درس هشتم: تقارن در مکانیک کوانتومی

۱ مقدمه

درزندگی روزمره اغلب از لفظ تقارن استفاده می کنیم. می گوییم که یک گل ، یک منظره،یک مجسمه و یا یک ساختمان متقارن است و دیگری نیست. یایکی تقارن بیشتری نسبت به دیگری دارد. درتوصیف دقیق طبیعت آنچنان که درفیزیک با آن روبرو هستیم تقارن نقش مهم تر و بنیادی تری ایفا می کند و اثر آن تنها یک اثر زیبایی شناسی نیست. درسطوح مختلف طبیعت به تقارن های متعدد و متفاوت برمی خوریم. فضای سه بعدی مطلق یعنی فضای خالی دارای تقارن انتقالی و دورانی است یا به عبارت بهتر قوانین طبیعت نسبت به انتقال و دوران درفضای سه بعدی یکسان هستند. تکرار یک آزمایش دریک نقطه همان نتایجی را بدست می دهد که درنقطه دیگر و یادرجهت دیگر. این یک خاصیت بنیادی و مهم فضاست. فضا زمان چهاربعدی تقارن های بازهم بیشترو عمیق تری دارد. قوانین طبیعت دردستگاه های لختی که نسبت به یکدیگر درحال حرکت مستقیم الخط یکنواخت هستند یکسان هستند وبه همین جهت با هیچ آزمایش فیزیکی و بامشاهده هیچ پدیده طبیعی نمی توانیم ازحرکت دستگاه لختی که برآن سوار هستیم آگاه شویم. اطمینان ما به این تقارن ها چنان است که ازآنها به عنوان محکی برای سنجیدن درستی قوانین جدیدی که می خواهیم برای پدیده های ناشناخته وضع کنیم استفاده می کنیم و آن دسته از قوانین را که با این تقارن ها سازگارنباشند درهمان مرحله اول کنارمی گذاریم. تقارن قوانین فیزیکی تنها یک خاصیت انتزاعی نیست بلکه این تقارن ها باعث می شوند که اشیای فیزیکی ای که لاجرم تحت تسلط این قوانین هستند به نوبه خود تقارن هایی پیداکنند. یک ستاره که ازتراکم گازهای درون کهکشانی بوجودمی آید دراثر تقارن دورانی خود به شکل یک کره درمی آید و نه مثلا به صورت یک بیضی گون. حالت پایه اتم هیدروژن نیز یک شکل کروی دارد و شکل دیگر اربیتال ها نیز تقارن های مخصوص به خود دارند. از پیوند اتم ها مولکول هایی با تقارن های مختلف بوجود می آید. تقارن انتقالی باعث می شود که بلور ها از تکرار سلول های یکسانی درفضا ایجاد شوند. قیودی که ناشی از سازگاری تقارن های انتقالی برای یک بلور و تقارن های سلول واحد آن است، باعث می شود که تنها بلورهایی با شکل های معین درطبیعت یافت شوند. این تقارن نهایتاً به ابعاد ماکروسکوپی و به دنیای گل ها و پروانه ها راه می یابد.

دراین درس می خواهیم بفهمیم که تقارن در مکانیک کوانتومی چگونه نشان داده می شود و چه نتایجی به بار می آورد. برای درک درست این موضوع می بایست سه مفهوم اساسی را به وضوح ازیکدیگر تمیز داده وآنهارامطالعه کنیم. این سه مفهوم عبارتند از:

۱ − گروه تبدیلات تقارنی $Group\ of\ Symmetry\ Transformations$

۲ – نمایش عمل تقارنی درفضای هیلبرت ، $Representations of Symmetry Group$

۳ – معنا و نتایج تقارن.

بنابراین می بایست

۱ – عمل تقارنی را در فضای فیزیکی واقعی بشناسیم. این قسمت هیچ ربطی به مکانیک کوانتومی ندارد و تنها مطالعه ای هندسی وجبری از عمل تقارنی است.

۲ – سپس عمل تقارنی را درفضای هیلبرت نمایش دهیم. می دانیم که یک شئ فیزیکی واقعی مثل یک گلدان که آن را با O نشان می دهیم درمکانیک کوانتومی با یک حالتِ $|\Psi(O)\rangle$ توصیف می شود. سوالی که باآن مواجه هستیم آن است که اگر عملی را روی گلدان انجام دهیم، مثلا آن را دوران دهیم یا نسبت به یک محور آن را انعکاس دهیم تا گلدانِ O' بوجود بیاید، حالت جدید گلدان یعنی $|\Psi(O')\rangle$ چگونه به حالت قبلی آن مرتبط خواهد بود. و بالاخره

۳ – نتایج تقارن را درصورت وجود بررسی کنیم. بخصوص باید نشان دهیم که وجود تقارن چه تاثیری درطیف انرژی یک سیستم خواهد داشت و چه اثری در مطالعه دینامیک آن سیستم خواهد داشت.

باید تاکید کنیم که مراحل یک و دو هیچ ربطی به وجود یا عدم تقارن ندارند و صرفاً عمل تقارنی را درفضای سه بعدی واقعی و فضای هیلبرت نمایش می دهند. درمرحله سوم نشان می دهیم که اگر سیستم فیزیکی و برهم کنش های آن تحت عمل تقارنی تغییر نکنند، یعنی به اصطلاح متقارن باشند آنگاه می توان نتایجی درباره شکل هامیلتونی آن سیستم گرفت وازاین نتایج برای مشخص کردن طیف هامیلتونی و هم چنین دینامیک سیستم کمک گرفت.
این برنامه درمورد هرنوع عمل تقارنی به همین شکل تکرارمی شود.
بسیارمهم است که این سه مفهوم ازیک دیگر متمایز شوند زیرا هرکدام جایگاه ویژه خود را دارند. به عنوان مثال درمورد دوران ما همیشه می توانیم از عمل دوران در فضای فیزیکی و هم چنین فضای هیلبرت سخن بگوییم بدون اینکه هامیلتونی سیستم مورد نظر ما دارای تقارن دورانی باشد. بنابراین باید به طور جداگانه تعیین کنیم که عمل دوران درفضای فیزیکی و درفضای هیلبرت به چه معناست و متقارن بودن تحت دوران که مقوله متفاوتی است چه معنایی دارد و چه نتایجی ازآن حاصل می شود.

۲ گروه تبدیلات تقارنی

همه ما تصوری شهودی از تقارن و اشیای متقارن داریم. می دانیم که بعضی از گلها شکلی بسیار متقارن دارند، اغلب جانداران و هم چنین بناهای تاریخی نسبت به انعکاس حول یک خط قائم متقارن اند. در بعضی از جانداران مثل ستاره دریایی تقارن

خیلی بیشتری نسبت به موجودات روی خشکی مشاهده می شود و همین امر منجر به زیبایی خارق العاده آنها می شود. چگونه می‌توانیم به تعریفی دقیق از تقارن دست پیدا کنیم؟ چگونه می توانیم به این جمله که یک شیء از شیء دیگر متقارن تراست معنای دقیقی بدهیم؟ هدف ما دراین بخش آن است که پاسخی برای این سوال بیابیم.

یک شی مثل O را در نظر بگیرید. بر روی این شیء مجموعه ای از اعمال مثل $G=\{g_1,g_2,\cdots g_N\}$ می توانیم انجام دهیم . مثلا می توانیم این شی را بچرخانیم و یا اینکه حول محورهایی منعکس کنیم. مجموعه این اعمال را یک گروه تبدیلات $Group of Transformation$ می نامیم هرگاه دارای شرایط زیر باشند:

$$\begin{aligned}
&e\in G,\\
&\forall\ g_1,\ g_2\in G\ \longrightarrow\ g_1g_2\in G,\\
&\forall \gamma_1,\ g_2,\ g_3\in G\longrightarrow\ (g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)\\
&\forall g\in G\longrightarrow \exists g^{-1},|\ gg^{-1}=g^{-1}g=e.
\end{aligned}\tag{1}$$

دراین جا e عمل خنثی است یعنی این که هیچ کاری بر روی شی O انجام ندهیم. عمل g^{-1} نیز وارون عمل g است. منظور از g_2g_1 نیز آن است که نخست عمل g_1 و سپس عمل g_2 را روی شی انجام دهیم. عناصر یک گروه تبدیل می توانند متناهی، نامتناهی و شمارش پذیر و یا نامتناهی و شمارش ناپذیر باشد.

تعریف می گوییم شیء O دارای تقارن ِگروه G است، هرگاه شیء O تحت تبدیلات متعلق به گروه G تغییر نکند، به عبارت دیگر هرگاه

$$gO=O\qquad \forall g\in G.\tag{2}$$

هرگاه گروه G تعداد عناصر بیشتری داشته باشد، شیء O متقارن تراست.

