درس دهم: اندازه حرکت زاویه ای و تقارن دورانی در سه بعد

۱ مقدمه

در درس گذشته تقارن دورانی در دو بعد و رابطه آن با تکانه زاویه‌ای را مطالعه کردیم. دیدیم که بدلیل تقارن دورانی مولد این تقارن یعنی عملگر L_z با هامیلتونی جابجا می شود، یعنی

$$[H, L_z] = 0. \tag{1}$$

این رابطه به ما اجازه داد که ویژه حالت های مشترک هامیلتونی و تکانه‌ی زاویه‌ای را مشخص کنیم. درپایه مختصات این امر به این معنابود که توانستیم جواب های معادله شرودینگر را به صورت $\psi_{E,n}(r,\theta) = \frac{U_{E,n}(r)}{\sqrt{r}} e^{in\theta}$ بنویسیم که درآن تابع $U_{E,n}(r)$ درمعادله شعاعی شرودینگر با یک پتانسیل موثر صدق می کرد. در درس کنونی می خواهیم مطالعات خود را در باره تقارن دورانی و رابطه آن با تکانه زاویه‌ای به سه بعد تعمیم دهیم. تقارن دورانی در سه بعد اهمیت ویژه‌ای دارد هم به این جهت که دنیای واقعی و فیزیکی پیرامون ما سه بعدی است و تقارن دورانی یکی از مهم ترین تقارن های این دنیاست، و هم به این دلیل که تقارن دورانی در سه بعد و مولدهای آن یعنی مولفه‌های سه گانه‌ی تکانه زاویه‌ای بسیارغنی تر از دو بعد هستند. آنچه که در طول این درس خواهیم آموخت برای مطالعه اتم هیدروژن که ساده ترین اتم ها ست اهمیت اساسی دارد. هم چنین در سرتاسر درس های آینده یعنی هنگامی که به مطالعه‌ی اتم های چند الکترونی و جدول تناوبی و هم چنین مولکولهامی پردازیم یا حتی وقتی که پدیده‌های پراکندگی را مطالعه می کنیم اهمیت خواهند داشت.

بهتراست قبل از درگیرشدن با روابط ریاضی نخست به نتیجه‌نهایی تقارن دورانی در سه بعد اشاره کنیم. از درس مربوط به تقارن می دانیم که مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای مولدهای تقارن حول محورهای مختصات مختلف هستند. بنابراین وجود تقارن دورانی در سه بعد باعث می شود که این سه مولفه با هامیلتونی جابجا شوند، یعنی اینکه

$$[H, L_x] = [H, L_y] = [H, L_z] = 0. \tag{2}$$

درادامه ثابت می کنیم که اندازه کل تکانه‌ی زاویه‌ای (یابه بیان دقیق تر مربع این اندازه یعنی $L^2 := L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$) با همه مولفه‌های تکانه زاویه ای جابجا می شود، یعنی اینکه

$$[L^2, L_a] = 0, \quad a = x, y, z. \tag{3}$$

بنابراین برای پتانسیلی که داری تقارن دوارنی است می توانیم ویژه حالت های مشترک سه عملگر یعنی H , L^2 و L_z را تعیین کنیم. (انتخاب L_z دراین مجموعه تنها یک قرارداداست می توانستیم هرکدام از مولفه‌های دیگر را نیز انتخاب کنیم بدون این که هیچ تفاوتی در تحلیل ما ایجاد شود. در حقیقت همواره می توانیم دستگاه مختصات را طوری انتخاب کنیم که آن مولفه‌ای که برای گنجاندن در مجموعه‌ی سه تایی بالا انتخاب کرده‌ایم، مولفه‌ی L_z باشد.) ویژه حالت های فوق را می توانیم با $\psi_{E,l,m}(r,\theta,\phi)$ نشان دهیم. درآینده نشان خواهیم داد که عملگرهای L^2 و L_z تنها روی زاویه‌های θ و ϕ اثر می کنند و بنابراین تابع موج بالا را می توان به شکل زیر نوشت :

$$\psi_{E,l,m}(r,\theta,\phi) = f(r)Y_{l,m}(\theta,\phi), \tag{4}$$

که درآن $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ ویژه حالت مشترکِ L^2 و L_z هستند:

$$\begin{aligned} L^2 Y_{l,m} &= \lambda_l Y_{l,m}, \\ L_z Y_{l,m} &= \lambda_m Y_{l,m}, \end{aligned} \tag{5}$$

