# درس نهم: اندازه حرکت زاویه ای وتقارن دورانی دردوبعد

در درس گذشته با سه مفهوم مرتبط با تقارن آشنا شدیم، اول اینکه تبدیل تقارنی چیست؟ دوم اینکه تبدیل تقارنی در فضای هیلبرت چگونه نمایش داده می شود، و بالاخره اینکه متقارن بودن یک سیستم فیزیکی به چه معناست و چه نتایجی در بردارد. دراین درس می خواهیم به یکی از مهمترین تقارن هایعنی تقارن دوران در دو بعد بپردازیم. نخست ذره ای در نظر می گیریم که در یک صفحه دوبعدی حرکت می کند و هامیلتونی آن تحت دوران حول یک محور عمود براین صفحه متقارن است. هرگاه محوری که تقارن دورانی حول آن وجود دارد محور $z$ باشد، مولفه سوم تکانه زاوی ای مولد دوران خواهد بود. بنابراین مطابق با آنچه که در فصل پیشین دیدیم رابطه زیر برقراراست:

$$[L_z, H] = 0, \tag{1}$$

به عبارت دیگر هامیلتونی با مولفه سوم تکانه زاویه ای که مولد دوران است جابجامی شود. (به عنوان یک تمرین خواننده می تواند صحت تساوی بالا را تحقیق کند.) دراینجا بهتراست بیشتر با خواص تکانه زاویه ای در دو بعد آشنا شویم.

## ۱ تکانه زاویه ای دردوبعد

برای ذره ای که دردوبعد حرکت می کند یک مشاهده پذیرمهم اندازه حرکت زاویه ای است. این مشاهده پذیر با عملگرهرمیتی زیر تعریف می شود:

$$L_z := XP_y - YP_x. \tag{2}$$

درپایه مختصات این عملگر به صورت زیر درمی آید

$$L_z = XP_y - YP_x = -i(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) = -i\frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{3}$$

که درتساوی آخر مختصات قطبی به کاررفته است .

خوب است که تعویض گرتکانه زاویه ای را با مولفه های مکان و تکانه پیداکنیم. محاسبه ساده ای نشان می دهد که روابط زیربرقرارند:

$$[L_z, X] = i\hbar Y, \qquad [L_z, Y] = -i\hbar X, \tag{4}$$

و

$$[L_z, P_x] = i\hbar P_y, \qquad [L_z, P_y] = -i\hbar P_x. \tag{5}$$

هم چنین یک محاسبه ساده نشان می دهد که:

$$[L_z, \vec{r}\cdot\vec{r}] = [L_z, r^2] = 0, \qquad [L_z, \vec{P}\cdot\vec{P}] = [L_z, P^2] = 0. \tag{6}$$

علاوه براین براحتی می توان نشان داد که رابطه زیربرقراراست:

$$L_z^2 = r^2P^2 - (\vec{r}\cdot\vec{P})^2, \tag{7}$$

که درآن $r^2 = X^2 + Y^2$ و $P^2 = P_x^2 + P_y^2$.

تمرین: درستی روابط 6 و 7 را نشان دهید.

## ۱.۱ طیف تکانه زاویه ای

دراین بخش می خواهیم ویژه مقدارها و ویژه توابع تکانه زاویه ای راپیداکنیم. می دانیم که درپایه مختصات و برحسب مختصات قطبی تکانه زاویه ای به صورت $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ درمی آید. بنابراین معادله ویژه مقداری برای این عملگر به صورت زیرنوشته می شود:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(r,\theta) = \lambda\phi(r,\theta). \tag{8}$$

ازآنجا که عملگر به $r$ بستگی ندارد نتیجه می گیریم که اگر $\chi(\theta)$ یک ویژه تابع $L$ باشد، آنگاه $\phi(r,\theta) = f(r)\chi(\theta)$ برای $f$ دلخواه نیز یک ویژه تابعِ تکانه زاویه ای است. بنابراین طیف تکانه زاویه ای یک واگنی بی نهایت بعدی دارد. توجه خود را به تابع $\chi(\theta)$ معطوف می کنیم. معادله دیفرانسیل مربوطه به صورت ساده زیردرمی آید

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\theta}\chi(\theta) = \lambda\chi(\theta), \tag{9}$$

که حل آن بسادگی تعیین می شود: $\chi(\theta) = Ae^{\frac{i\lambda}{\hbar}\theta}$ که درآن $A$ یک ثابت است. ازآنجا که تابع $\chi(\theta)$ می بایست تک مقداری باشد یعنی درشرط $\chi(\theta) = \chi(\theta + 2\pi)$ صدق کند معلوم می شود که $\lambda$ تنها مقادیر مشخصی را می بایست اختیارکند. درواقع می بایست داشته باشیم

$$\lambda = \hbar\, m, \qquad \chi_m(\theta) = Ae^{im\theta}, \longrightarrow \phi(r,\theta) = f(r)e^{im\theta}. \tag{10}$$

رابطه اخیرنشان می دهد که مقادیرتکانه زاویه ای یک ذره دردوبعد تنها می توانند مضرب صحیحی از $\hbar$ باشند. هم چنین درفضای توابع روی صفحه دوبعدی $(r,\theta)$ این ویژه مقدار واگنی بی نهایت بعدی دارد، اما درفضای توابع روی یک دایره واگنی وجود ندارد.

دراینجا برای اولین بار با کوانتش تکانه زاویه ای مواجه می شویم که بطور تاریخی نخستین بار به صورت اصل موضوع درمدل اتمی بوهر پیشنهاد شد.

حال که با تکانه زاویه‌ای و طیف آن آشنا شده‌ایم می خواهیم ببینیم چگونه وجود تقارن دورانی در دوبعدی می تواند به حل معادله شرودینگر کمک کند.

نشان دهید که اگر برای پتانسیلی که دارای تقارن دورانی است، تابع موج کامل در دوبعد را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\psi(r,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}u(r)e^{im\phi} \tag{11}$$

آنگاه تابع موج شعاعی یعنی $u(r)$ در شرط بهنجارش زیر صدق می کند:

$$\int dr \mid u(r) \mid^2 = 1. \tag{12}$$

آیا تابع موج $u(r)$ می تواند در $r$ های بزرگ به صورت $u(r) \longrightarrow \frac{1}{r^{1/2}}$ به سمت صفر میل کند؟

# ۲ حل معادله شرودینگر برای پتانسیل هایی که دارای تقارن دورانی دو بعدی هستند

هرگاه پتانسیل فقط به اندازه $r$ از مبدأ بستگی داشته باشد، هامیلتونی دارای تقارن کروی است. چنین هامیلتونی دارای فرم زیراست

$$\frac{P^2}{2m} + V(r). \tag{13}$$

دقت کنید که جرم ذره را با $m$ نشان داده ایم.

بنابر روابط 6 داریم

$$[L_z, H] = 0, \tag{14}$$

به عبارت دیگر هامیلتونی با عملگری که مولد دوران است جابجامی شود. حال می بایست ازاین تقارن استفاده کنیم. نخستین استفاده ای که می کنیم آن است که می توانیم طیف مشترک هامیلتونی و عملگردوران را پیداکنیم. می دانیم که طیف $L$ ساده است، هرتابعی به صورت $f(r)e^{in\theta}$ یک ویژه تابع $L$ با مقدار ویژه $\hbar\ n$ است. ازرابطهٔ 7 نیز استفاده می کنیم و درهامیلتونی $P^2$ را برحسب تکانه زاویه ای می نویسیم. نتیجه به صورت زیردرمی آید:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{L_z^2 + (\vec{r}\cdot\vec{P})^2}{r^2}\right) + V(r) \tag{15}$$

ویا درپایه مختصات و باتوجه به اینکه $\vec{r}\cdot\vec{P} = \frac{\hbar}{i} r\partial_r$ و باقراردادن $\hbar = 1$ ،

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{-\partial_\theta^2 - (r\partial_r)^2}{r^2}\right) + V(r) \tag{16}$$

حال اثر $H$ روی هر ویژه تابع تکانه زاویه ای به فرم $\phi(r,\theta) = f(r)e^{in\theta}$ به صورت زیردرمی آید:

$$H\ f(r)e^{in\theta} = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{(n^2 - (r\partial_r)^2}{r^2}\right) + V(r)\right] f(r)e^{i\ n\theta} \tag{17}$$

بنابراین تابع $\phi_{E,n}(r,\theta) = f_{E,n}(r)e^{i\ n\theta}$ ویژه تابع هامیلتونی با ویژه مقدار $E$ نیزهست اگر $f_{E,n}(r)$ درمعادله زیرصدق کند:

$$-\frac{1}{2m}\left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) + V_{eff}(r)f_{E,n}(r) = Ef_{E,n}(r) \tag{18}$$

که درآن

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{n^2}{2mr^2}, \tag{19}$$

پتانسیل موثرخوانده می شود که درآن جمله $\frac{n^2}{2mr^2}$ نشان دهندهٔ تمایل حالت هایی بااندازه حرکت غیرصفر به دورشدن از مرکز است. این معادله معادله شعاعی شرودینگرنامیده می شود.

