned} \tag{25}$$

بنابراین متوسط انرژی جنبشی و متوسط انرژی پتانسیل بایکدیگر مساوی هستند.

این رابطه هم چنین نشان می دهد که میزان عدم قطعیت مکان و تکانه درهر ویژه حالت انرژی برابراست با:

$$\Delta X\Delta P = \hbar(n+\frac{1}{2}). \tag{26}$$

بنابراین میزان عدم قطعیت درحالت پایه به کمترین مقدار خود یعنی $\frac{1}{2}\hbar$ می رسد. می توانیم ماتریس های مربوط به عملگرهای X و P را به طور کامل درپایه انرژی بنویسیم. بنابراین

$$\begin{aligned}\langle n|X|m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle n|a+a^\dagger|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(m\delta_{n,m-1}+(m+1)\delta_{n,m+1})\\ \langle n|P|m\rangle &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\langle n|a-a^\dagger|m\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}}(m\delta_{n,m-1}-(m+1)\delta_{n,m+1}).\end{aligned} \tag{27}$$

۲.۲ شکل ویژه حالت های انرژی در فضای مختصات

دراین زیربخش می خواهیم شکل ویژه توابع انرژی را درپایه مختصات پیداکنیم. قرارمی دهیم

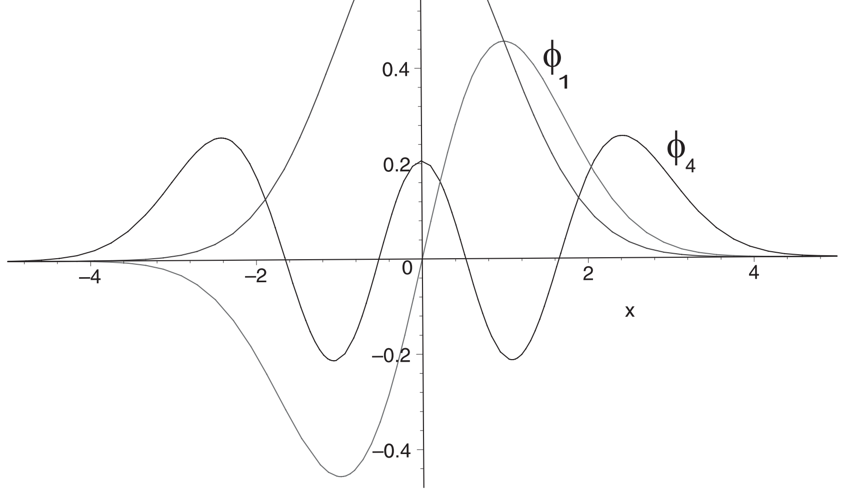
$$\psi_n(x) := \langle x|n\rangle. \tag{28}$$

از این که $a|0\rangle = 0$ و $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+iP)$ نتیجه می گیریم که

$$\langle x|X+iP|0\rangle = 0 \tag{29}$$

و یا

$$(x+\frac{d}{dx})\psi_0(x) = 0 \tag{30}$$



شکل ۱: ویژه حالت های ϕ_0 ϕ_1 و ϕ_4 برای نوسانگر هارمونیک.

حل این معادله کاملاً آسان است. براحتی معلوم می شود که

$$\phi_0(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{31}$$

که درآن A یک ثابت بهنجارش است. این ثابت بهنجارش از تقاضای $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(x)^2dx = 1$ بدست می آید و مقدار آن برابر است با $A = \pi^{-\frac{1}{4}}$.

حال بقیه توابع موج را نیز می توانیم بدست آوریم. می دانیم که $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}{a^{\dagger}}^n|0\rangle$ و $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP)$ بنابراین خواهیم داشت

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})]^n\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{\pi}}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}(x - \frac{d}{dx})^n e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{32}$$

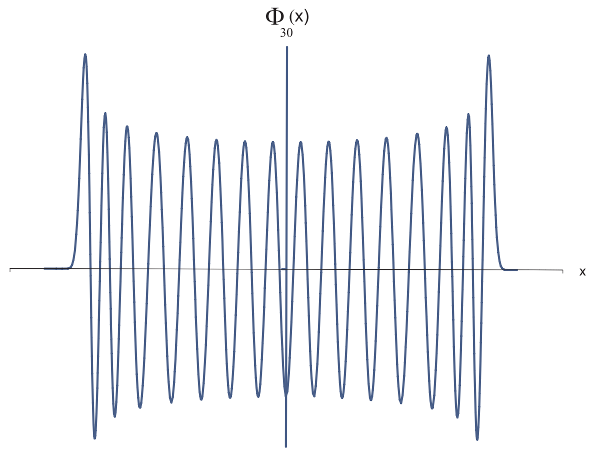
شکل توابع موج چند حالت برانگیخته اول عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}xe^{-\frac{x^2}{2}} \\
\phi_2(x) &= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{2x^2-1}{\sqrt{6}}e^{-\frac{x^2}{2}} \\
\phi_3(x) &= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{6}x\sqrt{3}(2x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&\cdots .
\end{aligned} \tag{33}$$

درشکل ۱ چند تابع موج اولیه نوسانگرهارمونیک رسم شده اند. شکل های ۲ و ۳ نیز به ترتیب یک تابع موج با عدد کوانتومی بالا و مربع آن را که چگالی احتمال است نشان می دهند.