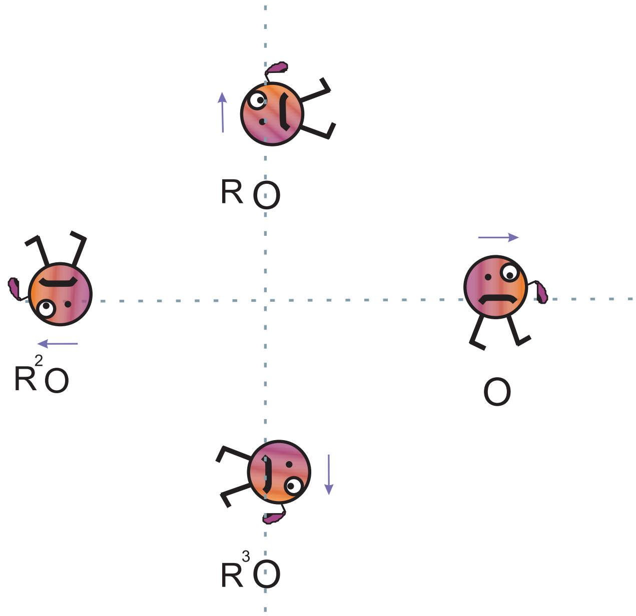
مثال ۱: گروه تبدیلات $Z_2:=\{e,\pi\}$ که شامل دو عمل همانی ِe و انعکاس π است به صورت زیر روی فضای سه بعدی عمل می کند:

$$\begin{aligned}
e:(x,y,z)&\longrightarrow(x,y,z)\\
\pi:(x,y,z)&\longrightarrow(x,y,-z).
\end{aligned}\tag{3}$$

عمل π درواقع اشیاء را نسبت به صفحه xy منعکس می کند.

مثال ۲: گروه $Z_N=\{e,R,R^2,\cdots R^{N-1}\}$ که در آن R عبارت از دوران یک شی حول یک محور مشخص به اندازه $\frac{2\pi}{N}$ است یک گروه تبدیلات ِمتناهی با N تا عضو است. دراین گروه قواعد ضرب زیر برقراراست:

$$R_kR_l=R_{k+l,\ mod\ N},\qquad e=R_0,\qquad R_k^{-1}=R_{N-k}\tag{4}$$



شکل ۱: اعمال e ، R ، R^2 و R^3 که در آن R دوران حول یک محور معین به اندازه ۹۰ درجه است تشکیل یک گروه می دهند. هر شکلی تحت این گروه متقارن نیست.

یک N ضعلی منتظم یا یک گل N برگ تحت گروه Z_N دارای تقارن است.

مثال ۳: در فضای یک بعدی گروه $T = \{t_{na} \mid n \in Z\}$ که درآن t_{na} انتقال یک شی به اندازه na درامتداد یک محور معین است و a یک مقدار مشخص است، یک گروه تبدیلات نامتناهی ولی شمارش پذیراست. دراین فضا عمل عناصر گروه به شکل زیراست:

$$T_{na} : x \longrightarrow x + na. \tag{5}$$

قواعد ضرب در این گروه به شکل زیر هستند:

$$t_{na}t_{ma} = t_{(n+m)a}. \tag{6}$$

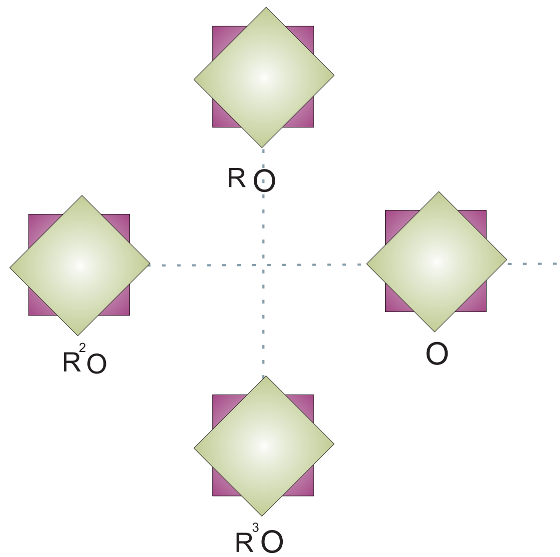
یک کریستال یک بعدی بی نهایت طویل دارای چنین تقارنی است.

مثال ۴: در صفحه دو بعدی یک دوران حول محور z به اندازه زاویه‌ی θ را با $R_z(\theta)$ نشان می دهیم. این دوران به ترتیب زیر عمل می کند:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{7}$$

براحتی معلوم می شود که

$$R_z(\theta)R_z(\theta') = R_z(\theta + \theta'). \tag{8}$$



شکل ۲: مثالی از یک شکل که تحت عمل گروه $Z_4 := \{e, R, R^2, R^3\}$ تغییر نمی کند. این شیء دارای تقارن Z_4 است.

که درآن همه زاویه ها به هنگ ِ 2π سنجیده می شوند.

مثال ۵: گروه دوران های سه بعدی اندازه یک بردار $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ با عبارت ِ $x^T x$ داده می شود که درآن x^T به معنای ترانهاده‌ی یک ماتریس است. هرگاه تبدیل خطی $x \longrightarrow x' = gx$ را در نظر بگیریم و تقاضا کنیم که این تبدیل طول بردار را حفظ کند به این نتیجه می رسیم که ماتریس A می بایست متعامد باشد یعنی

$$g^T g = I. \tag{9}$$

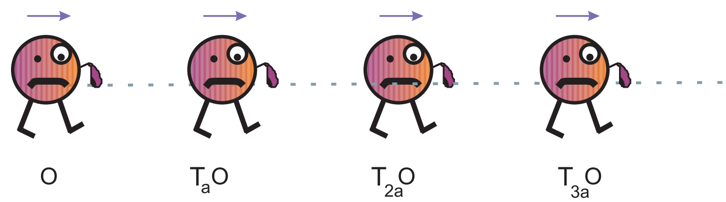
خواننده براحتی می تواند ثابت کند که مجموعه‌ی چنین تبدیلاتی یک گروه تشکیل می دهند. این گروه، گروه $O(3)$ [1] نامیده می شود. از رابطه بالا نتیجه می گیریم که $det(g) = \pm 1$ و این به معناست که از نظر توپولوژیک این گروه از دو تکه مجزا ساخته شده است. آن قسمت از گروه که شامل ماتریس های با دترمینان یک است یک زیرگروه تشکیل می دهد که به آن گروه $SO(3)$ [2] می گوییم. هر عنصر این زیر گروه نشان دهنده‌ی یک دوران سه بعدی است. دوران یک شی حول محور $\hat{\mathbf{n}}$ به اندازه زاویه θ را با $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ نشان می دهیم. برای فهم بهتر این گروه، تبدیلات بی نهایت کوچک $SO(3)$ را درنظرمی گیریم. این تبدیلات توسط ماتریس هایی انجام می شوند که نزدیک به عنصر واحد هستند. اگر $g \in G$ یک عضو گروه $SO(3)$ باشد که درنزدیکی ماتریس واحد I قراردارد می توان آن را به شکل زیرنوشت:

$$g \approx I + L \tag{10}$$

که درآن L ماتریسی است با درایه های کوچک. متعامد بودن g به این معناست که

$$g^t g = I \longrightarrow (I + a)(I + a^t) = I \longrightarrow a + a^t = 0, \tag{11}$$

Three Dimensional Orthogonal Group[1]
Special Orthogonal Group[2]



شکل ۳: مجموعه انتقال های T_{na} که در آن n یک عدد صحیح است تشکیل یک گروه می دهند.

که درآن از ماتریس $a^t a$ بدلیل کوچک بودن درایه های آن صرف نظرکرده ایم. ازاین رابطه نتیجه می گیریم که a یک ماتریس پادمتقارن است. یک ماتریس پادمتقارن را می توان به شکل زیرنوشت:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

که درآن $\eta_{1,2,3}$ پارامترهای کوچکی هستند. می توان با نوشتن (η_1, η_2, η_3) به صورت $\theta(n_1, n_2, n_3)$ که درآن θ یک پارامتر بی نهای کوچک و $n = (n_1, n_2, n_3)$ یک برداریکه است تبدیل بی نهایت کوچک g رابه شکل زیرنوشت:

$$g \approx I + \theta n \cdot T, \tag{13}$$

که درآن

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

می توان براحتی دید که درایه های ماتریس های فوق از رابطه فشرده زیربدست می آیند:

$$(T_j)_{kl} = -\epsilon_{jkl} \tag{15}$$

و درنتیجه

$$g_{kl} = \delta_{kl} + \theta n_j (T_j)_{kl} = \delta_{kl} - \theta n_j \epsilon_{jkl}. \tag{16}$$

حال وقتی که چنین ماتریسی روی بردار سه بعدی $r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ اثر بکند آن را تبدیل به برداری مثل $r' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ می کند به نحوی که:

$$r' = gr \longrightarrow x'_k = g_{kl}x_l = (\delta_{kl} - \theta n_j \epsilon_{jkl})x_l = x_k - \theta n_j \epsilon_{jkl} x_k \tag{17}$$