**تذکر: دقت کنید که این موضوع که تابع موج به صورتِ $f_{E,n}(r)e^{in\theta}$ نوشته شده است این امر را انعکاس می دهد که ما توانسته ایم ویژه حالت های مشترک انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای را معین کنیم. از این به بعد تنها برای سادگی نوشتاری از نوشتن شاخص های $E, n$ برای $f$ مگر در مواقع ضروری اجتناب می کنیم.**

می توانیم این معادله را به شکل دیگری نیزبنویسیم که شباهت آن به معادله شرودینگر یک بعدی بیشترشود. برای این کار تابع $f(r)$ را به شکل $f(r) =: \frac{u(r)}{r^{\frac{1}{2}}}$ می گیریم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که برحسب $u(r)$ معادله شعاعی به شکل زیردرمی آید:

$$[\frac{-1}{2m}\partial_r^2 + \tilde{V}_{eff}(r)]u(r) = Eu(r). \tag{20}$$

که درآن پتانسیل موثراین باربه شکل زیردرمی آید

$$\tilde{V}_{eff}(r) = V(r) + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{2mr^2}. \tag{21}$$

# ۳ ذره آزاد در دوبعد

نخستین و مهمترین مثالی را که باید بررسی کنیم، ذره آزاد است. در درسهای گذشته دیدیم که هامیلتونی یک ذره آزاد به صورت $H = \frac{P^2}{2m}$ است. این هامیلتونی هم دارای تقارن انتقالی و هم دارای تقارن دورانی است.
**تمرین:** نشان دهید که این پتانسیل دارای چنین تقارن هایی است.

بنابراین روابط جابجایی زیر برقرارا‌ست:

$$[H, P_x] = 0, \qquad [H, P_y] = 0, \qquad [H, L_z] = 0. \tag{22}$$

دراین بخش ویژه حالت های این هامیلتونی را بدست می آوریم. نوع این ویژه حالت ها بستگی دارد به این که ما ویژه حالت های هامیلتونی را با کدام یک ازمشاهده پذیرهای دیگری که با آن جابجا می شوند پیدا می کنیم و به کدام یک از تقارن های آن توجه کنیم.

## ۱.۳ امواج تخت

هامیلتونی ذره آزاد را در نظر می گیریم.

$$H = \frac{1}{2m}P^2 = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2). \tag{23}$$

این هامیلتونی با مشاهده پذیرهای $P_x$ و $P_y$ یا به عبارت بهتر با مشاهده پذیر تکانه $\mathbf{P}$ جابجامی شود. حالت های $|\vec{p}\rangle = |p_x, p_y\rangle$ که تابع موج فضایی آنهابه شکل امواج تخت ِ

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i\frac{1}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{24}$$

است ویژه حالت مشترک مشاهده پذیرهای $P_x$ و $P_y$ ودرنتیجه $H$ است. این حالت ها انرژی $E_p = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m}$ دارند. چنین حالت هایی تکانه خطی مشخص و انرژی مشخص دارند ولی تکانه زاویه‌یی آنها مشخص نیست. در فضای بی نهایت این طیف انرژی پیوسته است و واضح است که طیف انرژی واگنی بی نهایت دارد زیرا تمام حالت هایی که اندازه تکانه ی آنها باهم برابراست یک انرژی دارند. یادآوری می کنیم که $H$ یک مشاهده پذیرمستقل از $P_x$ و $P_y$ نیست وبرحسب آنها نوشته می شود. این ویژه حالت ها یک پایه برای فضای هیلبرت یک ذره تشکیل می دهند و ما می توانیم هر حالت دیگری از این فضای هیلبرت را برحسب آنها بسط دهیم.

## ۲.۳ امواج دایره‌ای

دربعضی مواقع ترجیح مثلاً وقتی که پراکندگی ذرات رااز پتانسیل های باتقارن دایره ای بررسی می کنیم، ترجیح می دهیم که حالت های ذره آزاد را چنان بنویسیم که اندازه حرکت زاویه‌ای آنها مشخص باشد. ازنظرفیزیکی توابع موج این حالت ها امواج دایره‌ای است که ازمبدأ مختصات دورمی شوند و یا به آن نزدیک می شوند. برای این کار بجای مشاهده پذیرهای $P_x$ و $P_y$، مشاهده پذیرهای $L^2$ و $H$ را که باهم جابجامی شوند قطری می کنیم. حالت های حاصل که با $|E, n\rangle$ مشخص می شوند دارای انرژی مشخص و تکانه زاویه ای مشخص هستند. اگرتابع موج آنهارا با

$$\psi(r,\theta) = \frac{u(r)}{\sqrt{2\pi r}} e^{i\ n\theta} \tag{25}$$

نشان دهیم همانطورکه درابتدای این بخش نشان دادیم تابع $u_{E,n}(r)$ درمعادله شعاعی شرودینگر زیرصدق می کند: مشاهده پذیراست زیرا:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right)u = Eu, \tag{26}$$

که با تعریف ِ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ و $x = kr$ به شکل زیردرمی آید:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)u = -u. \tag{27}$$

برای حل این معادله نخست به رفتار مجانبی آن 27 در $x$ های بزرگ نگاه می کنیم. در این حد معادله فوق به شکل زیر در می آید:

$$\frac{d^2}{dx^2}u + u \approx 0, \tag{28}$$

که جواب های آن به شکل $u=e^{ix}$ و $u=e^{-ix}$ هستند. بنابراین جواب های این معادله در فواصل بزرگ به صورت امواج دور شونده $e^{ikx}$ و نزدیک شونده $e^{-ikx}$ به مرکز هستند. حال جواب های کامل را به شکل زیر می نویسیم:

$$u^+(x) = e^{ikx}\sum_{n=0}^{\infty} a_k^+ x^{-k},$$
$$u^-(x) = e^{-ikx}\sum_{n=0}^{\infty} a_k^- x^{-k}. \tag{29}$$

جایگذاری این بسط ها درمعادله 27 منجربه روابط تکرارزیرمی شود:

$$\begin{aligned} a_{k+1}^+ &= \frac{k(k+1)+\frac{1}{4}-n^2}{2i(k+1)}a_k^+, \\ a_{k+1}^- &= -\frac{k(k+1)+\frac{1}{4}-n^2}{2i(k+1)}a_k^-. \end{aligned} \tag{30}$$

چند جمله اول بسط به ترتیب زیرهستند:

$$u^+(x) = \left(1+\frac{(\frac{1}{2})^2-n^2}{2i}\frac{1}{x}+\cdots\right)e^{ix} \tag{31}$$

و

$$u^-(x) = \left(1-\frac{(\frac{1}{2})^2-n^2}{2i}\frac{1}{x}+\cdots\right)e^{-ix} \tag{32}$$

که درآنهاازنوشتن ضریب بهنجارش صرف نظرکرده ایم.
**تمرین:** سه جمله‌اول این دو بسط را بدست آورید.

درنتیجه شکل نهایی توابع موج به صورت زیرخواهد بود:

$$\psi_{E,n}^+(r,\theta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi r}}(1+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{2ikr}+\cdots)e^{ikr}e^{in\theta}, \qquad n\in Z, \tag{33}$$

و

$$\psi_{E,n}^-(r,\theta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi r}}(1-\frac{\frac{1}{4}-n^2}{2ikr}+\cdots)e^{-ikr}e^{in\theta} \qquad n\in Z. \tag{34}$$

که درآن $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ انرژی این حالت ها و $\hbar n$ تکانه زاویه آنهاست. تابع $\psi^+$ نشان دهنده یک موج دایره ای دورشونده ازمرکز و تابع $\psi^-$ نشان دهنده یک موج دایره ای نزدیک شونده به مرکزاست. دقت کنید که عددکوانتومی $n$ تکانه زاویه‌ای جواب ها را مشخص می کند که مثبت بودن آن به معنای تکانه زاویه‌ای پادساعت گرد و منفی بودن آن به معنای تکانه زاویه‌ای ساعت گرد است. هرکدام از جواب های فوق دارای انرژی مشخص $E$ و تکانه زاویه‌ای $n\hbar$ است.