بااثردادن متوالیِ عملگر $(x - \frac{d}{dx})$ و جداکردن ضرایب ثابت می بینیم که شکل کلی این توابع به صورت زیراست:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{34}$$



شکل ۲: ویژه حالت ϕ_{30} برای نوسانگر هارمونیک.

که درآن $H_n(x)$ یک چند جمله ای درجه n از x است. این چند جمله ای به چند جمله ای های هرمیت معروف هستند و خواص بسیارجالبی دارند. درزیر این خواص را مطالعه می کنیم. اماقبل ازآن لازم است شکل ویژه توابع انرژی را دردستگاه واحد های استاندارد بنویسیم. برای این منظور می بایست هرجا که متغیر x داریم آن رابریک پارامتر با بعد طول تقسیم کنیم یعنی جایگزینی $\xi x \longrightarrow x$ را که درآن $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$، انجام دهیم. هم چنین توجه می کنیم که تابع موج می بایست دارای بعد عکس جذر طول باشد بنابراین ϕ_n را می بایست در $\xi^{\frac{1}{2}}$ ضرب کنیم. درنتیجه شکل نهایی تابع موج عبارت خواهد بود از:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\xi^{\frac{1}{2}} H_n(\xi\ x)e^{-\frac{(\xi x)^2}{2}}. \tag{35}$$

باتوجه به روابط بالا می توانیم بینیم این چند جمله ای ها به صورت زیرتعریف می شوند:

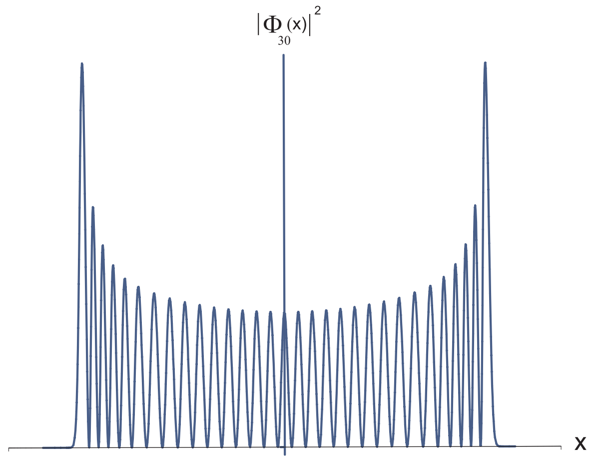
$$(x - \frac{d}{dx})^n e^{-\frac{x^2}{2}} = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{36}$$

و یا

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}}(x - \frac{d}{dx})^n e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{37}$$

بااعمال عملگر $(x - \frac{d}{dx})$ به طرفین رابطه 36 و کمی ساده کردن به رابطه زیرمی رسیم

$$H_{n+1} = 2xH_n(x) - H_n'(x) \tag{38}$$



شکل ۳: چگالی احتمال برای ویژه حالت ϕ_{30} برای نوسانگر هارمونیک.

ویا

$$H_{n+1} = (2x - \frac{d}{dx})H_n(x). \tag{39}$$

بنابراین باتوجه به این که $H_0(x) = 1$، چند جمله ای های هرمیت به صورت زیر بدست می آیند:

$$H_n(x) = (2x - \frac{d}{dx})^n\ 1. \tag{40}$$

با استفاده از این رابطه می توانیم بسرعت چند جمله ای های هرمیت را به صورت زیربدست آوریم:

$$\begin{aligned} &H_0 = 1, \\ &H_1 = 2x, \\ &H_2 = 4x^2 - 2 \\ &H_3 = 8x^3 - 12x, \\ &H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ &\cdots. \end{aligned} \tag{41}$$

ازآنجاکه حالت های $|n\rangle$ متعامدیکه هستند نتیجه می گیریم که

$$\langle m|n\rangle \equiv \int dx \langle m|x\rangle\langle x|n\rangle = \int dx \phi_n(x)\phi_m(x) \tag{42}$$

و باجایگذاری عبارت های 34 دراین رابطه

$$\int dx H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = \delta_{m,n}\sqrt{\pi}2^n n!. \tag{43}$$

می توانیم برای این چند جمله ای ها یک تابع مولد مثل $g(t,x)$ تعریف کنیم به قسمی که

$$g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \tag{44}$$

برای اینکه فرم تابع مولد را پیداکنیم از رابطه 37 استفاده می کنیم و می نویسیم

$$g(t,x) = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(x - \frac{d}{dx})^n e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} e^{t(x-\frac{d}{dx})} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{45}$$

اما ازاتحاد $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$ برای عملگرهایی که $[A,B]$ متناسب با واحد است استفاده می کنیم و می نویسیم

$$e^{t(x-\frac{d}{dx})} = e^{\frac{t^2}{2}} e^{tx} e^{-t\frac{d}{dx}}. \tag{46}$$

درنتیجه تابع مولد به شکل زیردرمی آید:

$$\begin{aligned} g(t,x) &= e^{\frac{x^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} e^{tx} e^{-t\frac{d}{dx}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} = e^{-t^2+tx}. \end{aligned} \tag{47}$$

بنابراین نشان داده ایم که

$$e^{-t^2+tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \tag{48}$$

ازاین رابطه خواص بیشتری از چندجمله ای های هرمیت را می توان نتیجه گرفت. بعضی از این خواص ممکن است بطور مستقیم در محاسبات مربوط به درس مکانیک کوانتومی کاربرد نداشته باشند ولی دانستن آنها خالی از فایده نیست. در ضمیمه این درس بعضی از این خواص را بررسی خواهیم کرد.