و یا اگر به رابطه ضرب خارجی بردارها درفضای سه بعدی توجه کنیم

$$r' = r + \theta n \times r. \tag{18}$$

اما این رابطه به این معناست که بردار r حول محور n به اندازه زاویه کوچک θ چرخیده است. بنابراین ماتریس g یک دوران حول محور n به اندازه زاویه θ ایجاد کرده است.
حال ازخود می پرسیم که چه ماتریسی می تواند حول محور n دوران های بااندازه دلخواه ایجاد کند. پاسخ این سوال ساده است، زیرا یک دوران دلخواه حول یک محوررا می توان از تعداد بسیارزیادی دوران بازوایه بسیارکوچک بدست آورد. به عبارت دقیق تر یک دوران به اندازه زاویه θ را که دیگر لزوماً کوچک نیست می توان از N دوران پشت سرهم به اندازه زاویه $\frac{\theta}{N}$ بدست آورد. هرکدام ازاین دوران ها با ماتریس $(I + \frac{\theta}{N} n \cdot T)$ بوجود می آیند و هرچه که $\frac{\theta}{N}$ کوچک ترباشد این حرف دقیق تراست. بنابراین یک دوران محدود حول محور n به اندازه زاویه θ که آن را با $R_n(\theta)$ نشان می دهیم باماتریس زیرایجاد می شود:

$$R_n(\theta) = \lim_{N \longrightarrow \infty} (I + \frac{\theta}{N} n \cdot T)^N = e^{\theta n \cdot T}. \tag{19}$$

ماتریس های T_2, T_1 و T_3 مولدهای گروه دوران یا مولد های گروه $SO(3)$ خوانده می شوند. این ماتریس ها تحت رابطه جابجاگری یک مجموعه‌ی بسته را تشکیل می دهند. خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که

$$\begin{aligned} [T_1, T_2] &= -T_3, \\ [T_2, T_3] &= -T_1, \\ [T_3, T_1] &= -T_2. \end{aligned} \tag{20}$$

این رابطه ها بسیار شبیه به روابط جابجاگری عملگرهای مربوط به مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای هستند. در حقیقت اگر هرکدام از این ماتریس ها را در i ضرب کنیم و و قرار دهیم $L_a = iT_a, \quad a = 1, 2, 3$ آنگاه L_a ها دقیقاً در روابط مربوط به تکانه‌ی زاویه‌ای صدق می کنند.

براحتی می توان شکل صریح ماتریس های $R_y(\theta), R_x(\theta)$ و $R_z(\theta)$ رابدست آورد. نتیجه عبارت خواهد بود از:

$$R_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$R_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$R_{\hat{z}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

برای این که شکل صریح ماتریس دوران حول محورِ $\mathbf{n}$ را به اندازه زاویه‌ی θ پیدا کنیم کافی است که به رابطه‌ی $R_{\mathbf{n}}(\theta) = e^{-i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}}$ توجه کنیم و نخست ماتریسِ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}$ را قطری کرده و بعد از به توان رساندن آن به پایه نخست برگردیم.
تمرین: ماتریس دوران حول محورِ $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ را به اندازه زاویه ۴۵ درجه در جهت پاد ساعتگرد بدست آورید.

گروه $SO(2)$ یعنی دوران های صفحه دوبعدی و هم چنین گروه $SO(3)$ یعنی دوران های فضای سه بعدی دو نمونه از گروه های پیوسته هستند که به آنها اصطلاحاً گروه های لی [3] نیز می گویند. گروه های ماتریسی یعنی گروه هایی که هر عنصر آنها یک ماتریس است ، نوع مهمی از گروه های پیوسته را تشکیل می دهند که در فیزیک نیز تقریباً به طور کامل با آنها سر و کار داریم. هر عنصر یک گروه ماتریسی مثل $g \in G$ به صورت زیر روی هر نقطه از یک شی عمل می کند: $\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}' = g\mathbf{r}$. دقت کنید که اگر ماتریس g یک ماتریس $D \times D$ باشد، $\mathbf{r}$ نیز یک بردار D مولفه‌ای است .

می توان نشان داد که یک عنصر گروه ماتریسی مثل $g = g(\theta_1, \cdots \theta_n)$ را می توان به شکل

$$g = e^{\theta_1 T_1 + \theta_2 T_2 + \cdots \theta_n T_n} \quad (24)$$

نشان داد که دراین صورت به T_i ها مولد های گروه لی می گویند. این بسط هم چنین به این معناست که برای θ_i های کوچک خواهیم داشت

$$g \approx I + \theta_1 T_1 + \theta_2 T_2 + \cdots \theta_n T_n. \quad (25)$$

با استفاده از خواص گروه و بسط فوق می توان نشان داد که مولدهای گروه در رابطه ای به شکل زیر صدق می کنند:

$$[T_i, T_j] = C_{ijk} T_k, \quad (26)$$

که درآن روی شاخص k جمع شده و C_{ijk} ها ثابت های ساختاری خوانده می شوند. در رابطه فوق $[T_i, T_j] := T_i T_j - T_j T_i$ تعویض گر لی نامیده می شود و اصطلاحاً گفته می شود مجموعه مولد ها یک جبر لی تشکیل می دهند.

[3] Lie Group

۳ نمایش گروه تبدیلات روی فضای هیلبرت

تا کنون ما نشان داده‌ایم که مجموعه تبدیلات تقارنی روی یک شی یک گروه تشکیل می دهند. یک شی O تحت تاثیرِ یک عمل g به یک شی $O'=gO$ تبدیل می شود. اما می دانیم که یک شی مثل O در یک فضای هیلبرت مناسب که بستگی به درجات آزادی آن شی دارد با یک بردار حالت مثل $|\psi\rangle$ نشان داده می شود. بعد از عمل تقارنیِ g شی O به شی $O'=gO$ تبدیل می شود. می خواهیم به این سوال اساسی پاسخ دهیم که حالت این شیء یعنی $|\psi'\rangle$ چه نسبتی با حالتِ قبلی شی یعنی $|\psi\rangle$ دارد؟

برای پاسخ به این سوال فرض می کنیم که همچنان که $O'=gO$، بردارهای حالت نیز با یک رابطه یکانی به یکدیگر مرتبط باشند، یعنی

$$|\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle, \tag{27}$$

که درآن $U(g)$ یک ماتریس یکانی در فضای هیلبرت است که وابسته به تبدیل g است. حال اگر دو تبدیل پیاپی روی شیء اعمال کنیم خواهیم داشت

$$O'=gO, \qquad O" = g'O' \longrightarrow O" = g"O \tag{28}$$

که درآن $g" = g'g$، انتظار داریم که بردارهای حالت نیز به همین ترتیب تبدیل شوند یعنی اینکه

$$|\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle, \qquad |\psi"\rangle = U(g')|\psi'\rangle \longrightarrow |\psi"\rangle = U(g")|\psi\rangle. \tag{29}$$

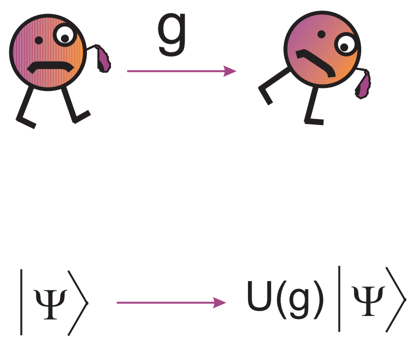
از طرفی از ترکیب دو تساوی اول در رابطه فوق و هم چنین استفاده از تساوی $g" = g'g$ بدست می آوریم که

$$U(g'g) = U(g')U(g). \tag{30}$$

این رابطه شرط اساسی است که ماتریس های U می بایست درآن صدق کنند. چنین رابطه ای به این معناست که ما در فضای هیلبرتی که حالت های شیء در آن تعریف شده‌اند ماتریس های یکانی ای پیدا کرده‌ایم که در همان جدول ضربی صدق می کنند که عناصر گروه در آن صدق می کنند. در این حالت می گوییم که ما یک نمایش یکانی از گروه روی فضای هیلبرت پیدا کرده‌ایم. بعد این ماتریس ها یا بعد فضای هیلبرت بعد نمایش گروه خوانده می شود. خواننده براحتی می تواند با استفاده از رابطه بالا نشان دهد که

$$U(e) = I, \qquad U(g^{-1}) = U(g)^{-1} = U(g)^\dagger. \tag{31}$$

بنابراین هرگاه یک شیء O تخت تاثیر تبدیل $g\in G$ قرار گیرد و به O' تبدیل شود، حالت آن شیء یعنی $|\psi\rangle$ تحت تاثیر عملگریکانی $U(g)$ که نمایشی از عنصر g است قرار می گیرد و به حالت $|\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle$ تبدیل می شود.



شکل ۴: هرگاه شکل O تحت تبدیل g قرار گیرد و به شکل $O' = gO$ تبدیل شود، حالت آن یعنی $|\psi\rangle$ به حالت $U(g)|\psi\rangle$ تبدیل می شود.