## ۳.۳ توابع بسل

دراینجا یک بار دیگر به معادله شرودینگر برای ذره آزاد نگاه می کنیم. از آنجا که پتانسیل برابر با صفراست این معادله به شکل زیر در می آید:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx}+(1-\frac{n^2}{x^2})f(x)=0 \tag{35}$$

که درآن $x=kr$ و $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$. این معادله یک معادله آشنا موسوم به معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه‌ی $n$ است و در قرن نوزدهم به وسعت مورد مطالعه قرار گرفته است. در ضمیمه این فصل می توانید با خواص این توابع بیشتر آشنا شوید. دو جواب مستقل از معادله فوق را با $J_n(x)$ و $N_n(x)$ نشان می دهیم . بنابراین جواب های معادله شرودینگر با انرژی $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ و تکانه زاویه‌ای $\hbar n$ به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\psi^{(1)}(r,\theta)=J_n(kr)e^{in\theta}, \qquad \text{و}, \qquad \psi^{(2)}(kr)=N_n(kr)e^{in\theta}. \tag{36}$$

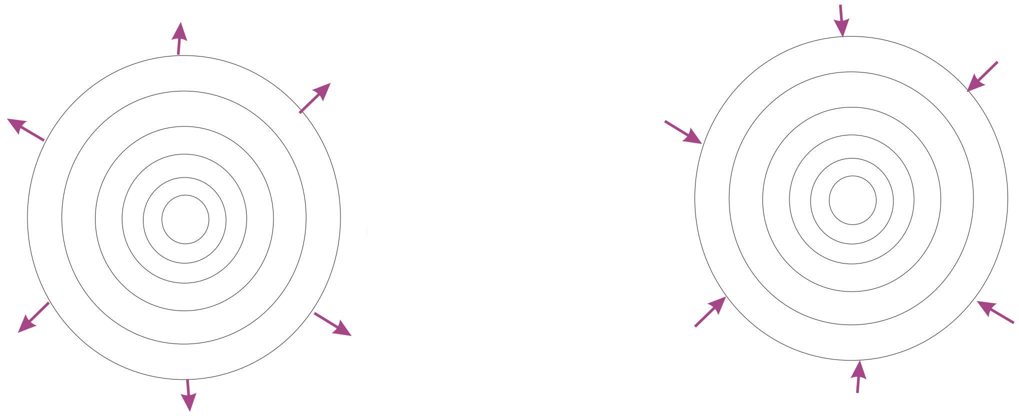
می توان نشان داد که برای $kr$ های بزرگ شکل این توابع به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}J_n(kr)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left[kr-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]\\ N_n(kr)&\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin\left[kr-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right].\end{aligned} \tag{37}$$

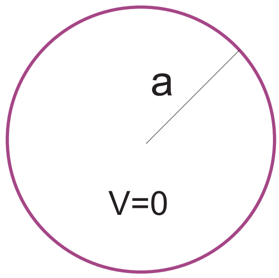
**تمرین:** نشان دهید که برای $r$ های بزرگ این دو تابع در معادله دیفرانسیل بسل صدق می کنند. منظور از $r$ های بزرگ آن است که $kr>>1$ باشد.

می توان بجای این دو جواب مستقل از معادله بسل ترکیب های خطی زیر را از این دو تابع که به توابع هنکل $Hankel Functions$ موسومند در نظر گرفت:

$$H_n^1(kr):=J_n(kr)+iN_n(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}exp\ i\left[kr-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]$$



شکل ۱: شکل سمت راست یک موج دایره‌ای درون رو و شکل سمت چپ یک موج دایره‌ای برون رو را نشان می دهد.




شکل ۲: چاه پتانسیل دایره‌ای. در درون چاه پتانسیل برابر با صفر و روی دیواره ها بی نهایت است. تابع موج روی دیواره ها می بایست برابر با صفرباشد.

$$H_n^1(kr) := J_n(kr) - iN_n(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} exp - i\left[kr - (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]. \tag{38}$$

بااین حساب توابع موجی که بدست می‌آوریم نشان دهنده موج های بیرون رو و درون رو خواهند بود، شکل (۱)

## ۴ چاه پتانسیل دایره ای

در درس های پیشین چاه دایره‌ای مربعی را بررسی کردیم. دراین درس یک چاه پتانسیل دایره ای (۲) را به شکل زیردرنظرمی گیریم:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \\ \infty & r > a \end{cases} \tag{39}$$

درداخل چاه می بایست معادله شرودینگررابرای ذره آزاد حل کنیم بااین شرط مرزی که دردیواره های پتانسیل تابع موج برابرباصفرباشد.

برای ذره آزاد پتانسیل $V$ برابرباصفراست ودرنتیجه معادله شعاعی شرودینگر برای داخل چاه به صورت زیردرمی آید:

$$-\frac{1}{2m}\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) + \frac{n^2}{2mr^2} f(r) = E f(r). \tag{40}$$

با تعریف $k := \sqrt{2mE}$ و پس ازمرتب کردن به صورت زیردرمی آید:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + (k^2 - \frac{n^2}{r^2}) f(r) = 0. \tag{41}$$

باتعریف متغیربدون بعد $x := kr$ این معادله به شکل نهایی زیردرمی آید که چیزی نیست جزمعادله بسل از مرتبه صحیحِ $n$:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} + (1 - \frac{n^2}{x^2}) f(x) = 0. \tag{42}$$

خواننده می تواند بعضی از خواص جواب های این معادله را درضمیمه این فصل مطالعه کند. این معادله دوجواب عمومی دارد که آن ها را با $J_n(x)$ و $N_n(x)$ نشان می دهیم. تابع $N_n(x)$ موسوم به تابع نیومان در $x \longrightarrow 0$ واگراست و واگرایی آن به صورت زیراست:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - \ln 2) + O(x^2), \tag{43}$$

و

$$N_n(x) = -\frac{(n-1)!}{\pi}(\frac{2}{x})^n (1 + \frac{1}{n-1}(\frac{x}{2})^2 + \cdots). \tag{44}$$

دراینجا $\gamma$ ثابت اویلراست.

کلی ترین جواب 42 به صورت $A_n J_n(x) + B_n N_n(x)$ است. ازآنجا که $N_n(x)$ منجربه تابع نابهنجارپذیرمی شود می بایست این جواب هاراکنارگذاشت. شرط مرزی در $r = a$ الزام می کند که تابع باقیمانده یعنی $J_n(x)$ درشرط زیرصدق کند:

$$J_n(ka) = 0. \tag{45}$$

هرگاه صفر $s$ ام تابع بسل $J_n$ را با $\beta_s^n$ نشان دهیم خواهیم داشت

$$ka = \beta_s^n \longrightarrow k \equiv k_{n,s} = \frac{\beta_s^n}{a}. \tag{46}$$

درنتیجه انرژی های کوانتیده به ترتیب زیربدست می آیند:

$$E_{n,s} = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\beta_s^n}{a})^2, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \quad s = 1, 2, 3, \cdots. \tag{47}$$

این انرژی ها مربوط به ویژه توابع زیرهستند:

$$\psi_{n,s}(r, \theta) = J_n(\frac{\beta_s^n\ r}{a})e^{i\ n\theta}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad s = 1, 2, 3, \cdots. \tag{48}$$

درنوشتن این توابع ضریب بهنجارش راننوشته ایم.