۳ نوسانگر هماهنگ درمیدان الکتریکی

ذره ای به جرم m و بار الکتریکی q که حول نقطه تعادلش با فرکانس ω نوسان می کند درنظرمی گیریم. این ذره را درمیدان الکتریکی E قرار می دهیم. هدف ما یافتن ویژه توابع انرژی و مقادیر انرژی است. هامیلتونی این ذره به شکل زیراست:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 - qEX. \tag{49}$$

این هامیلتونی را می توان به شکل زیرنوشت:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (X - \frac{qE}{m\omega^2})^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}, \tag{50}$$

که چیزی نیست جز هامیلتونی یک نوسانگر هارمونیک که نقطه تعادل آن به اندازه $\frac{qE}{m\omega^2}$ به سمت راست جابجا شده و و انرژی کل آن نیز به اندازه مقدارثابتی کم شده است. باتعریف پارامترهای ξ و E_0 به شکل زیر

$$\xi := \frac{qE}{m\omega^2}, \qquad E_0 := \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}, \tag{51}$$

هامیلتونی به این شکل درمی آید:

$$H = \frac{P2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (X - \xi)^2 - E_0. \tag{52}$$

عملگر زیر را درنظرمی گیریم:

$$T_\xi := e^{\frac{-i}{\hbar}\xi P}. \tag{53}$$

این عملگر دارای خاصیت های زیراست:

$$T_\xi|x\rangle = |x+\xi\rangle \quad , \quad T_\xi X T_\xi^{-1} = X - \xi. \tag{54}$$

بنابراین هرگاه هامیلتونی نوسانگردرغیاب میدان الکتریکی را با H_0 نشان دهیم، معلوم می شود که $H = T_\xi H_0 T_\xi^{-1} - E_0$. درنتیجه هرگاه طیف $T_\xi H_0 T_\xi^{-1}$ که به اختصار آن را با H_1 نشان می دهیم معلوم شود، طیفِ H تنهاباکم کردن مقدار E_0 ازانرژی های H_1 یافته خواهدشد. پیداکردن طیف H_1 آسان است. داریم

$$H_1 = T_\xi H_0 T_\xi^{-1}. \tag{55}$$

دراین صورت هرگاه $|n\rangle$ یک ویژه حالتِ H_0 باشد، یعنی هرگاه $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ ، آنگاه باتعریف

$$|\phi_n\rangle = T_\xi|n\rangle, \tag{56}$$

خواهیم داشت

$$H_1|\phi_n\rangle = T_\xi H_0 T_\xi^{-1}(T_\xi|n\rangle) = T_\xi H_0|n\rangle = E_n|\phi_n\rangle. \quad (57)$$

یعنی $|\phi_n\rangle$ نیزیک ویژه حالتِ H_1 باهمان انرژی خواهد بود. این تناظریک به یک است. باتوجه به اینکه $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$، نهایتاً خواهیم داشت:

$$H|\phi_n\rangle = [\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) - E_0]|\phi_n\rangle. \quad (58)$$

برای آنکه شکل تابع موجِ $|\phi_n\rangle$ را درفضای مختصات تعیین کنیم به رابطه زیرتوجه می کنیم:

$$\phi_n(x) = \langle x|\phi_n\rangle = \langle x|T_\xi|n\rangle = \langle x-\xi|n\rangle = \psi_n(x-\xi), \quad (59)$$

یعنی هرویژه تابع H چیزی نیست جزویژه تابع متناظر H_0 که به اندازه ξ به سمت راست جابجاشده است.

۴ حالت های همدوس

ازنظر ریاضی حالت همدوس یا *Coherent State* به حالتی گفته می شود که ویژه بردار عملگرپایین برندهٔ a باشد. ازآنجا که عملگرa هرمیتی نیست ویژه مقدارآن نیزالزاماً حقیقی نیست به همین جهت ویژه مقدار آن را با z یعنی یک عدد مختلط و ویژه بردارآن را با $|z\rangle$ نشان می دهیم و می نویسیم

$$a|z\rangle = z|z\rangle. \quad (60)$$

یک راه برای آنکه این ویژه برداررا پیداکنیم آن است که $|z\rangle$ را برحسب حالت های پایه بسط دهیم وبامقایسه ضرایب بسط دردوطرف رابطه بالا آنهارابدست آوریم. راه بهتر استفاده از اتحاد زیراست:

$$e^{-za^\dagger} a e^{za^\dagger} = a + z. \quad (61)$$

این اتحاد براحتی با استفاده از لم هاسدورف ثابت می شود. حال بردارِ $|z\rangle$ را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$|z\rangle := Ae^{za^\dagger}|0\rangle. \quad (62)$$