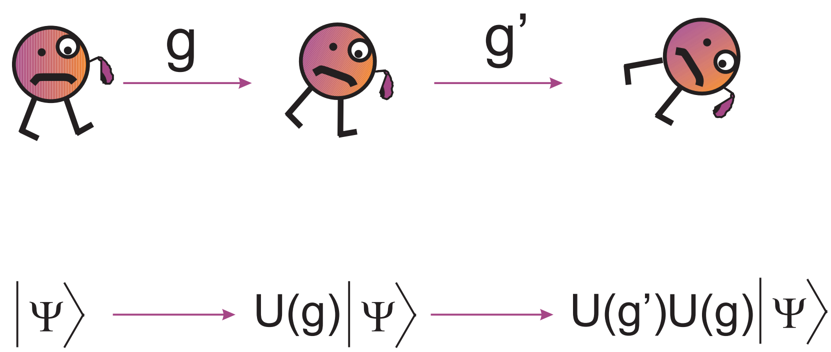
باید یادآور شویم که نمایش گروه ها یک مفهوم اساسی در نظریه گروه ها ست و می توان آن را فارغ از مکانیک کوانتومی مطالعه کرد. درادامه این بخش چند مفهوم اساسی را در باره نمایش یادآوری می کنیم.

تعریف: هرگاه V یک فضای برداری باشد، مجموعه تمام عملگرهای خطی وارون پذیر از V به V را با $L(V)$ نمایش می دهیم. $L(V)$ خود یک گروه است زیراترکیب دو تبدیل خطی یک تبدیل خطی ا ست.

تعریف: هرگاه G یک گروه و V یک فضای برداری باشد، نگاشت $D: G \longrightarrow L(V)$ را یک نمایش می خوانیم هرگاه شرط زیر برقرارباشد:

$$D(g)D(g') = D(gg'). \tag{32}$$

بعد فضای برداری V را بعد نمایش می خوانیم. هرگاه به ازای هرg، $D(g)$ یک عملگریکانی باشد، نمایش را یکانی می خوانیم. دراین شرایط لازم است که فضای برداری V مجهزبه یک ضرب داخلی باشد. برای نمایش یکانی معمولاً از حرف U بجای D استفاده می کنیم.
همینجا تذکرمی دهیم که ممکن است که یک گروه تنها نمایش هایی با بعدهای مشخص داشته باشد. هم چنین یک گروه می تواند در یک فضای برداری چندین نمایش مختلف داشته باشد.
قضیه: هرگاه $D: G \longrightarrow L(V)$ یک نمایش و $S \in End(V)$ یک تبدیل خطی وارون پذیرباشد آنگاه $D' := SDS^{-1}$ نیزیک نمایش است.



شکل ۵: هرگاه شکل O نخست تحت تبدیل g و سپس تحت تبدیل g' قرار گیرد، حالت آن یعنی $|\psi\rangle$ به حالت $U(g')U(g)|\psi\rangle$ تبدیل می شود.

اثبات:

$$D'(g_1)D'(g_2) = (SD(g_1)S^{-1})(SD(g_2)S^{-1}) = S(D(g_1)D(g_2))S^{-1} = SD(g_1g_2)S^{-1} = D'(g_1g_2). \tag{33}$$

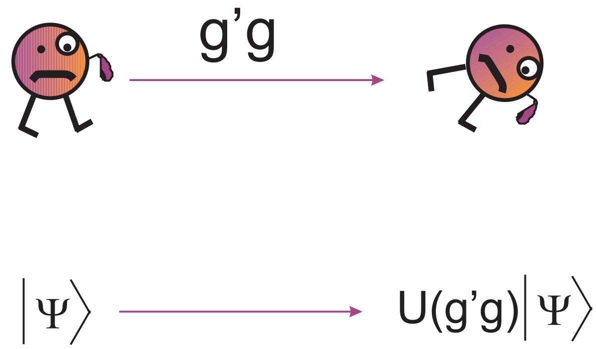
تعریف: هرگاه برای دونمایش D و D' یک تبدیل $S \in L(V)$ وجود داشته باشد به قسمی که برای تمام g هاداشته باشیم $D'(g) = SD(g)S^{-1}$، آن دونمایش معادل خوانده می شوند. دونمایشی که چنین نباشند نمایش های غیرمعادل خوانده می شوند. معادل بودن دو نمایش ماتریسی از یک گروه به این معناست که می توان با یک تغییر پایه در آن فضای برداری ماتریس های یک نمایش را به ماتریس های نمایش دیگر تبدیل کرد و بنابراین آن دو نمایش اساساً از هم متفاوت نیستند.

دیدیم که هرگاه G یک گروه پیوسته ماتریسی و $\{T_i, \quad i = 1, \cdots n\}$ مولدهای آن باشند، می توان هر عنصر گروه مثل g را به صورت زیر نوشت:

$$g = e^{\sum_{i=1}^{n} \theta_i T_i} \tag{34}$$

که در آن θ_i ها پارامترهای گروه هستند. هم چنین دیدیم (البته بدون اثبات) که بسته بودن گروه نسبت به ضرب معادل با بسته بودن مولد ها تحت عمل جابجایی است به این معنا که

$$[T_i, T_j] = C_{ij}^k T_k \tag{35}$$



١

شکل ٦:

که درآن روی اندیس k جمع بسته شده‌است. اصطلاحاً می گوییم مجموعه مولدها یک جبرلی تشکیل می دهند که می توانیم آن را با A نشان دهیم. هرگاه $D : G \longrightarrow L(V)$ یک نمایش از گروه باشد، می بایست در شرط $D(g)D(g') = D(gg')$ صدق کند. به طریق مشابه نمایش جبر یعنی $D : A \longrightarrow L(V)$ به این معناست که ماتریس های $D(T_i)$ در همان رابطه جابجایی مولدها صدق می کنند یعنی

$$[D(T_i), D(T_j)] = C_{ij}^k D(T_k). \tag{36}$$

می توان نشان داد که هرگاه یک نمایش از جبر لی وابسته به یک گروه داشته باشیم یک نمایش از خود آن گروه نیز بدست می آید به این معنا که هرگاه رابطه بالا برقرار باشد و قرار دهیم $D(g) := e^{\sum_{i=1}^n \theta_i D(T_i)}$، آنگاه $D(g)$ ها در همان روابط ضرب گروه صدق می کنند.

در مثال های زیر و هم چنین مسائلی که در مکانیک کوانتومی مطالعه می کنیم، معمولاً از نوشتن نمادِ D برای سادگی صرف نظر می کنیم و منظورما از معمولاً از نمادهای g و یا T_i نمایش آنها در فضای هیلبرتی است که در نظر داریم.

مثال: برای گروه $Z_2 = \{e, a\}$ می توان دونمایش دوبعدی زیررادرنظرگرفت:

$$D_1(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

و

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

این دونمایش معادلند. زیرا

$$D_2(g) = SD_1(g)S^{-1}, \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

نکته مهم: ممکن است یک گروه نمایش های متفاوتی داشته باشد. این که چه نمایشی از این گروه برای توصیف تقارن های نشان داده شده توسط این گروه در مکانیک کوانتومی به کار می رود بستگی به این است که چه فضای هیلبرتی برای توصیف درجات آزادی سیستم کوانتومی انتخاب شده است. بنابراین اگر به عنوان مثال می خواهیم نمایش گروه دوران را برای یک ذره‌ی اسپین ۱/۲ بکار ببریم می بایست یک نمایش دوبعدی از گروه تقارن را انتخاب کنیم و اگر هدف ما نشان دادن آثار تقارن دورانی برای ذره‌ای با اسپین ۱ است آنگاه می بایست یک نمایش ۳ بعدی از گروه دوران انتخاب کنیم. و بالاخره اگر هدف ما مطالعه تقارن برای ذره‌ای است که در فضای سه بعدی حرکت می کند آنگاه با توجه به این که فضای هلیبرت چنین ذره‌ای یک فضای بی نهایت بعدی است می بایست نمایش بی نهایت بعدی از گروه دوران را انتخاب کنیم.

۱.۳ تبدیل انعکاس

ذره ای را که در یک بعد و در راستای x حرکت می کند در نظر می گیریم. تبدیل انعکاس به صورت زیر روی مختصات مکان و تکانه این ذره اثر می کند:

$$\pi : x \longrightarrow -x, \qquad \pi : p \longrightarrow -p. \tag{40}$$

نمایش این تبدیل روی فضای هیلبرت ذره به صورت زیر است:

$$U(\pi) : |x\rangle \longrightarrow |-x\rangle, \tag{41}$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$U(\pi)|\psi\rangle = U(\pi)\int dx|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx|-x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx|x\rangle\langle -x|\psi\rangle. \tag{42}$$

این امر به این معناست که عملگر پاریته یعنی $U(\pi)$ روی توابع موج به صورت زیر عمل می کند:

$$U(\pi) : \psi(x) \longrightarrow \psi(-x). \tag{43}$$

۲.۳ گروه تبدیلات دوران در دو بعد

ذره ای را در نظر بگیرید که در دوبعد حرکت می کند و مختصات مکانی آن با x و y نشان داده می شوند. یک تبدیل دوران حول محور z به اندازه زاوایه θ مختصات این ذره را به شکل زیر تبدیل می کند:

$$R(\theta):\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{44}$$

حال می خواهیم ببنیم که نمایش این دوران در فضای هیلبرت مربوط به ذره با چه عملگر یکانی ای داده می شود. بنابرآنچه که گفته شد می بایست داشته باشیم:

$$|x',y'\rangle = U(R)|x,y\rangle. \tag{45}$$

در رابطه بالا برای سادگی $U(R(\theta))$ را به شکل $U(R)$ نوشته ایم.