## ۵ نوسانگر هارمونیک دو بعدی

نوسانگر هارمونیک دوبعدی همسانگرد با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2). \tag{49}$$

در دستگاه واحدهای طبیعی می توان قرار داد $m = 1, \omega = 1, \hbar = 1$ و درنتیجه هامیلتونی به شکل زیر در می آید:

$$H = \frac{1}{2}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2). \tag{50}$$

یک راه برای بدست آوردن طیف این نوسانگر آن است که از تعریف عملگرهای بالابرنده و پایین برنده به صورت زیر شروع کنیم:

$$\begin{aligned} a_x &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP_x), \qquad & a_x^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP_x), \\ a_y &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + iP_y), \qquad & a_y^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - iP_y). \end{aligned} \tag{51}$$

تنها روابط جابجایی غیرصفر بین این عملگرها عبارت است از:

$$[a_x, a_x^\dagger] = 1, \qquad [a_y, a_y^\dagger] = 1. \tag{52}$$

هم چنین معلوم می شود که

$$H = (a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1) \tag{53}$$

با توجه به آنچه که در مطالعه نوسانگر هارمونیک یک بعدی دیده‌ایم خواهیم داشت:

$$H|n_x, n_y\rangle = (n_x + n_y + 1)|n_x, n_y\rangle, \qquad n_x, n_y = 0,\ 1,\ 2, \cdots, \tag{54}$$

که درآن

$$|n_x, n_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y!}} {a_x^\dagger}^{n_x} {a_y^\dagger}^{n_y} |0,0\rangle, \tag{55}$$

و

$$a_x|0,0\rangle = a_y|0,0\rangle = 0. \tag{56}$$

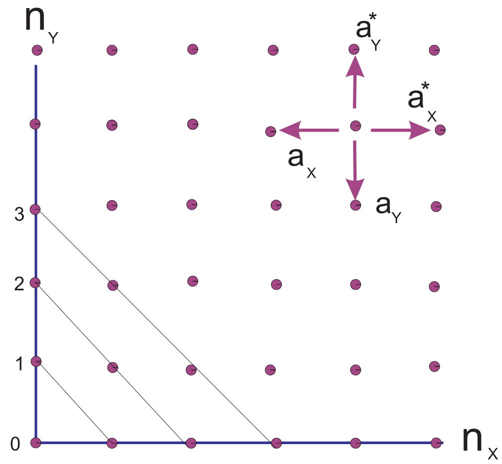
بنابراین هر ویژه حالت هامیلتونی با دو عدد کوانتومی $n_x$ و $n_y$ مشخص می شود. حالت پایه عبارت است از $|0,0\rangle$ . اولین حالت برانگیخته واگنی درجه دو دارد زیرا هر دو حالت $|1,0\rangle$ و $|0,1\rangle$ یک انرژی دارند. حالت بعدی واگنی درجه سه دارد زیرا حالت های $|2,0\rangle,\ |1,1\rangle,\ |0,2\rangle$ انرژی برابر دارند. درشکل (۳) هر حالت با اعداد کوانتومی $(n_x, n_y)$ یک نقطه در یک شبکه دو بعدی با مختصات $(n_x, n_y)$ نشان داده شده است.

اثر عملگرهای $a_x,\ a_x^\dagger,\ a_y,\ a_y^\dagger$ روی شکل نشان داده شده اند. تمام نقاطی که روی خط $n_x + n_y = constant$ قرار دارند انرژی یکسان دارند و بنابراین واگن هستند.

هم چنین تابع موج این نوسانگر به شرح زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \psi_{n_x,n_y}(x,y) &:= \langle x, y|n_x, n_y\rangle = \langle x|n_x\rangle\langle y|n_y\rangle = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y) \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_x} n_x!}} H_{n_x}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_y} n_y!}} H_{n_y}(n_y) e^{-\frac{y^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_x+n_y} n_x! n_y!}} H_{n_x}(x) H_{n_y}(y) e^{-\frac{r^2}{2}}. \end{aligned} \tag{57}$$

**تمرین:** تابع موج حالت پایه را به طور صریح بدست آورید و نشان دهید که این تابع موج تحت تاثیر دوران ثابت باقی می ماند.




شکل ۳: ویژه حالت های انرژی برای نوسانگر هارمونیک دوبعدی. هرنقطه نشان دهنده یک حالت با اعداد کوانتومی $(n_x, n_y)$ است. این حالت ها ویژه حالت تکانه زاویه‌ای $L_z$ نیستند.

تا کنون هیچ استفاده‌ای از اینکه نوسانگر هارمونیک همسانگرد است و تقارن دوارنی دارد نکرده‌ایم. می دانیم که چنین تقارنی به معنای آن است که می توانیم ویژه حالت های مشترک انرژی و تکانه‌زاویه‌ای را پیدا کنیم. آیا حالت های $|n_x, n_y\rangle$ چنین حالت هایی هستند؟ برای پاسخ به این سوال اثر تکانه‌زاویه‌ای را روی این حالت ها محاسبه می کنیم. نخست تکانه زاویه ای را برحسب عملگرهای بالابر و پایین بر می نویسیم. با استفاده از روابط (51) براحتی معلوم می شود که

$$L_z \equiv XP_y - YP_x = i\left(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger\right). \tag{58}$$

واضح است که این عملگر حالت های $|n_x, n_y\rangle$ را به ترکیبی خطی از حالت های $|n_x+1, n_y-1\rangle$ و $|n_x+1, n_y-1\rangle$ تبدیل می کند و بنابراین پایه فوق پایه‌ای نیست که بردارهای آن ویژه حالت مشترک هامیلتونی و تکانه زاویه‌ای باشند.
**تمرین:** حالت های بالا که در اثر عمل $L_z$ روی یک ویژه حالت انرژی بدست آمده‌اند دارای همان انرژی حالت $|n_x, n_y\rangle$ هستند. نشان دهید که این یک خاصیت کلی است یعنی اینکه هرموقع که هامیلونی با یک عملگر تقارن مثل $T$ جابجا شود اثر $L$ روی یک ویژه حالت انرژی، ویژه حالت هایی با همان انرژی تولید می کند. به عبارت دیگر عملگرتقارن ویژه حالت های مربوط به یک ویژه فضای انرژی را به ویژه حالت هایی از همان فضا می نگارد. اصطلاحاً می گوییم که هر ویژه فضای انرژی تحت اثر عملگرتقارن ناورداست.

**تمرین:** از حالت های $|1,0\rangle$ و $|0,1\rangle$ ویژه حالت هایی بسازید که تکانه‌ی زاویه‌ای مشخص داشته باشند. همین کار را با ویژه حالت های $|2,0\rangle$ ، $|1,1\rangle$ و $|0,2\rangle$ نیزانجام دهید.

طبیعی است که پایه‌ی $|n_x, n_y\rangle$ ویژه پایه مشترک هامیلتونی و $L_z$ نباشد. به روشی که در تمرین بالا انجام دادید می توان در هر زیرفضا ترکیب های خطی مختلفی آنچنان در نظر گرفت که حالت های بوجود آمده ویژه حالت $L_z$ نیز باشند. اما این کار برای حالت های با واگنی زیاد وقت گیر و غیرآموزنده است. می توان روش متفاوت و آموزنده‌ای را دنبال کرد که از همان ابتدا مبتنی بر تقارن دورانی است.
در واقع پایه قبلی را ازهمان ابتدا عملگرهای بالابر و پایین بر را براساس متغیرهای دکارتی $x$ و $y$ ساخته شده‌اند و حال آنکه

به نظر می رسد که می بایست عملگرهای فوق را با توجه به مختصات قطبی می نوشتیم. برای این کار دقت می کنیم که به جای دو مختصه $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ می توانیم از دو مختصه‌ی $(z,\overline{z})=(r\ e^{i\theta}, r\ e^{-i\theta})$ استفاده کنیم. این مختصات برای مطالعه چنین مسئله ای مناسب ترهستند. درواقع تحت یک عمل دوران می دانیم که متغیرهای $(x,y)$ به ترکیبی خطی از هم تبدیل می شوند یعنی

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \tag{59}$$

و حال آنکه متغیرهای $(z,\overline{z})$ تحت دوران تبدیل خیلی ساده ای دارند:

$$z \longrightarrow ze^{i\theta}, \qquad \overline{z} \longrightarrow \overline{z}e^{-i\theta}. \tag{60}$$

باالهام ازاین تغییر متغیر عملگرهای بالابر و پایین برجدیدی را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} a_R &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x+ia_y), & a_L &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x-ia_y), \\ a_R^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger-ia_y^\dagger), & a_L^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger+ia_y^\dagger). \end{aligned} \tag{61}$$

براحتی معلوم می‌شود که تنها روابط جابجایی غیرصفر بین این عملگرها عبارت است از:

$$[a_R\ ,\ a_R^\dagger]=1, \qquad [a_L\ ,\ a_L^\dagger]=1. \tag{62}$$

هم چنین معلوم می شود که

$$H=a_R^\dagger a_R+a_L^\dagger a_L+1, \qquad L_z=a_R^\dagger a_R-a_L^\dagger a_L. \tag{63}$$

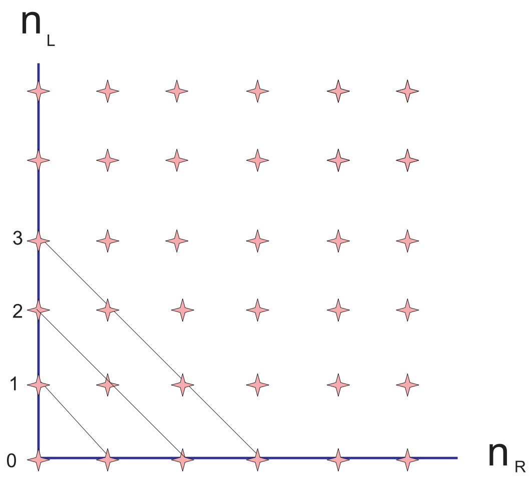
**تمرین:** درستی روابط بالا را نشان دهید.