که درآن A یک ضریب بهنجارش است. روی دوطرف عملگر a رااثرداده واز رابطه 61 استفاده می کنیم. بدست می آوریم

$$a|z\rangle = Aae^{za^\dagger}|0\rangle = Ae^{za^\dagger}(a+z)|0\rangle = z|z\rangle. \tag{63}$$

بنابراین $|z\rangle$ یک حالت همدوس است. واضح است که $|z\rangle$ بسط زیر را برحسب حالت های پایه انرژی دارد.

$$|z\rangle := A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{64}$$

بااستفاده ازاین بسط می فهمیم که

$$1 = \langle z|z\rangle = A^2\sum_{n=0}^{\infty}|z|^{2n}\frac{1}{n!} = A^2 e^{|z|^2}. \tag{65}$$

بنابراین برای آنکه حالت همدوس بهنجارباشد A را برابر با $e^{-\frac{|z|^2}{2}}$ انتخاب می کنیم:

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}}e^{za^\dagger}|0\rangle. \tag{66}$$

نکته مهمی که باید به آن توجه کنیم آن است که حالت های همدوس بریکدیگر عمود نیستند. درواقع تکرارِ همان محاسبه ای که برای تعیین ثابت بهنجارش انجام دادیم نشان می دهد که

$$\langle z|w\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}}e^{-\frac{|w|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\overline{z}w)^n = e^{-\frac{|z|^2}{2}-\frac{|w|^2}{2}+\overline{z}w}. \tag{67}$$

حال ازخود می پرسیم که دراین حالت هامتوسط مکان و تکانه ذره چقدراست. براحتی معلوم می شود:

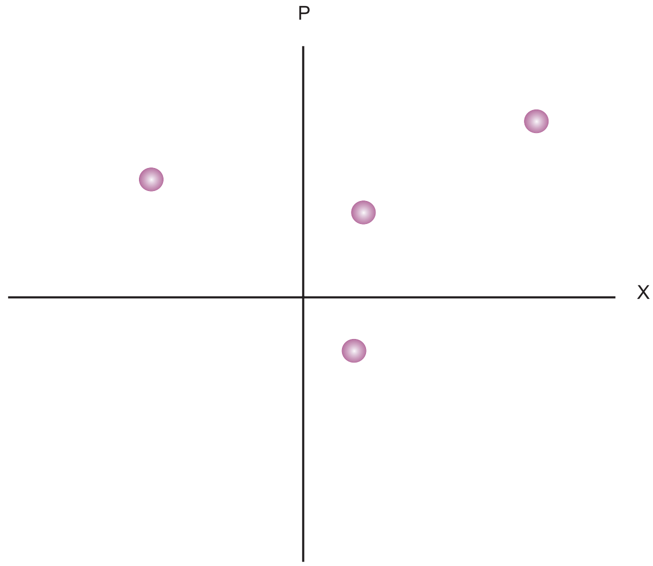
$$\langle z|X|z\rangle = \langle z|\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger)|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+\overline{z}), \langle z|P|z\rangle = \langle z|\frac{1}{i\sqrt{2}}(a+a^\dagger)|z\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z-\overline{z}). \tag{68}$$

بنابراین اگر z را به صورت زیربنویسیم

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+ip) \tag{69}$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\langle z|X|z\rangle = x, \qquad \langle z|P|z\rangle = p. \tag{70}$$



شکل ۴: چند حالت همدوس درصفحه مختلط.

بنابراین هرحالت $|z\rangle = |\frac{1}{\sqrt{2}}(x+ip)\rangle$ حالتی است که متوسط مکان و تکانه آن به ترتیب برابرند با x و p. حال میزان عدم یقین در مکان وتکانه را حساب می کنیم. داریم

$$\langle z|X^2|z\rangle = \frac{1}{2}\langle z|(a+a^\dagger)^2|z\rangle = \frac{1}{2}(z+\overline{z})^2 + \frac{1}{2} = \langle z|X|z\rangle^2 + \frac{1}{2}$$
$$\langle z|P^2|z\rangle = \frac{-1}{2}\langle z|(a-a^\dagger)^2|z\rangle = \frac{-1}{2}(z-\overline{z})^2 + \frac{1}{2} = \langle z|P|z\rangle^2 + \frac{1}{2}. \quad (71)$$

پس پیداکردیم که برای یک حالت همدوس همواره روابط زیربرقرارند:

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta P)^2 = \frac{1}{2}, \qquad \Delta X \Delta P = \frac{1}{2}. \quad (72)$$

بنابراین حالت های همدوس حالت هایی هستند که کمترین میزان عدم یقین را دارند ومستقل ازاینکه تکانه متوسط ویامکان متوسط آنها چقدراست همواره میزان عدم یقین آنها درکمترین مقدارخود یعنی $\frac{1}{2}$ یا درواحد های استاندارد برابر با $\frac{\hbar}{2}$ قراردارد. شکل ۴ به طور شماتیک چند حالت همدوس رانشان می دهد. فاصله هردایره ازمرکز مقدارمتوسط X و P آن حالت رانشان می دهد. شعاع تمام دایره ها یکسان است و نشان دهنده آن است که عدم یقین همه این حالت ها باهم برابراست مستقل ازاینکه مقدار متوسط مکان وتکانه آنها چقدراست.