حال روی طرفین عملگر X و را اثر می دهیم و با توجه به اینکه $X|x',y'\rangle = x'|x',y'\rangle$ بدست می آوریم

$$x'|x',y'\rangle = XU(R)|x,y\rangle \;\longrightarrow\; x'U(R)|x,y\rangle = XU(R))|x,y\rangle \;\longrightarrow\; x'|x,y\rangle = U^{-1}(R)XU(R)|x,y\rangle. \tag{46}$$

امامی دانیم که $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$. بنابراین رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$(x\cos\theta - y\sin\theta)|x,y\rangle = U^{-1}(R)XU(R)|x,y\rangle. \tag{47}$$

اما هنوز نمی توان از این رابطه یک رابطه در مورد عملگرها استخراج کرد، زیرا در طرف چپ آثاری از خود بردار حالت وجود دارد. برای این کار طرف چپ را به صورت زیر می نویسیم:

$$(X\cos\theta - Y\sin\theta)|x,y\rangle = U^{-1}(R)XU(R)|x,y\rangle. \tag{48}$$

از آنجا که این رابطه برای هر بردار پایه ای برقرار است می توان از آن تساوی عملگرهای طرفین را نتیجه گرفت یعنی

$$U^{-1}(R)XU(R) = X\cos\theta - Y\sin\theta \tag{49}$$

با تکرار این استدلال برای مولفه y به رابطه مشابهی می رسیم. این رابطه یک شرط اساسی روی عملگری که قرار است نمایش دوران در فضای هیلبرت باشد اعمال می کند. برای درک بهتر این شرط دقت می کنیم که ماتریس $U(R(\theta))$ رامی توان به صورت $U(R(\theta)) = e^{-i\theta L'}$ نوشت که درآن L' یک ماتریس هرمیتی است. هرگاه θ را کوچک بگیریم خواهیم داشت

$U(R(\theta)) \approx I - i\theta L'$ و $U^{-1}(R(\theta)) \approx I - i\theta L$ و در نتیجه رابطه بالا پس از کمی ساده کردن و صرف نظر کردن از جملات رتبه ۲ از θ به شکل زیر در می آید:

$$[L', X] = iY \tag{50}$$

هرگاه این استدلال را برای مولفه Y نیز تکرار کنیم به رابطه های زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} [L', X] &= iY \\ [L', Y] &= -iX. \end{aligned} \tag{51}$$

باتوجه به روابط جابجایی عملگرهای مکان و تکانه می توانیم عملگر L' را پیدا کنیم. خواننده می تواند نشان دهد که L' برابر است با

$$L' = \frac{1}{\hbar} L_z = \frac{1}{\hbar}(XP_y - YP_x). \tag{52}$$

بنابراین یافتیم که

$$U(R(\theta)) = e^{-i\frac{\theta}{\hbar} L_z}. \tag{53}$$

به این ترتیب می گوییم که عملگر تکانه زاویه ای L_z مولد دوران حول محور z در فضای هیلبرت ذره ای است که در دو بعد x, y حرکت می کند.
تا کنون اثر عملگر دوران یعنی $U(R(\theta))$ را روی حالت های پایه بدست آوردیم. حال از خود سوال می کنیم که اثر این عملگر روی توابع موج و هم چنین روی ارزش های انتظاری مشاهده‌پذیرهای مکان و تکانه چیست؟ نخست به تابع موج توجه می کنیم. داریم

$$|\psi'\rangle = U(R(\theta))|\psi\rangle. \tag{54}$$

با ضرب کردن طرفین از چپ در $\langle x, y|$ بدست می آوریم

$$\langle x, y|\psi'\rangle = \langle x, y|U(R(\theta))|\psi\rangle. \tag{55}$$

حال باید در طرف راست $\langle x, y|U(R(\theta))$ را محاسبه کنیم. به رابطه‌ی 45 توجه می کنیم و آن را به شکل زیر می نویسیم:

$$|x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta\rangle = U(R(\theta))|x, y\rangle \tag{56}$$

هرگاه مکان یک ذره را برحسب مختصات قطبی بنویسیم، یعنی از تناظر $|x, y\rangle = |r, \phi\rangle$ استفاده کنیم، رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$|r, \phi + \theta\rangle = U(R(\theta))|r, \phi\rangle. \tag{57}$$

از رابطه بالا بدست می آوریم

$$\langle r,\phi+\theta| = \langle r,\phi|U^\dagger(R(\theta)) \tag{58}$$

می توانیم طرفین رااز راست در $U(R(\theta))$ ضرب کرده و از یکانی بودن U استفاده کنیم. رابطه جدید به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\langle r,\phi-\theta| = \langle r,\phi|U(R(\theta)) \tag{59}$$

حال بازمی گردیم به رابطه 55 و درنتیجه بدست می آوریم

$$\langle r,\phi|\psi'\rangle = \langle r,\phi-\theta|\psi\rangle, \tag{60}$$

و یا

$$\psi'(r,\phi) = \psi(r,\phi-\theta). \tag{61}$$

این رابطه به این معناست که تابع موج ψ' چیزی نیست جز همان تابع ψ که در صفحه دوبعدی به اندازه زاویه‌ی θ در جهت پادساعت گرد چرخیده است.

دراینجا به یک سوال باید پاسخ دهیم و آن اینکه اثر عملگر $U(R(\theta))$ روی ویژه پایه های تکانه چیست؟ برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$U(R(\theta))|p\rangle = U(R(\theta))\int d^2r|r\rangle\langle r|p\rangle = \int d^2r|r'\rangle\langle r|p\rangle \tag{62}$$

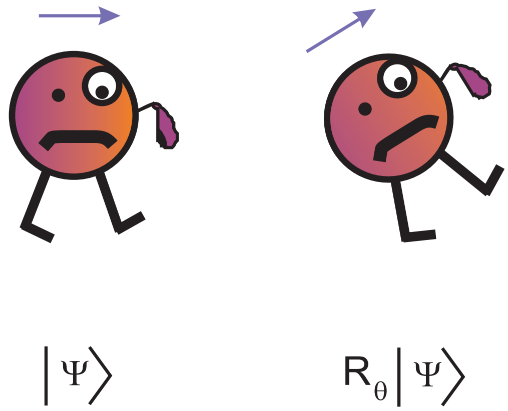
دقت کنید که در رابطه بالا $\mathbf{r}'$ دوران یافته $\mathbf{r}$ است. حال از این موضوع استفاده می کنیم که $\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}$ که درآن $\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = \mathbf{r}'\cdot\mathbf{p}'$ دوران یافته $\mathbf{p}$ است و اینکه $\mathbf{p}'$ $d^2\mathbf{r} = d^2\mathbf{r}'$ (صحت این موضوع را تحقیق کنید.) درنتیجه رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$U(R(\theta))|p\rangle = \int d^2r'|r'\rangle\langle r'|p'\rangle = |p'\rangle. \tag{63}$$

بنابراین عملگر دوران بردارهای پایه تکانه را نیز به همان اندازه‌ی بردارهای پایه مکان دوران می دهد، شکل ۷.

می توانیم رابطه بین ارزش های انتظاری مولفه های مکان و تکانه را برای دو حالت $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle$ بدست آوریم. به عبارت دیگر می خواهیم ببینیم رابطه بین $\langle X\rangle' := \langle\psi'|X|\psi'\rangle$ و $\langle X\rangle := \langle\psi|X|\psi\rangle$ چیست. داریم

$$\langle X\rangle' = \langle\psi'|X|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger(R)XU(R)|\psi\rangle = \langle\psi|X\cos\theta - Y\sin\theta|\psi\rangle = \cos\theta\langle X\rangle - \sin\theta\langle Y\rangle, \tag{64}$$



شکل ۷: عملگردوران روی یک حالت کوانتومی، هم مختصات و هم تکانه هارا دوران می دهد.

به همین ترتیب می توانیم این محاسبه را برای Y و یا مولفه های تکانه انجام دهیم . نتیجه آن برابراست با:

$$\begin{pmatrix} \langle X\rangle' \\ \langle Y\rangle' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle X\rangle \\ \langle Y\rangle \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \langle P_x\rangle' \\ \langle P_y\rangle' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle P_x\rangle \\ \langle P_y\rangle \end{pmatrix}. \tag{65}$$

این رابطه نشان می دهد که اثر دوران روی ارزش های انتظاری مولفه‌های مکان و تکانه همانی است که در دنیای کلاسیک انتظار داریم. باید توجه داشت که این رابطه تنها در مورد ارزش های انتظاری برقرار است و نه در مورد تک تک نتایج اندازه گیری .