بنابراین هرگاه حالت های زیر را تعریف کنیم:

$$|n_R,n_L\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_R!n_L!}}{a_R^\dagger}^{n_R}{a_L^\dagger}^{n_L}|0,0\rangle, \tag{64}$$

خواهیم داشت

$$H|n_R,n_L\rangle \quad = \quad (n_R+n_L+1)|n_R,n_L\rangle$$




شکل ۴: ویژه حالت های انرژی برای نوسانگر هارمونیک دوبعدی. هرنقطه نشان دهنده یک حالت با اعداد کوانتومی $(n_R, n_L)$ است. این حالت ها ویژه حالت تکانه زاویه‌ای $L_z$ نیز هستند.

$$L_z|n_R, n_L\rangle \quad = \quad (n_R - n_L)|n_R, n_L\rangle. \tag{65}$$

نتیجه آن است که حالت های $|n_R, n_L\rangle$ ویژه حالت مشترک هامیلتونی و تکانه زاویه ای هستند. درشکل (۴) این ویژه حالت ها با نقاطِ یک شبکه دوبعدی نشان داده شده‌اند.
دقت کنید که یک حالت $|n, m\rangle_{R,L}$ و یک حالتِ $|n, m\rangle_{X,Y}$ (حتی اگر اعدادِ $(m, n)$ آنها با هم یکسان باشند) کاملاً باهم فرق دارند زیرا از تاثیر عملگرهای متفاوتی بر روی حالت $|0, 0\rangle_{X,Y} = |0, 0\rangle_{R,L}$ بدست می آیند. دراین جا توجه به این تساوی اخیر یعنی تساوی حالت های پایه اهمیت اساسی دارد.

**تمرین:** نشان دهید که دو حالتِ $|n_x = 0, n_y = 0\rangle$ و $|n_R = 0, n_L = 0\rangle$ یکی هستند.

**تمرین:** حالت های $|n_R = 1, n_L = 0\rangle$ و $|n_R = 0, n_L = 1\rangle$ را بر حسب حالت های $|n_x, n_y\rangle$ بسط دهید. نتیجه خود را تعبیر کنید. همین کار را برای حالت های $|n_R = 2, n_L = 0\rangle$، $|n_R = 1, n_L = 1\rangle$ و $|n_R = 0, n_L = 2\rangle$ انجام دهید.

می توانیم شکل فضایی توابع موج جدید را نیز به راحتی بدست آوریم. برای این کار بهتراست از مختصات $(z, \overline{z})$ بجای $(x, y)$ استفاده‌کنیم. باید کمی درباره این مختصات توضیح دهیم. قرار می دهیم:

$$z := x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy \tag{66}$$

معکوس این روابط به شکل زیراست:

$$x := \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y := \frac{z - \overline{z}}{2i}, \tag{67}$$

بنابراین هر تابع $f := f(x, y)$ را می توان به صورت $f := f(z, \overline{z})$ نیز نوشت. مثلاً تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را می توان به صورت $f(z, \overline{z}) = z\overline{z}$ نوشت. حال می توانیم مشتقات جزئی نسبت به $z$ و $\overline{z}$ را با استفاده از روابط بالا و استفاده از قاعده

زنجیره‌ای برای ترکیب مشتقات تعریف کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned} \tag{68}$$

ویا به طور کلی:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned} \tag{69}$$

معکوس این روابط به شکل زیراست:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\\ \frac{\partial}{\partial y} &= i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.\end{aligned} \tag{70}$$

حال می‌توانیم نمایش عملگرهای بالا بر $a_R$ و $a_L$ را درنمایش مختصات بنویسیم:

$$\begin{aligned}a_R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) &= \frac{1}{2}(x + \frac{\partial}{\partial x} + iy + i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}z + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\\ a_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y) &= \frac{1}{2}(x + \frac{\partial}{\partial x} - iy - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}\overline{z} + \frac{\partial}{\partial z}\\ a_R^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger - ia_y^\dagger) &= \frac{1}{2}(x - \frac{\partial}{\partial x} - iy + i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}\overline{z} - \frac{\partial}{\partial z}\\ a_L^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger + ia_y^\dagger) &= \frac{1}{2}(x - \frac{\partial}{\partial x} + iy - i\frac{\partial}{\partial y}) = \frac{1}{2}z - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}.\end{aligned} \tag{71}$$

بعدازاین مقدمات می توانیم تمام توابع موج را براحتی بدست آوریم. نخست حالت پایه را بررسی می کنیم. می دانیم که تابع موج از رابطه زیر بدست می آید.

$$\psi_{n_R,n_L}(z,\overline{z}) := \langle z,\overline{z}|n_R,n_L\rangle. \tag{72}$$

هم چنین می دانیم که حالت پایه توسط هر دو عملگر $a_R$ و $a_L$ نابود می شود. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}z + \frac{\partial}{\partial \overline{z}})\psi_{0,0}(z,\overline{z}) = 0,\\ (\frac{1}{2}\overline{z} + \frac{\partial}{\partial z})\psi_{0,0}(z,\overline{z}) = 0.\end{aligned} \tag{73}$$

از حل معادلات دیفرانسیل بالا که بسیار ساده هم هستند تابع موج حالت پایه براحتی بدست می آید:

$$\psi_{0,0}(z,\overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}z\overline{z}}, \tag{74}$$

که درآن $\sqrt{\pi}$ یک ثابت بهنجارش است. حال بقیه توابع موج از اثر عملگرهای بالا بر و پایین بر بدست خواهند آمد: یعنی

$$\psi_{n_R,n_L}(z,\overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi n_R! n_L!}}(\frac{1}{2}\overline{z} - \frac{\partial}{\partial z})^{n_R}(\frac{1}{2}z - \frac{\partial}{\partial \overline{z}})^{n_L}e^{-\frac{1}{2}z\overline{z}}. \tag{75}$$

**تمرین:** عملگر $L_z$ را روی این تابع موج اثر بدهید و نشان دهید که این تابع موج ویژه تابع $L_z$ است. ویژه مقدار مربوطه را بدست آورید.

# ۶ ذره باردار درمیدان مغناطیسی یکنواخت

می دانیم که هامیلتونی یک ذره باردار درمیدان الکترومغناطیسی به شکل زیراست:

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 + e\phi \tag{76}$$

که درآن $e$ بار الکتریکی ذره، $\phi$ پتانسیل اسکالر و $\vec{A}$ پتانسیل برداری است. نخست به مفهوم تقارن پیمانه‌ای می پردازیم که یک مفهوم کاملاً کلی است و برای هرنوع میدان الکترومغناطیسی برقراراست.