حال سوال می کنیم تابع موج یک حالت همدوس $|z\rangle$ درفضای مختصات یا تکانه چیست. برای این کاربازهم به تعریف مراجعه می کنیم. مطابق تعریف داریم

$$\psi_z(x) := \langle x|z\rangle. \quad (73)$$

باتوجه به اینکه $a|z\rangle = z|z\rangle$ و این موضوع که $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+iP)$ و رابطه فوق می فهمیم که

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\partial_x)\psi_z(x) = z\psi_z(x). \tag{74}$$

این معادله دیفرانسیل بسادگی حل می شود. بدست می آوریم

$$\psi_z(x) = Ae^{\sqrt{2}zx - \frac{1}{2}x^2}, \tag{75}$$

که درآن A یک ثابت است. هرگاه z را به صورت $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + ip_0)$ بنویسیم این تابع موج شکل گویایی پیدامی کند:

$$\psi_z(x) = A'e^{ip_0x - \frac{1}{2}(x-x_0)^2}, \tag{76}$$

که نشان دهنده یک بسته موج گاووسی بامرکز x_0 و پهنای ۱ است که باتکانه p_0 درحال حرکت است.
هم چنین می توانیم شکل تابع موج را درفضای تکانه بدست بیاوریم (یا بااستفاده از تبدیل فوریه و یا دوباره بااستفاده ازتعریف). نتیجه به صورت زیراست:

$$\tilde{\psi}_z(p) = A'e^{-ix_0p - \frac{1}{2}(p-p_0)^2}, \tag{77}$$

که بازهم نشان دهنده یک تابع گاووسی به مرکز p_0 باپنهای ۱ است.

باگذشت زمان وتحت هامیلتونی نوسانگرهارمونیک، یک حالت همدوس چگونه تحول پیدامی کند؟ فرض کنید که درلحظه صفر ذره دریک حالت همدوس مثل $|z\rangle$ قرارگرفته باشد. دراین صورت بعداززمان t حالت ذره عبارت خواهد بوداز:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = e^{-iHt}|z\rangle. \tag{78}$$

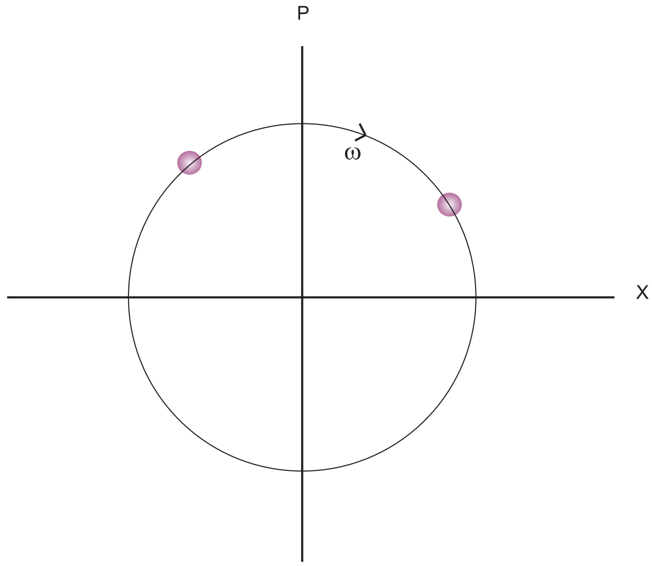
برای محاسبه طرف راست حالت همدوس را برحسب ویژه های هامیلتونی بسط می دهیم

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}e^{-i(\omega(n+\frac{1}{2}))t}|n\rangle \tag{79}$$

حال اگر به بسط یک حالت همدوس یعنی رابطه 64 دقت کنیم، درمی یابیم که طرف راست یک حال همدوس است:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i(\frac{\omega t}{2}}A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ze^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= e^{-i(\frac{\omega t}{2}}|ze^{-i\omega t}\rangle. \end{aligned} \tag{80}$$

بنابراین یک حالت همدوس درطول زمان حول مبدأ باسرعت زاویه ای ω می چرخد. خاصیت بسیارمهم این تحول آن است که میزان پاشندگی مکان وتکانه آن نیز تغییر نمی کند. این خاصیت کاملاً جالب توجه است زیرامعمولاً یک توابع موج چه



شکل ۵: تحول یک حالت همدوس تحت هامیلتونی نوسانگرهارمونیک.

درفضای تکانه، چه درفضای مختصات باگذشت زمان پهن می شوند. درمورد ذره آزاد وپهن شدگی تابع موج آن درفضای مختصات، خواننده این خاصیت را قبلاً درتمرین ها دیده است.

شکل ۵ تحول یک حالت همدوس را نشان می دهد.