آیااین تناظر بین مولفه های تکانه زاویه ای و مولدهای دوران منحصر به فضای دوبعدی است؟ می توانیم از خود بپرسیم که درفضای هیلبرتی که حالت های یک ذره را در فضای سه بعدی نشان می دهد، مولدهای دوران حول محورهای x، y و یا محورهای دلخواه چه عملگرهایی هستند. برای پاسخ به این سوال ها مثال بعدی را بررسی می کنیم.

۳.۳ تبدیلات دوران در سه بعد

نکته مهمی که باید به آن توجه کنیم آن است که یک دوران حول محور $\mathbf{n}$ با زاویه θ یعنی $R\mathbf{n}(\theta)$ را می توانیم به صورت تعداد زیادی دوران به اندازه زاویه های کوچک نشان داد. به عبارت دیگر

$$R_n(\theta) = R_n(\frac{\theta}{N})^N \tag{66}$$

این کار را به این دلیل انجام می دهیم که در سه بعد مطالعه دوران های بی نهایت کوچک بسیار ساده است. با توجه به رابطه 30 بدست می آوریم که

$$U(R_n(\theta)) = U(R_n(\frac{\theta}{N}))^N \tag{67}$$

بنابراین کافی است که $U(R\mathbf{n}(\theta))$ را برای یک زاویه بسیار کوچکِ θ بدست بیاوریم. برای این کار مراحلی را که برای بدست آوردن نمایش دوران در دوبعد طی کردیم تکرار می کنیم. نخست ببنیم که یک دوران بسیار کوچک از نوع $R\mathbf{n}(\theta)$ چگونه روی مختصه های مکانی اثر می گذارد. هرگاه قرار دهیم $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ و $\mathbf{r}' = (x', y', z') = (x'_1, x'_2, x'_3)$ آنگاه می دانیم که تحت دورانی از نوع فوق رابطه زیر برقراراست

$$r' = r + \theta n \times r. \tag{68}$$

برحسب مولفه ها داریم

$$x'_k = x_k + \theta\epsilon_{klm} n_l x_m. \tag{69}$$

حال بازهم با خلاصه نویسی $U(R) \equiv U(R\mathbf{n}(\theta))$ قرار می دهیم

$$|r'\rangle = U(R)|r\rangle. \tag{70}$$

با اثر دادن عملگر های X_i روی طرفین بدست می آوریم

$$X_k|r'\rangle = X_i U(R)|r\rangle \longrightarrow x'_k|r'\rangle = X_i U(R)|r\rangle \longrightarrow x'_k U(R)|r\rangle = X_k U(R)|r\rangle, \tag{71}$$

و یا با اثر دادن عملگر $U^{-1}(R)$ روی طرفین به این نتیجه می رسیم

$$x'_k|r\rangle = U^{-1}(R) X_k U(R)|r\rangle. \tag{72}$$

با توجه به رابطه 69 خواهیم داشت

$$(x_k + \theta\epsilon_{klm} n_l x_m)|r\rangle = U^{-1}(R) X_k U(R)|r\rangle, \tag{73}$$

و یا

$$(X_k + \theta\epsilon_{klm} n_l X_m)|r\rangle = U^{-1}(R) X_k U(R)|r\rangle. \tag{74}$$

باتوجه به این که در این رابطه $|\mathbf{r}\rangle$ یک حالت دلخواه است تساوی زیر را بین عملگر ها نتیجه می گیریم

$$U^{-1}(R) X_k U(R) = X_k + \theta\epsilon_{klm} n_l X_m. \tag{75}$$

مشابه با آنچه که در مورد دوران های دوبعدی داشتیم قرار می دهیم $U(R) = e^{-i\theta \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}'}$ که درآن $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z) = (L_1, L_2, L_3)$ یک عملگر برداری با سه مولفه است. برای زوایه کوچک این عملگر برابر است با $U(R) = I - i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}'$ و درنتیجه رابطه بالا به صورت زیر درمی آید:

$$[n \cdot L', X_k] = -i\epsilon_{klm} n_l X_m. \tag{76}$$

و یا با توجه به اینکه $\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}' = n_k L'_k$، خواهیم داشت

$$[L'_j, X_k] = -i\epsilon_{jkl} X_l. \tag{77}$$

واضح است که L'_j ها می بایست عبارت هایی از حاصل ضرب X ها و P باشند تا بتوانند چنین رابطه های جابجایی ای را تولید کنند. خواننده براحتی می تواند نشان دهد که L'_j به صورت زیر است:

$$L'_j = \frac{1}{\hbar} L_j = \frac{1}{\hbar}\epsilon_{jkl} X_k P_l, \tag{78}$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} L'_x &= \frac{1}{\hbar} L_x = \frac{1}{\hbar}(YP_z - ZP_y) \\ L'_y &= \frac{1}{\hbar} L_y = \frac{1}{\hbar}(ZP_x - XP_z) \\ L'_z &= \frac{1}{\hbar} L_z = \frac{1}{\hbar}(XP_y - YP_x). \end{aligned} \tag{79}$$

بنابراین بدست می آوریم که مولفه های تکانه زاویه‌ای مولدهای دوران حول محورهای مختلف هستند و عملگر $U(R\mathbf{n}(\theta))$ برابر است با:

$$U(R_n(\theta)) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta n\cdot L}. \tag{80}$$

این عبارت در عین حال نشان می دهد که مولد دوران حول محور $\mathbf{n}$ برابر است با $\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}$.

۴ معنای تقارن

تا کنون به بررسی تبدیل تقارنی و نمایش آن در فضای هیلبرت پرداخته ایم. حال به مفهوم سوم می رسیم یعنی اینکه تقارن دریک سیستم فیزیکی دو بعدی به چه معناست و چه نتایجی برآن مترتب است.

یک سیستم فیزیکی با هامیلتونی آن مشخص می شود. سیستمی که تحت تبدیلات تقارنی گروه G متقارن است دارای این خاصیت است که

$$H(X,P)=H(gX,gP) \qquad \forall g\in G \tag{81}$$

که درآن X و P به صورت نمادین به جای تمام مولفه های مکان و تکانه به کار رفته اند و منظور از gX و gP تبدیل یافته های X و P تحت g هستند. اما می دانیم که $gX=U^{1}(g)XU(g)$ و $gP=U^{-1}(g)PU(g)$ که درآن $U(g)$ نمایش g در فضای هیلبرت است. اثبات این دو رابطه سرراست است. برای نمونه به رابطه‌ی اول توجه می کنیم. می دانیم که

$$x'=gx \tag{82}$$

بنابراین نمایش عمل g که آن را با $U(g)$ نشان می دهیم می بایست به طریق زیر عمل کند:

$$U(g)|x\rangle=|x'\rangle, \tag{83}$$

با اثر عملگر X روی طرفین داریم

$$XU(g)|x\rangle=x'|x'\rangle, \tag{84}$$

و یا

$$XU(g)|x\rangle=x'U(g)|x\rangle, \tag{85}$$

و یا

$$U^\dagger(g)XU(g)|x\rangle=x'|x\rangle \tag{86}$$

در رابطه بالا x' یک ویژه مقدار است و رابطه تابعی آن با x به صورت $x'=g(x)$ است (مثلاً $x'=x\cos\theta+y\sin\theta$). بنابراین می توان نوشت

$$x'|x\rangle=g(x)|x\rangle=g(X)|x\rangle \tag{87}$$

و درنتیجه با ترکیب آن با رابطه قبلی

$$U^\dagger(g)XU(g)|x\rangle=g(X)|x\rangle \tag{88}$$

و از آنجا که این رابطه برای هر بردار پایه‌ای مثل $|x\rangle$ برقرار است به این نتیجه می رسیم که $U^\dagger(g)XU(g)|x\rangle = g(X)$ که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم. اثبات مشابهی برای $U^\dagger(g)PU(g)|x\rangle = g(P)$ برقرار است.
بنابراین

$$H(X,P) = H(U^{-1}(g)XU(g), U^{-1}(g)PU(g)). \tag{89}$$

هرگاه H بسط تایلور داشته باشد که معمولاً چنین است نتیجه می گیریم که

$$H = U^{-1}(g)HU(g) \tag{90}$$

ویا .

$$[H, U(g)] = 0$$

بنابر این هرگاه یک سیستم تحت تبدیلات گروه G دارای تقارن باشد، هامیلتونی آن سیستم با عملگرهایی که آن گروه را روی فضای هیلبرت نمایش می دهند جابجا می شود. در حالتی که گروه G یک گروه پیوسته با پارامترهای θ_i و مولدهای T_i باشد، رابطه‌ی $[H, U(g)] = 0$ به صورت زیر در می آید

$$[H, e^{\theta_i \mathcal{T}_i}] = 0, \tag{91}$$

که در آن $\mathcal{T}_i$ نمایش مولدِ T_i روی فضای هیلبرت است. از آنجا که این رابطه برای همه‌ی θ_i ها برقراراست نتیجه می گیریم که

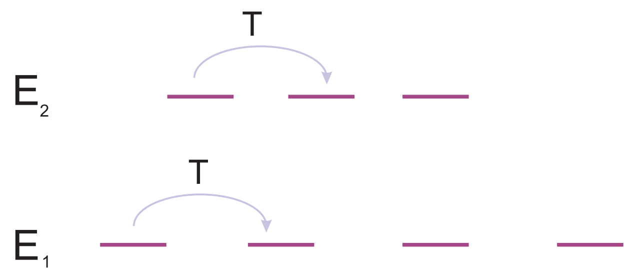
$$[H, \mathcal{T}_i] = 0, \tag{92}$$

یعنی اینکه وجود تقارن به معنای آن است که هامیلتونی با مولدهای گروه تقارن یا به عبارت بهتر با نمایش آنها در فضای هیلبرت جابجا می شود.