## ۱.۶ تقارن پیمانه ای در مکانیک کوانتومی

می دانیم که میدان های الکتریکی و مغناطیسی تحت تبدیلات زیر که تبدیلات پیمانه‌ای نامیده می شوند تغییر نمی کنند:

$$\begin{aligned} \vec{A} \longrightarrow \vec{A'} &= A + \nabla\chi \\ \phi \longrightarrow \phi' &= \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi. \end{aligned} \tag{77}$$

تحت این تبدیلات هامیلتونی 76 تغییر می کند و طبیعتاً شکل معادله شرودینگر نیز تغییر می کند. اما می توانیم نشان دهیم که تحت این تبدیلات تابع موج تنها در یک فاز ضرب می شود. البته ابن فاز مقدار ثابتی نیست بلکه تابعی از نقاط فضا و زمان است. در واقع تبدیلات پیمانه‌ای در مکانیک کوانتومی به شکل زیرهستند:

$$A \longrightarrow A' = A + \nabla\chi$$

$$\begin{aligned}\phi \longrightarrow \phi' &= \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi \\ \psi(x,t) \longrightarrow \psi'(x,t) &= e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}\psi(x,t).\end{aligned} \tag{78}$$

معادله شرودینگر در حضور میدان الکتریکی و مغناطیسی به شکل زیراست:

$$\frac{1}{2m}\left[(\frac{\hbar}{i}\nabla - eA)^2 - e\phi\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t). \tag{79}$$

**تمرین:** درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$[(\frac{\hbar}{i}\nabla - eA')e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}\psi(x,t) = e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}[(\frac{\hbar}{i}\nabla - eA)\psi(x,t). \tag{80}$$

**تمرین:** با استفاده از تمرین قبلی نشان دهید که معادله شرودینگر تحت تبدیلات پیمانه‌ایِ 78 ناورداست.

این استدلال نشان می دهد که ما معادله شرودینگر را می توانیم در یک پیمانه که مناسب می دانیم حل کنیم و سپس با یک تبدیل پیمانه‌ای از نوع 78 تابع موج را در هر پیمانه‌دیگر بدست آوریم.

## ۲.۶ ذره باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت

درفیزیک کلاسیک حرکت ذره بارداری به جرم $m$ و بار الکتریکی $e$ را در میدان مغناطیسی یکنواختِ $B$ مطالعه کرده‌ایم. هرگاه میدان مغناطیسی بر یک صفحه مثلا صفحه‌ی $xy$ عمود باشد و هرگاه میدان مغناطیسی یک نواخت نیز باشد، و سرعت اولیه ذره نیز در صفحه $xy$ باشد، ذره تحت تاثیر نیروی جانب به مرکزِ $F = evB$ حرکت دایره‌ای طی می کند. اگر شعاع این دایره را $r$ بگیریم آنگاه معادله نیوتن برای چنین ذره‌ای برابر خواهد بود با:

$$m\frac{v^2}{r} = evB = e\omega rB, \tag{81}$$

و ازآنجابدست می آوریم که

$$\omega = \frac{eB}{m}. \tag{82}$$

این فرکانس، فرکانس لارمور خوانده می شود و تنها به مشخصات ذره باردار و میدان مغناطیسی بستگی دارد. یک ذره می تواند در میدان مغناطیسی انرژی های متفاوت داشته باشد اما همواره فرکانس چرخش آن برابر با فرکانس لارموراست. درواقع هرگاه ذره دایره‌ای به شعاع $R$ را طی کند، آنگاه انرژی و تکانه زاویه ای آن به ترتیب برابرخواهند بود با:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2,$$

$$L_z = mvR = m\omega R^2. \tag{83}$$

بنابراین بین انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای این ذره همواره رابطه زیر برقراراست:

$$E = \frac{1}{2}\omega L_z. \tag{84}$$

میدان الکتریکی و مغناطیسی به ترتیب زیر از این پتانسیل هابدست می آیند:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{85}$$

ازآنجا که میدان الکتریکی صفراست نتیجه می گیریم که $\phi$ یک عدد ثابت و $\vec{A}$ مستقل اززمان است. می توانیم $\phi$ را مساوی صفربگیریم. درنتیجه تنهانیازبه پتانسیل برداری داریم واین پتانسیل می بایست چنان باشد که درشرط زیرصدق کند:

$$\nabla \times \vec{A} = B\hat{z}. \tag{86}$$

بنابرآزادی پیمانه ای می دانیم که $\vec{A}$ به طور یکتا انتخاب نمی شود. درواقع اگر پتانسیل برداری را به صورت $\vec{A} = A_x(x,y)\hat{x} + A_y(x,y)\hat{y}$ بگیریم آنگاه معادله بالا تبدیل می شود به

$$\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = B \tag{87}$$

که حل های متعددی دارد. این حل ها متناظربا پیمانه های مختلف هستند. دریک پیمانه می توانیم قراردهیم

$$A_x = -\frac{B}{2}y, \qquad A_y = \frac{B}{2}x. \tag{88}$$

این پیمانه دارای تقارن دایره است زیراخطوط میدان $\vec{A}$ دایره های هم مرکز به مبدأ مختصات هستند. درپیمانه های دیگری می توانیم قراردهیم

$$A_x = -B\,y, \qquad A_y = 0, \qquad \text{یا}, \qquad A_x = 0, \qquad A_y = Bx. \tag{89}$$

پیمانه 88 را درنظرمی گیریم که دارای تقارن دایره است .

**تمرین:** معادله شرودینگر را در پیمانه بالا بنویسید. از مختصات قطبی استفاده کنید و شکل معادله شرودینگر را برای تابع موج شعاعی مشخص کنید. پتانسیل موثر برای معادله شرودینگر شعاعی به چه صورتی است.

**تمرین:** معادله شرودینگر شعاعی را که در تمرین بالا بدست آوردید به روش بسط حل کنید و نشان دهید که تابع موج شعاعی تنها وقتی می تواند بهنجار شود که مقادیر انرژی گسسته باشند. این مقادیر انرژی را بدست آورید.

علاوه بر روشی که در تمرین های بالا می توان برای بدست آوردن طیف بکار برد که مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل است می توان از یک ایده‌ی بسیار ساده نیز استفاده کرد. با نگاهی به هامیلتونی این مسئله متوجه می شویم که هامیلتونی در هر پیمانه‌ای بر حسب مختصات دینامیکی $X, Y, P_x$ و $P_y$ یک عبارت درجه ۲ است. بنابراین همواره می توان با تغییر متغیر مناسب آن را به صورت قطری درآورد.

**تمرین:** نشان دهید که در هر پیمانه‌ای عبارت هامیلتونی برحسب مختصات $X, Y, P_x$ و $P_y$ یک عبارت متقارن است. به عبارت دیگر می توان همواره هامیلتونی را به شکل زیر نوشت:

$$H = R^T \hat{H} R, \tag{90}$$

که در آن $R = \begin{pmatrix} X \\ P_x \\ Y \\ P_y \end{pmatrix}$ و $\hat{H}$ یک ماتریس عددی متقارن است. ماتریس $\hat{H}$ را می توان با یک ماتریس متعامد مثل $S$ قطری کرد یعنی اینکه

$$\hat{H} = S^T D S, \tag{91}$$

که در آن $D$ یک ماتریس قطری است. هرگاه متغیرهای جدید را با $Q_1, Q_2, P_1$ و $P_2$ نشان دهیم ثابت کنید که این متغیرهای جدید نیز دارای همان روابط جابجایی کانونیک هستند به این معنا که:

$$[Q_i, Q_j] = 0, \qquad [P_i, P_j] = 0, \qquad [Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{92}$$

**تمرین:** نشان دهید که برحسب متغیرهای جدید هامیلتونی نشان دهنده دو نوسانگر هارمونیک مستقل است و بنابراین طیف هامیلتونی به راحتی قابل بدست آوردن است.