۱.۴ رابطه کامل بودن حالت های همدوس

درپایان این بخش می بایست رابطه کامل بودن حالت های همدوس را مطالعه کنیم.
دیدیم که حالت های همدوس بریکدیگر عمود نبودند. آیا حالت های همدوس کامل هستند؟ آیا رابطه ای مثل رابطه $\int d^2z|z\rangle\langle z| = I$ برقرار است؟ برای تحقیق درستی این رابطه، عملگرطرف چپ را روی حالت پایه $\langle n|$ اثرمی دهیم. جزییات این محاسبه را به عهده تمرین ها می گذاریم. نتیجه آن است که رابطه کامل بودن به شکل زیربرقراراست:

$$\frac{1}{\pi}\int d^2z|z\rangle\langle z| = I. \tag{81}$$

حقیقت آن است که حالت های همدوس یک پایه فوق کامل تشکیل می دهند، به این معنا که می توان زیرمجموعه هایی ازآنها انتخاب کرد وهنوزهم بتوان هرحالت دلخواهی را برحسب آنهابسط داد.
دیدیم که برای یک حالت های همدوس، عدم یقین درمکان و درتکانه به طور متقارن درکمینه خود قرارگرفته است به طوریکه رابطه $\Delta X\Delta P = \frac{\hbar}{2}$ برقراراست. متقارن بودن این عدم یقین دردایره‌هایی که برای نشان دادن این حالت هادرشکلِ ۴ بکاربرده ایم نشان داده شده است. حالت های فشرده حالت هایی هستند که این تقارن درآنهاازبین رفته است و عدم یقین دریک مختصه به بهای افزایش درعدم یقین مختصه دیگر کاهش یافته است. به همین دلیل به آنها حالت های فشرده می گوییم.

۵ دو نوسانگر جفت شده به هم

هسته های یک مولکول دواتمی مثل هیدروژن هرکدام حول نقطه تعادل خود نوسان می کنند. علاوه براین، این دوهسته می توانند به یکدیگرنیز یک نیروی ارتعاشی وارد کنند. هامیلتونی چنین سیستمی به شکل زیرخواهد بود:

$$H=\frac{1}{2}P_1^2+\frac{1}{2}X_1^2+\frac{1}{2}P_2^2+\frac{1}{2}X_2^2+\frac{1}{2}\omega^2(X_1-X_2)^2. \tag{82}$$

می خواهیم طیف این هامیلتونی را پیداکنیم. روشی که برای این سیستم ساده به کارمی بریم درمورد تمام سیستم های چند ذره‌ای که با پتانسیل های مربعی بایکدیگر برهم کنش می کنند نیز به کارمی رود. نخست هامیلتونی را به شکل ماتریسی زیرمی نویسیم:

$$H=\frac{1}{2}P^TP+\frac{1}{2}X^TAX \tag{83}$$

که درآن A ماتریس متقارن زیراست

$$A=\begin{pmatrix} 1+\omega_1^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 1+\omega^2 \end{pmatrix}. \tag{84}$$

می دانیم که ماتریس متقارن A بایک تبدیل متعامد قطری می شود، یعنی ماتریس متعامدی مثل S وجود دارد به قسمی که $SAS^T=D$ که درآن D یک ماتریس قطری است.
باتوجه به متعامد بودن S یعنی این خاصیت که $S^TS=I$ می توان نوشت $A=S^TDS$. درنتیجه هامیلتونی را می توانیم به شکل زیربازنویسی کنیم

$$H=\frac{1}{2}P^TS^TSP+\frac{1}{2}X^TS^TDSX \tag{85}$$

باتغییر متغیری به صورت

$$\tilde{P}=SP, \qquad \tilde{X}=SX, \tag{86}$$

وتوجه به قطری بودن D این هامیلتونی به شکل ماتریسی زیرنوشته می شود:

$$H=\frac{1}{2}\tilde{P}^T\tilde{P}+\frac{1}{2}\tilde{X}^TD\tilde{X}, \tag{87}$$

ویا

$$H = \frac{1}{2}\tilde{P}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{P}_2^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\tilde{X}_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2\tilde{X}_2^2, \tag{88}$$

که درآن ω_1^2 و ω_2^2 عناصرروی قطری ماتریس D هستند. می بایست به دونکته مهم توجه کنیم. اول اینکه متغیرهای جدید درهمان روابط تعویضگری کانونیک صدق می کنند، یعنی

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = [\tilde{P}_i, \tilde{P}_j] = 0 \qquad [\tilde{X}_i, \tilde{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{89}$$

دلیل این امر متعامد بودن ماتریس S است.
دوم اینکه ماتریسِ A یک ماتریس مثبت است بنابراین ویژه مقدارهای آن یعنی عناصرروی قطرِ D می بایست مثبت باشند. درمثال فعلی خواننده می توان مثبت بودن ماتریسِ A را با یک محاسبه ساده بیازماید. درحالت کلی مثبت بودن این ماتریس برای آنکه انرژی سیستم ازپایین محدود باشد لازم است.