۵ نتایج تقارن

دیدیم که هرگاه یک سیستم دارای تقارن گروه G باشد، آنگاه رابطه 92 برقراراست. از این رابطه چند نتیجه مهم فیزیکی می توان گرفت.

نتیجه اول: واگنی مولدهای T_i لزوماً با هم جابجا نمی شوند. ولی می توان زیرمجموعه‌ای از آنها انتخاب کرد که باهم جابجا شوند. این زیر مجموعه را با $K_1, K_2, \cdots K_r$ نشان می دهیم. در نتیجه مجموعه‌ی عملگرهای هرمیتی $\{H, K_1, \cdots K_r\}$



شکل ۸: یک مولد تقارن روی یک حالت انرژی آن را به ویژه حالت های دیگری در همان زیرفضای واگن تبدیل می کند.

همه باهم جابجا می شوند. این امر به معنای این است که می توان برای آنها ویژه بردارهای مشترک پیدا کرد، یعنی ویژه بردارهایی مثل $|E, k_1, k_2, \dots k_r\rangle$ که هم انرژی مشخص دارند و هم ویژه مقدارهای مشخص برای عملگرهای K_i. دراین صورت اعدادِ k_1 تا k_r را اعداد کوانتومی ای می خوانیم که علاوه بر انرژی E ، یک ویژه حالت را تعیین می کنند:

$$H|E, k_1, \cdots k_r\rangle = E|E, k_1, \cdots k_r\rangle, \qquad K_i|E, k_1, \cdots k_r\rangle = k_i|E, k_1, \cdots k_r\rangle. \tag{93}$$

از آنجا که K_i ها هرمیتی هستند، عموماً نشان دهنده مشاهده پذیرهای فیزیکی هستند. بنابراین حالت های $|E, k_1, \cdots k_r\rangle$ نشان دهنده حالت های فیزیکی ای هستند که در آنها نه تنها انرژی سیستم مقدار معینی دارد، بلکه تمام مشاهده پذیرهای $K_1, \cdot K_r$ نیز مقادیر معینی دارند. به بیان دیگر تمام حالت هایی که دارای اعداد کوانتومی متفاوت k_i هستند دارای یک انرژی هستند و بنابراین طیف انرژی دارای واگنی است. این واگنی یک نتیجه مهم تقارن است. (شکل ِ۸). حال مولد دیگری از گروه تقارن را که در مجموعه‌ی $\{K_1, \cdots K_r\}$ قرار ندارد در نظر می گیریم . این عملگر را با T نشان داده و آن را روی یکی از ویژه حالت های واگن مثل

$$|E, k_1, k_2, \cdots k_r\rangle \tag{94}$$

اثر می دهیم. حالت جدید عبارت است از

$$|\psi\rangle := T|\phi\rangle = T|E, k_1, k_2, \cdots k_r\rangle. \tag{95}$$

از آنجا که داریم $[H, T] = 0$، براحتی معلوم می شود که $|\psi\rangle$ بازهم یک ویژه حالت هامیلتونی با همان انرژی E است زیرا

$$H|\psi\rangle = HT|E, k_1, \cdots k_r\rangle = TH|E, k_1, \cdots k_r\rangle = ET|E, k_1, \cdots k_r\rangle = E|\psi\rangle, \tag{96}$$

اما از آنجا که $[T, K_i] \neq 0$، نتیجه می گیریم که حالت ِ$|\psi\rangle$ دیگر همان ویژه مقدارهای k_i را ندارد بلکه این ویژه مقدارها تغییر کرده اند. نتیجه آن است که حالت $|\psi\rangle$ همچنان در زیر فضای واگن مربوط به انرژی E باقی می ماند. به این ترتیب می بینیم که حالت های واگن ِمربوط به یک ویژه مقدار انرژی تحت اثر تمام مولدهای تقارن به ترکیبی از خودشان تبدیل می شوند. یعنی مولدهای تقارن یک زیرفضای واگن را به یک زیر فضای واگن دیگر نمی نگارند. به عبارت بهتر زیرفضای واگن مربوط

به یک ویژه مقدار انرژی تحت اثر مولدهای تقارن به خودش نگاشته می شود. این اتفاق برای همه زیر فضاهای انرژی می افتد ۸. این نکته خیلی مهم است که دقت کنیم وجود تقارن در یک سیستم فیزیکی تنها به این معناست که هامیلتونی آن تحت تبدیلات تقارنی تغییر نمی کند یعنی $H(X,P) = H(U(g)XU^\dagger(g), U(g)PU^\dagger(g))$ نه این که ویژه حالت های آن متقارن باشند. یعنی خاصیت

$$U(g)|\psi\rangle = |\psi\rangle \tag{97}$$

همیشه وجود ندارد، زیرا همانطور که در بالا نشان دادیم اگر یک لایه واگنی داشته باشد، اثر $U(g)$ روی یک حالت آن را به ترکیبی از حالت های دیگر تبدیل می کند. مثلاً اگر یک سیستم دارای تقارن دورانی باشد، مثل اتم هیدروژن، معنایش این نیست که شکل ویژه توابع انرژی نیز دارای تقارن دورانی است. این اتفاق، یعنی متقارن بودن ویژه تابع انرژی تنها در صورتی می افتد که آن ویژه تابع واگن نباشد. از آنجا که در بسیاری از مسائل حالت پایه واگن نیست، حالت پایه دارای تقارن هامیلتونی نیز هست.

نتیجه دوم: کمیت های بایسته از رابطه‌ی 92 نتیجه می گیریم که

$$[U(t), K_i] = 0$$

که درآن $U(t)$ عملگر تحول سیستم است. از رابطه اخیر می توان نتیجه گرفت که ارزش انتظاری مشاهده پذیرهای K_i با زمان تغییر نمی کند، به عبارت دیگر K_i ها ثابت حرکت اند یا کمیت های پایسته هستند. دلیل این امر آن است که:

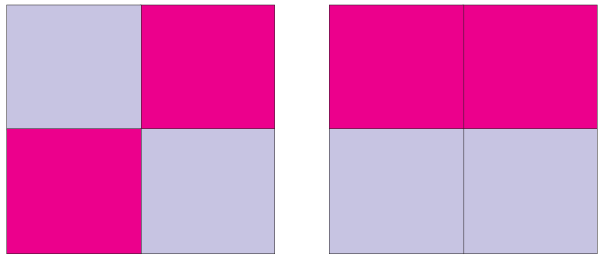
$$\langle K_i\rangle(t) = \langle\psi(t)|K_i|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|U^\dagger(t)K_iU(t)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|K_i|\psi(0)\rangle = \langle K_i\rangle(0). \tag{98}$$

دراین فصل با مفهوم تبدیلات تقارنی ، نحوه نمایش دادن این تبدیلات در یک فضای هیلبرت و هم چنین مفهوم تقارن و نتایج آن در مکانیک کوانتومی آشنا شدیم. در فصل بعد به یکی از مهمترین تقارن ها یعنی تقارن دورانی در دو بعد می پردازیم و آن را نسبتاً به تفصیل مطالعه می کنیم.

۶ مسئله ها

۱ — یک گروه تبدیلات به شکل $Z_3 := \{e, a, a^2 \mid a^3 = e\}$ را در نظر بگیرید. این گروه سه نمایش غیرمعادل یک بعدی دارد. این سه نمایش را به دست آورید. (راهنمایی: در نمایش یک بعدی به هر عضو گروه یک عدد نسبت داده می شود.)
برای این گروه یک نمایش سه بعدی نیز بدست آورید.

۲ — گروهی که در مسئله یک با آن آشنا شدید، می تواند گروه تبدیلات یک شی دوبعدی باشد که درآن a دوران حول محور عمود برصفحه شی به اندازه ۱۲۰ درجه است. سه شکل متفاوت رسم کنید که گروه تقارن آنها گروه فوق باشد.