کاری را که در تمرین های بالا به آن اشاره کردیم می توان به طور مشخص تر برای یک پیمانه خاص انجام داد. پیمانه‌ای را در نظر می گیریم که دارای تقارن دورانی است. دراین پیمانه هامیلتونی عبارت است از

$$H = \frac{(P_x + \frac{eB}{2}Y)^2}{2m} + \frac{(P_y - \frac{eB}{2}X)^2}{2m}. \tag{93}$$

آیا این هامیلتونی دارای تقارن دورانی است ؟ پاسخ این سوال را می توانیم با محاسبه جابجاگر $[H, L]$ پیداکنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که $[H, L] = 0$ ودرنتیجه تقارن دایره ای برقراراست. حال دو عملگرزیر را تعریف می کنیم:

$$Q := \frac{1}{\sqrt{eB}}(P_x + \frac{eB}{2}Y), \qquad P := \frac{1}{\sqrt{eB}}(P_y - \frac{eB}{2}X). \tag{94}$$

این دومتغیر کانونیک هستند به این معناکه

$$[Q,P]=i\hbar. \tag{95}$$

برحسب این دومتغیر هامیلتونی ذره درمیدان مغناطیسی به شکل زیردرمی آید

$$H=\frac{eB}{2m}(Q^2+P^2)=:\frac{\omega}{2}(Q^2+P^2), \tag{96}$$

که درآن $\omega=\frac{eB}{m}$ فرکانس لارمور نامیده می شود. این هامیلتونی نشانگریک نوسانگرهارمونیک است ومی توانیم بااستفاده از روشی که درمورد نوسانگرهارمونیک بکاربردیم طیف آن را به روش جبری تعیین کنیم. کافی است که عملگرهای بالابرنده وپایین برنده زیر را تعریف کنیم

$$a:=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q+iP),\qquad a^\dagger:=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(Q-iP), \tag{97}$$

که درنتیجه آن بدست می آوریم

$$[a,a^\dagger]=1,\qquad H=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2}). \tag{98}$$

حال کافی است که حالت های $|n\rangle:=\frac{1}{\sqrt{n!}}{a^\dagger}^n|0\rangle$ را تعریف کنیم که درآن حالت $|0\rangle$ حالتی است که توسط $a$ نابود می شود. این حالت ها همگی ویژه حالت انرژی هستند به این معنا که

$$H|n\rangle=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle. \tag{99}$$

اما می دانیم که عملگردوران با هامیلتونی جابجامی شود و بنابراین حالت های باتکانه زاویه ای متفاوت می توانند یک انرژی داشته باشند. به عبارت دیگر طیف هامیلتونی واگنی دارد. درنتیجه نماد $|n\rangle$ به تنهایی نشان دهنده یک ویژه حالت هامیلتونی نیست بلکه نشان دهنده یک ویژه فضا یا $eigenspace$ است. درواقع حالت های فضای هیلبرت توسط ویژه بردارهای مشترک هامیلتونی و تکانه زاویه ای جاروب می شوند. این ویژه بردارهامی بایست یک عددکوانتومی اضافه داشته باشند که نشان دهنده ویژه مقدار $L$ باشد. حال سوال می کنیم که اگر $L$ باهامیلتونی جابجا می شود،آیا می توان $L$ ر برحسب عملگرهای بالابرنده و پایین برنده یک نوسانگردیگرنوشت؟ برای پاسخ به این سوال عملگرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$\tilde{P}:=\frac{1}{\sqrt{eB}}(P_x-\frac{eB}{2}Y),\qquad \tilde{Q}:=\frac{1}{\sqrt{eB}}(P_y+\frac{eB}{2}X). \tag{100}$$

یک محاسبه ساده نشان می دهد که $[\tilde{Q},\tilde{P}]=1$ یعنی این دوعملگرنیز کانونیک هستند. علاوه برآن براحتی معلوم می شود که روابط زیربرقرارهستند

$$[Q,\tilde{Q}]=[Q,\tilde{P}]=0,\qquad [P,\tilde{Q}]=[P,\tilde{P}]=0. \tag{101}$$

درنتیجه جفت متغیرهای $(Q,P)$ و $(\tilde{Q},\tilde{P})$ هرکدام کانونیک بوده وازهم مستقل هستند. درواقع کاری که انجام داده ایم آن است که بجای مشاهده پذیرهای کانونیک ومستقلِ $(X,P_x)$ و $(Y,P_y)$ جفت جدیدی ازمتغیرهای کانونیک ومستقل برای توصیف این سیستم بکاربرده ایم. بدنیست که روابط معکوس را نیزبنویسیم. باتوجه به روابط 94 و 100 براحتی معلوم می شود:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{eB}}(\tilde{Q}-P), \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{eB}}(Q-\tilde{P}), \\ P_x &= \frac{\sqrt{eB}}{2}(Q+\tilde{P}), \qquad P_y = \frac{\sqrt{eB}}{2}(\tilde{Q}+P). \end{aligned} \tag{102}$$

درنتیجه بدست می آوریم

$$L = XP_y - YP_x = \frac{1}{2}(\tilde{Q}^2-P^2) - \frac{1}{2}(Q^2-\tilde{P}^2) \tag{103}$$

$$= \frac{1}{2}(\tilde{Q}^2+\tilde{P}^2) - \frac{1}{2}(Q^2+P^2). \tag{104}$$

بنابراین با تعریفِ

$$b := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{Q}+i\tilde{P}), \qquad b^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{Q}-i\tilde{P}), \tag{105}$$

بدست می آوریم

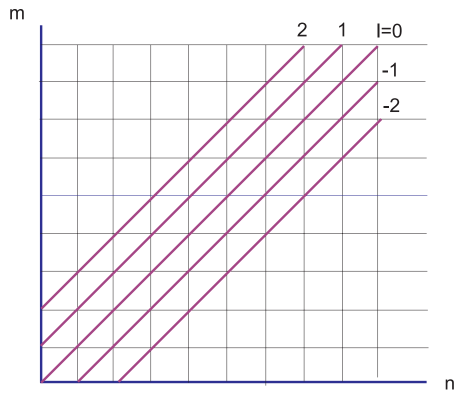
$$[b,b^\dagger]=1, \qquad L = b^\dagger b - a^\dagger a. \tag{106}$$

حال می توانیم طیف هامیلتونی و تکانه زاویه ای را به طورهمزمان پیداکنیم زیرپیداکردن طیف این دو چیزی نیست جز پیداکردن طیف همزمان دو عملگر مستقل و مثبتِ $a^\dagger a$ و $b^\dagger b$ که می دانیم این طیف چیزی نیست جزضرب تانسوری حالت های یک نوسانگرهارمونیک. این طیف را به شکل زیرنشان می دهیم:

$$\begin{aligned} |n,m\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{m!n!}}{a^\dagger}^n {b^\dagger}^m|0,0\rangle, \\ H|n,m\rangle &= \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n,m\rangle, \qquad L|n,m\rangle = (m-n)|n,m\rangle, \end{aligned} \tag{107}$$

که درآن حالت $|0,0\rangle$ با رابطه زیرتعریف می شود.

$$a|0,0\rangle = b|0,0\rangle = 0. \tag{108}$$




شکل ۵: هر حالت $(m,n)$ یک ویژه حالت مشترک انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای است.

به ازای هر جفت عدد صحیح نامنفی $(n,m)$ یک حالت ِ$|m,n\rangle$ با تکانه زاویه $l=(m-n)\hbar$ و انرژی $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ داریم. این حالت ها درشکل ۵ نشان داده شده اند. هر گروه از حالت های $|n,m\rangle$ با $n$ ثابت، یک تراز لانداو خوانده می شود. این حالت ها همه یک انرژی ولی تکانه زاویه ای های مختلف دارند.

# ۷ ضمیمه: بعضی از خواص توابع بسل

دراین ضمیمه به اختصار به معرفی توابع بسل می پردازیم. شناختن این توابع و خواص آنها برای درک روابط تحلیلی این درس و درس های آینده اهمیت دارند. اگر خواننده از ابتدای این ضمیمه شروع به اثبات روابط کند تقریبا تمامی خواص این توابع را می تواند یک به یک استخراج کند.

## ۱.۷ مولد توابع بسل

توابع بسل را مثل بسیاری دیگر از توابع خاص می توان با تابع مولدشان تعریف کرد.
توابع بسل مرتبه $n$ که آنها را با $J_n(x)$ نشان می دهیم با تابع مولد زیرتعریف می شوند:

$$g(x,t) := e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \qquad (109)$$

ازاین تعریف می توان بسیاری از خواص توابع بسل را به ترتیب زیربدست آورد.