رابطه 88 نشان می دهد که برحسب متغیرهای جدید هامیلتونی نشان دهنده دونوسانگر مستقل ازهم است که طیف آن را براحتی می توانیم بدست بیاوریم. کافی است که عملگرهای زیررا تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} a_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}(\omega_1\tilde{X}_1 + i\tilde{P}_1) \qquad & a_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}(\omega_2\tilde{X}_2 + i\tilde{P}_2) \\ a_1^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}}(\omega_1\tilde{X}_1 - i\tilde{P}_1) \qquad & a_2^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}}(\omega_2\tilde{X}_2 - i\tilde{P}_2). \end{aligned} \tag{90}$$

باتوجه به روابط 89 این عملگرها درروابط زیرصدق می کنند:

$$[a_1, a_1^\dagger] = [a_2, a_2\dagger] = 1 \tag{91}$$

ضمناً هردوعملگری بااندیس متفاوت با یکدیگرجابجامی شوند که تاییدی است برمستقل بودن دو نوسانگری که برحسب متغیرهای جدید تعریف شده اند.
برحسب این عملگرها هامیلتونی عبارت خواهد بود از

$$H \equiv H_1 + H_2 = \omega_1(a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2}) + \omega_2(a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2}). \tag{92}$$

طیف این هامیلتونی به صورت زیراست:

$$H|n_1, n_2\rangle = E_{n_1,n_2}|n_1, n_2\rangle, \qquad E_{n_1,n_2} = \omega_1(n_1 + \frac{1}{2}) + \omega_2(n_2 + \frac{1}{2}). \tag{93}$$

دراین رابطه حالت $|n_1,n_2\rangle$، حالتِ زیراست

$$|n_1,n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!}} a_1^{\dagger\, n_1} a_2^{\dagger\, n_2}|0,0\rangle, \tag{94}$$

که درآن

$$a_1|0,0\rangle = a_2|0,0\rangle = 0. \tag{95}$$

یادآوری می کنیم که حالت $|n_1,n_2\rangle$ چیزی نیست جزضرب تانسوری دو حالتِ $|n_1\rangle$ و $|n_2\rangle$ که درابتدای درس باآنهاآشناشده ایم.
تابع موج دوذره وقتی که سیستم دریک ویژه حالت انرژی مثل $|n_1,n_2\rangle$ قراردارد برحسب مختصات کلاه دار به صورت زیرخواهد بود:

$$\begin{aligned}\psi_{n_1,n_2}(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) &= \langle \tilde{x}_1,\tilde{x}_2|n_1,n_2\rangle = \langle \tilde{x}_1|n_1\rangle\langle \tilde{x}_2|n_2\rangle \\ &= H_{n_1}(\tilde{x}_1)e^{-\frac{\tilde{x}_1^2}{2}} H_{n_2}(\tilde{x}_2)e^{-\frac{\tilde{x}_2^2}{2}}\end{aligned} \tag{96}$$

بررسی بقیه این موضوع را به تمرین ها واگذارمی کنیم.

۶ مسئله ها

۱ – فرض کنید که A و B دوعملگردلخواه هستند به نحوی که $[A,B]$ متناسب با عملگرواحد باشد. اصطلاحاً می گوییم $[A,B]$ یک عدد باشد.

الف: نشان دهید که

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{97}$$

راهنمایی: عملگر $U(\lambda) := e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda(A+B)}$ را درنظربگیرید مشتق آن را نسبت به λ حساب کنید ونشان دهید که

$$\frac{d}{d\lambda}U(\lambda) = \lambda[A,B]U(\lambda). \tag{98}$$

سپس این معادله را حل کنید.

ب: حال فرض کنید که $[A,B]$ عدد نیست بلکه $[A,[A,B]]$ و $[B,[A,B]]$ عدد هستند. باتکرار مراحل بالا نشان دهید که

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]}. \tag{99}$$

۲ — درلحظه صفریک نوسانگر به جرم m وفرکانسِ ω درحالتِ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$ قراردارد.
الف: هرگاه مقادیر متوسط یک کمیت A را برحسب زمان با $\langle A\rangle_t$ نشان دهیم کمیت های زیرراحساب کنید:

$$\langle X\rangle_t, \qquad \langle P\rangle_t, \qquad \langle H\rangle_t, \qquad \langle K\rangle_t, \qquad \langle V\rangle_t, \tag{100}$$

که درآن K انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل ذره است.

۳ — یک نوسانگرناهماهنگ با هامیلتونی

$$H=\frac{1}{2}P^2+\frac{1}{2}X^2+\lambda X^4 \tag{101}$$

داده شده است که درآن λ پارامترکوچکی است. حالت های $|n\rangle$ ویژه حالت انرژی این نوسانگرنیستند. ولی می توان متوسط انرژی نوسانگررا برای این حالت ها حساب کرد. این متوسط ها را حساب کنید.

۴ — ذره ای به جرم m درپتانسیل زیرقراردارد

$$V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}kx^2 & x>\geq 0\\ \infty & x<0\end{cases} \tag{102}$$

الف — ویژه تابع ها و ویژه مقدارهای انرژی را پیداکنید.

ب — درهرویژه حالت انرژی مقدار متوسط مکان ذره و هم چنین متوسط تکانه ذره یعنی $\sqrt{\langle X^2\rangle}$ و $\sqrt{\langle P^2\rangle}$ را محاسبه کنید.