شکل ۹: این شکل ها تحت چه تبدیلاتی دارای تقارن هستند؟

۳ – شکل ۹ را در نظر بگیرید. گروه‌های تقارن شی سمت چپ و شی سمت راست را پیدا کنید.

۴ – سوال ۳ را برای اشکال نشان داده شده در ۱۰ نیز پاسخ دهید.

۵ – سوال ۳ را برای شکل نشان داده شده در ۱۱ نیز پاسخ دهید.

۶ – تقارن یک شی فیزیکی با گروه $Z-3=\{e,a,a^2,\ |\ a^3=e\}$ تعیین می‌شود. فرض کنید که توصیف کوانتومی این شکل (یا درجات آزادی بخصوصی از آن) در یک فضای هیلبرت مختلط دو بعدی انجام می شود. مشاهده پذیر A با عملگر هرمیتی زیر توصیف می شود:

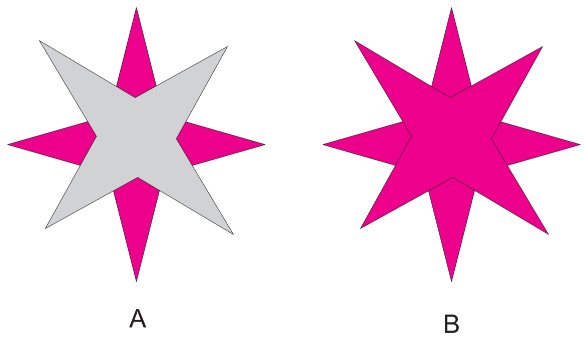
$$A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}. \tag{99}$$

حالت اولیه شی نیز عبارت است از:

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{100}$$

الف: اگر نمایش گروه در فضای هیلبرت برابر باشد با :

$$U(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} \tag{101}$$



شکل ۱۰: این شکل ها تحت چه تبدیلاتی دارای تقارن هستند؟

حالت شی را بعد از آن که دو بار عمل تقارنی a را روی آن انجام می دهیم پیدا کنید. هم چنین متوسط مشاهده پذیر A را قبل از عمل و بعد از عمل پیدا کنید.

ب : اگر نمایش گروه در فضای هیلبرت برابر باشد با :

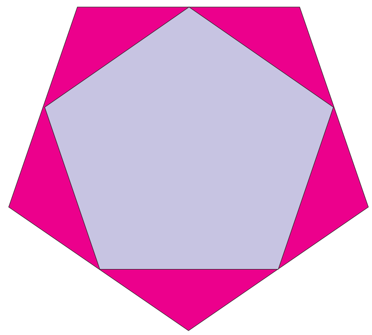
$$U(a) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \tag{102}$$

حالت شی را بعد از آن که دو بار عمل تقارنی a را روی آن انجام می دهیم پیدا کنید. هم چنین متوسط مشاهده پذیر A را قبل از عمل و بعد از عمل پیدا کنید.

۷ ضمیمه: گروه تبدیلات مقیاس

دراین ضمیمه گروه تبدیلات مقیاس را مطالعه می کنیم. این گروه درحال حاضر برای فهم پدیده‌های کوانتومی ای که دراین درس با آنها آشنا می شویم ضروری نیست . گروهی از تبدیلات را در نظر می گیریم که در آن ها یک شکل را به اندازه ضریب $\lambda > 0$ بزرگ یا کوچک می کنیم. بهتر است که پارامتر λ را به صورت e^η نشان دهیم که همواره عددی مخالف صفر است. با این پارامتر بندی $\eta = 0$ متناظر با تبدیل همانی است. شکل ۲۱ نمونه‌ای هایی از این تبدیل ها را نشان می دهد. هر تبدیلی از این نوع را با S_η نشان می دهیم و اثر این تبدیل چنین است:

$$S_\eta : r \longrightarrow r' = e^\eta r. \tag{103}$$



شکل ۱۱: این شکل تحت چه تبدیلاتی دارای تقارن است؟

در بعضی از موارد برای سادگی از پارامتر $\lambda = e^{\eta}$ نیز استفاده می کنیم.

باید یادآور شویم که قوانین فیزیک عموماً چنین تقارنی ندارند. اگر چنین تقارنی وجود می داشت به این معنی بود که پدیده های جهان فیزیکی می توانستند در هر بعدی وجود داشته باشند . خوشبختانه چنین نیست و اشیای مختلف هرکدام اندازه های معینی دارند. اگر چنین تقارنی وجود می داشت آنگاه مورچگان، آدم ها و درختانی از هر سایز ممکن می داشتیم که خوشبختانه چنین نیست. با این وجود بعضی پدیده‌های فیزیکی هستند که در محدوده معینی چنین تقارنی از خود نشان می دهند، نظیر آنچه که در مورد فراکتال ها می بینیم.
در این مثال می خواهیم نمایش این تبدیلات را روی فضای هیلبرت یک ذره پیدا کنیم.
تا کنون باید دانشجو روش استاندارد را برای یافتن نمایش ها فراگرفته باشد. به همین دلیل محاسبات بعدی را به اختصار می نویسیم.
مثل همیشه به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$|r'\rangle = U(S_\eta)|r\rangle, \tag{104}$$

و از آنجا

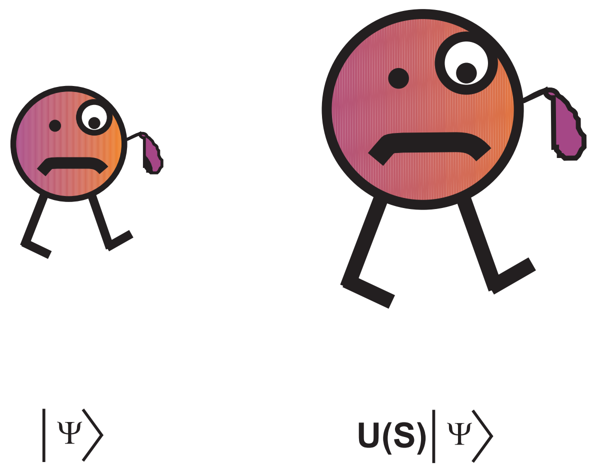
$$X_i|r'\rangle = X_iU(S_\eta)|r\rangle, \;\longrightarrow\; x'_i|r'\rangle = X_iU(S_\eta)|r\rangle \tag{105}$$

و یا

$$e^{\eta}x_iU(S_\eta)|r\rangle = X_iU(S_\eta)|r\rangle \tag{106}$$

و یا

$$e^{\eta}X_i|r\rangle = U^{-1}(S_\eta)X_iU(S_\eta)|r\rangle. \tag{107}$$



شکل ۲۱: عملگرتبدیل مقیاس.

که از آن نتیجه می گیریم

$$U^{-1}(S_\eta)X_iU(S_\eta) = e^\eta X_i. \tag{108}$$

برای پیداکردن $U(S_\eta)$ قرار می دهیم $U(S_\eta) = e^{-i\eta\mathcal{S}}$ و تبدیلات بی نهایت کوچک را نیز در نظر می گیریم که در این صورت $U \approx I - i\eta\mathcal{S}$ و $U^{-1} \approx I + i\eta\mathcal{S}$. درنتیجه رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$[\mathcal{S}, X_i] = -iX_i. \tag{109}$$

براحتی معلوم می شود که عملگر $\mathcal{S}$ برابر است با

$$\mathcal{S} = (X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3) \tag{110}$$

بنابراین تبدیل مقیاس در فضای هیلبرت با عملگر زیر نمایش داده می شود:

$$U(S_\eta) = e^{-i\eta X\cdot P}. \tag{111}$$

حال سوال می کنیم که اثر این عملگر روی ویژه حالت های تکانه چیست؟ برای پاسخ به این سوال به ترتیب زیر عمل می کنیم. با توجه به اینکه $(\mathbf{r}' = \lambda\mathbf{r} = e^\eta\mathbf{r})$ و اینکه $\langle r|p\rangle = \langle\lambda r|\frac{1}{\lambda}p\rangle$ می نویسیم

$$U(S_\lambda)|p\rangle = U(S_\lambda)\int d^3r|r\rangle\langle r|p\rangle = \int d^3r|\lambda r\rangle\langle r|p\rangle = \int d^3r|\lambda r\rangle\langle\lambda r|\frac{1}{\lambda}p\rangle, \tag{112}$$

با قراردادن $r' = \lambda r$ و توجه به اینکه $d^3r' = \lambda^3d^3r$، طرف راست عبارت خواهد بود از

$$U(S_\lambda)|p\rangle = \lambda^{-3}\int d^3r'|r'\rangle\langle r'|\frac{1}{\lambda}p\rangle = \lambda^{-3}|\frac{1}{\lambda}p\rangle. \tag{113}$$

در بعد دلخواه d خواهیم داشت

$$U(S_\lambda)|p\rangle = \lambda^{-d}|\frac{1}{\lambda}p\rangle. \tag{114}$$