۱: با تبدیل $t \longrightarrow -t$ و مقایسه دوطرف خواهیم دید که

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \tag{110}$$

۲: با قراردادن $t = 1$ و مقایسه دوطرف معلوم می شود که

$$J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1 \qquad \forall x. \tag{111}$$

۳: باقراردادن $x = 0$ دردوطرف و مقایسه آنها بدست می آوریم $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(0)t^n = 1$. ازآنجا که $t$ متغیراست این رابطه فقط وقتی برقراراست که داشته باشیم

$$J_0(0) = 1, \qquad J_{n\neq 0}(0) = 0. \tag{112}$$

۴: با قراردادن $t = e^{i\theta}$ ومقایسه قسمت های حقیقی و موهومی دو طرف واستفاده ازرابطه 110 بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \cos(x\sin\theta) &= J_0(x) + 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}\cos 2n\theta, \\ \sin(x\sin\theta) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\sin(2n+1)\theta. \end{aligned} \tag{113}$$

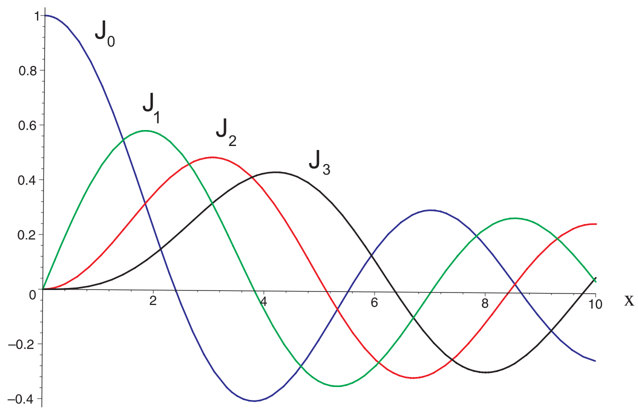
۵: بابسط طرف چپ به‌صورت $g(x,t) = e^{\frac{xt}{2}} e^{\frac{-x}{2t}}$ ومقایسه دوطرف، بدست می آوریم:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}(\frac{x}{2})^{n+2s}. \tag{114}$$

شکل توابع بسل تقریبا مثل توابع سینوسی ولی با دامنه‌ی میرا هستند. چند تابع اولیه بسل درشکل ٦ رسم شده اند.
اما برخلاف توابع سینوسی که صفرهای آنها در فواصل منظم رخ می دهند صفرهای توابع بسل مضاربی از یک مقدار معین نیستند. با این وجود در بسیاری از کاربردهای این توابع مهم است که بدانیم این توابع دقیقاً درچه مقادیری رخ می دهند. اهمیت صفرهای تابع بسل تا آنجاست که جدول های بسیاری در کتاب ها به فهرست کردن موقعیت دقیق این صفرها پرداخته‌اند. جدول ۱.۷ صفرهای چند تابع اولیه بسل رانشان می دهد.

٦: روابط تکرار: با مشتق گرفتن از دوطرف نسبت به $x$ و نسبت به $t$ ومقایسه طرفین به روابط تکرارزیرمی رسیم:

$$\begin{aligned} J_{n-1} - J_{n+1} &= 2J_n', \\ J_{n-1} + J_{n+1} &= \frac{2n}{x}J_n, \end{aligned} \tag{115}$$




شکل ٦: چند تابع اولیه بسل.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $J_0$ | 2.4048 | 5.5201 | 8.6537 | 11.7915 | 14.9309 |
| $J_1$ | 0 | 3.8317 | 7.0156 | 10.1735 | 13.3237 |
| $J_2$ | 0 | 5.1356 | 8.4172 | 11.6198 | 14.7960 |
| $J_3$ | 0 | 6.3802 | 9.7610 | 13.015 | 16.2235 |

جدول ۱: صفرهای اولیه از چند تابع اولیه بسل

که درآن منظور از $J'_n$ مشتق $J_n$ نسبت به $x$ است.

**۷: معادله دیفرانسیل:** با ترکیب این دومعادله تکرار به معادله دیفرانسیل زیر که همان معادله دیفرانسیل بسل است می رسیم (انجام ترکیب به عهده خواننده‌است):

$$\frac{d^2}{dx^2}J_n + \frac{d}{dx}J_n + (1 - \frac{n^2}{x^2})J_n = 0. \tag{116}$$

## ۲.۷ توابع بسل از مرتبه غیر صحیح

هر دنباله ای ازتوابع که درروابط تکرارِ 115 صدق کنند به طوربدیهی درمعادله دیفرانسیل فوق نیز صدق می کنند. بنابراین می توان معادله بسل از مرتبه غیرصحیحِ $\nu$ را به شکل زیرتعریف کرد:

$$\frac{d^2}{dx^2}J_\nu + \frac{d}{dx}J_\nu + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})J_\nu = 0. \tag{117}$$

دو جواب ِاین معادله به شکل زیرخواهند بود:

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(\nu+s)!s!}(\frac{x}{2})^{\nu+2s}$$
$$J_{-\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(-\nu+s)!s!}(\frac{x}{2})^{-\nu+2s}. \qquad (118)$$

دراین جا منظور از $\nu!$ فاکتوریل اعداد حقیقی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nu! = \int_0^\infty t^\nu e^{-t}dt. \qquad (119)$$

خواننده می تواند براحتی ثابت کند (مثلاً با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء) که این تعریف ضمن نگاه داشتن خاصیت اصلی فاکتوریل یعنی رابطه $\nu! = \nu(\nu-1)!$ در مقادیر صحیح مثبت بر تعریف استاندارد فاکتوریل منطبق است.

برای وقتی که $\nu$ عدد صحیح نباشد، این دوجواب مستقل ازهم اند، ولی برای وقتی که $\nu$ عدد صحیح است، این دوجواب، باهم متناسب اند ومستقل نیستند. دراین حالت می بایست یک جواب مستقل پیداکنیم. یک راه برای پیداکردن این جواب این است که حد $\nu \longrightarrow n$ را درجواب زیرمطالعه کنیم:

$$N_\nu(x) := \frac{\cos\pi\nu J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \qquad (120)$$

محاسبه دقیق حد منجربه یک بسط برای تابع بسل ازنوع دوم ویاتابع نویمان ازمرتبه $n$ می شود. شکل این بسط طولانی است و خواننده می تواند درصورت نیاز شکل کامل آن را درکتاب زیرپیداکند:

$G.\ Arfken,\ Metheds\ of\ Mathematical\ Physics,\ 2nd\ \ edition,\ \ Chapter\ 11,\ page\ 498.$

آنچه که برای مامهم است رفتاراین توابع درنزدیکی $x \longrightarrow 0$ است. می توان ثابت کرد که برای $x$ های کوچک روابط حدی زیربرقرارهستند:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}(\ln x + \gamma - \ln 2) + O(x^2), \qquad (121)$$

و

$$N_n(x) = -\frac{(n-1)!}{\pi}(\frac{2}{x})^n(1 + \frac{1}{n-1}(\frac{x}{2})^2 + \cdots). \qquad (122)$$

## ۳.۷ تعامد توابع بسل

می توان ثابت کرد که توابع بسل برهم متعامدند. برای وقتی که این توابع در فاصله صفر تا بی نهایت تعریف می شوند رابطه تعامد آنها به شکل زیراست:

$$\int_0^\infty J_\nu(kr)J_\nu(k'r)rdr = \frac{1}{k}\delta(k-k'). \qquad (123)$$

خواننده می تواند از این رابطه استفاده کند و نشان دهد که توابع موج ذره آزاد بر یکدیگر عمودند. هم چنین وقتی که این توابع را محدود به یک فاصله محدود مثلاً $0$ تا $a$ کنیم، رابطه تعامد به شکل زیر درمی آید:

$$\int_0^a J_\nu(\beta_{\nu,m}\frac{r}{a})J_\nu(\beta_{\nu,n}\frac{r}{a})rdr = 0 \qquad if \qquad m \neq n. \qquad (124)$$

دراین رابطه $\beta_{\nu,m}$ صفر شماره‌ی $m$ از تابع $J_\nu$ است. بنابراین تابع $J_\nu(\beta_{\nu,m}\frac{r}{a})$ تابعی است که در $r=a$ برابر با صفراست.

## ۴.۷ توابع هنکل

توابع هنکل $Hankel Functions$ ترکیبی خطی از توابع بسل و نویمان هستند که به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} H_\nu^1(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^2(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x). \end{aligned} \qquad (125)$$

بسط مجانبی این توابع از روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} H_\nu^1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} exp\ i\left[x-(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right].[P_\nu(x)+iQ_\nu(x)] \\ H_\nu^2(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} exp - i\left[x-(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right].[P_\nu(x)-iQ_\nu(x)], \end{aligned} \qquad (126)$$

که درآن توابع $P_\nu$ و $Q_\nu$ بسط های مجانبی زیر را دارند:

$$\begin{aligned} P_\nu(x) &\sim 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8x)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8x)^4} - \cdots \\ Q_\nu(x) &\sim \frac{\mu-1}{1!(8x)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8x)^3} + \cdots \end{aligned} \qquad (127)$$

و

$$\mu = 4\nu^2. \qquad (128)$$