۵— دو نوسانگرجفت شده به هم باهامیلتونی زیرتوصیف می شوند:

$$H=\frac{1}{2}P_1^2+\frac{1}{2}X_1^2+\frac{1}{2}P_2^2+\frac{1}{2}X_2^2+\frac{1}{2}\omega^2(X_1-X_2)^2. \tag{103}$$

الف: وقتی که سیستم درحالت پایه انرژی خود است مقدارمتوسط انرژی هرنوسانگر را جداگانه حساب کنید. منظورازانرژی نوسانگرشماره یک عبارت $H_1:=\frac{1}{2}P_1^2+\frac{1}{2}X_1^2$ است باتعریف مشابهی برای نوسانگردوم.

ب : تابع موج حالت پایه رادرفضای مختصات بدست آورید.

ج : معادلات حرکت هایزنبرگ را برای این سیستم حل کنید.

د: حال فرض کنید که درلحظه صفر سیستم درحالتی است که

$$\langle X_1\rangle = 0, \qquad \langle X_2\rangle = A, \qquad \langle P_1\rangle = 0, \qquad \langle P_2\rangle = 0. \tag{104}$$

این حالت متناظرباحالت کلاسیکی است که درآن یکی ازذرات را به اندازه A ازمحل تعادل خود منحرف کرده ایم. تعیین کنید که این متوسط ها درطول زمان چگونه تغییرمی کنند. راه حل خود را بامقایسه با حالت کلاسیک تعبیرکنید.

٦ — یک نوسانگر به جرم m وفرکانس ω دردمای T قرارگرفته است. مطابق با اصل بولتزمان درمکانیک آماری، حالت این نوسانگرباماتریس چگالیِ زیرتوصیف می شود:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \tag{105}$$

که درآن $\beta = \frac{1}{kT}$ و k ثابت بولتزمان است.

الف: ثابت Z را حساب کنید.

ب: متوسط انرژی نوسانگررا حساب کنید.

ج: متوسط انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر را حساب کنید.

۷ — نشان دهید که حالت های همدوسی که درروی هر کانتوربسته دلخواه درصفحه مختلط که مبدأ را احاطه می کند، یک پایه تشکیل می دهند. برای این منظورثابت کنید که هرحالت پایه $|n\rangle$ را می توان به شکل زیرنوشت:

$$\frac{\sqrt{n!}}{2\pi i}\oint_C z^{-n} e^{\frac{1}{2}|z|^2}|z\rangle dz \tag{106}$$

که درآن C یک کانتوربسته است که مبدأ را دربرمی گیرد.

۸ — حالت های همدوس حالت هایی هستند که کمترین عدم تعین ممکن را درمختصات مکان وتکانه دارند. دراین تمرین می خواهیم عدم تعین نسبی درانرژی این حالت هاراحساب کنیم. بنابراین فرض کنید که $|z\rangle$ یک حالت همدوس است و کمیت زیرراحساب کنید:

$$\frac{\langle z|H^2|z\rangle - \langle z|H|z\rangle^2}{\langle z|H|z\rangle^2}. \tag{107}$$

۷ ضمیمه:خواص چند جمله ای هرمیت

درمتن درس دیدیم که چند جمله ای های هرمیت با تابع مولد زیرتعریف می شوند:

$$g(x,t) = e^{-t^2+tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \tag{108}$$

ازاین تعریف می توان بسیاری از خواص چند جمله ای های هرمیت را نتیجه گرفت. بعضی ازاین خواص به شرح زیرهستند:

الف: $H_0(x) = 1$

کافی است که دردوطرف رابطه 48، قرار دهیم $t = 0$.

ب : توابع هرمیت دارای پاریته مشخص هستند. به عبارت بهتر

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \tag{109}$$

برای اثبات این کافی است که درتابع مولد t و x را به $-t$ و $-x$ تبدیل کنیم و با بسط اولیه مقایسه کنیم.

ج : درنقطه صفر چند جمله ای های هرمیت مقادیر زیر را دارند:

$$H_{2n+1} = 0, \qquad H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}. \tag{110}$$

برای اثبات این رابطه کافی است که درتابع مولد مقدار x را مساوی صفر قرارداد و بسط دو طرف را در رابطه 48 بایکدیگر مقایسه کرد.

د: به ازای تمام توابع هرمیت رابطه زیربرقراراست:

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \tag{111}$$

کافی است که ازطرفین 48 نسبت به x مشتق بگیریم و طرفین را باهم مقایسه کنیم.

ه: به ازای تمام توابع هرمیت رابطه تکرار زیربرقراراست:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \tag{112}$$

کافی است که ازطرفین 48 نسبت به t مشتق بگیریم و طرفین را باهم مقایسه کنیم.

د: چند جمله ای های هرمیت درمعادله دیفرانسیل زیر صدق می کنند:

$$(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2n)H_n(x) = 0 \tag{113}$$

برای اثبات این رابطه بااستفاده از 111 رابطه تکرارِ 112 را به شکل زیرمی نویسیم

$$H_{n+1} = 2xH_n - H_n' \longrightarrow H_n = 2xH_{n-1} - H_{n-1}'. \tag{114}$$

حال به جای توابع طرف راست از رابطه تکرارِ 111 جایگذاری می کنیم وبدست می آوریم

$$H_n = x\frac{1}{n}H_n' - \frac{1}{2n}H_n'' \tag{115}$$

که پس ازمرتب کردن به شکل معادله دیفرانسیل یاد شده درمی آید.