λ_l و λ_m ویژه مقادیر این دو عملگر هستند، و $f(r) := \frac{R(r)}{r}$ دریک معادله شعاعی شرودینگر صدق می کند، یعنی

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r)\right] R(r) = ER(r), \tag{6}$$

که درآن

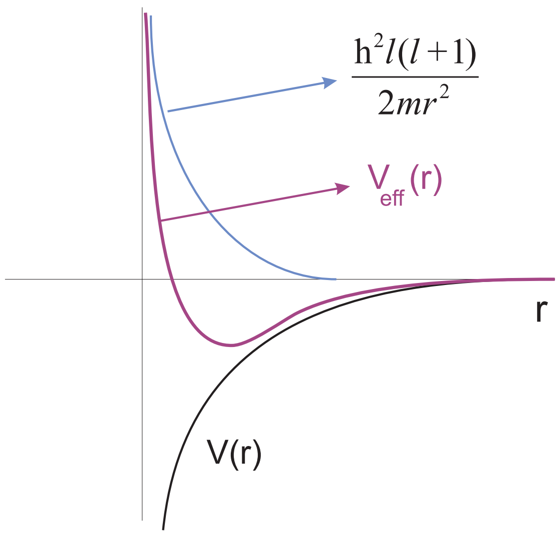
$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m} \tag{7}$$

یک پتانسیل موثراست. قسمت اضافه شده به پتانسیل در واقع ناشی از تکانه‌ی زاویه‌ای است که در حالت کلاسیک باعث می شود ذره روی مرکز پتانسیل سقوط نکند. درمکانیک کوانتومی این پتانسیل منجر به این می شود که ذره احتمال کمی برای حضور در نزدیکی های پتانسیل داشته باشد و هر چه که تکانه‌ی زاویه‌ای بیشتر باشد این احتمال حضور کم تر خواهد شد، شکل (??).

دقت کنید که توابع $Y_{l,m}$ توابعی روی کره هستند و مستقل از اینکه نوع پتانسیل $V(r)$ چیست، همواره بخشی از تابع موج هستند و شکل آنها مستقل از نوع پتانسیل مرکزی است که ذره درآن قرار دارد. شکل خاص پتانسیل تنها قسمت شعاعی تابع موج را تعیین می کند و برای هر پتانسیل خاص می بایست معادله شعاعی شرودینگر را مستقلاً حل کرد.

بقیه این درس صرف این می شود که جزئیات روابط بالا را بفهمیم.

نخستین کاری که می کنیم آن است که عملگرهای مربوط به تکانه زاویه ای را به دقت مطالعه می کنیم. سپس ویژه بردارهای L^2 و L_z را تعیین می کنیم و این قسمت به دلیل اهمیت روش های بکار برده شده درآن قسمت زیادی از این درس را به خود اختصاص خواهد داد. بعد از آن خواص کلی معادله شعاعی را بررسی می کنیم.



شکل ۱: پتانسیل موثر در سه بعد وقتی که تقارن دورانی داریم.

۲ تکانه زاویه ای در سه بعد

در سه بعد عملگر تکانه زاویه ای به صورت زیرتعریف می شود:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}, \tag{8}$$

که مولفه های سه گانه اش به ترتیب زیرهستند:

$$L_x := YP_z - ZP_y, \qquad L_y := ZP_x - XP_z, \qquad L_z := XP_y - YP_x. \tag{9}$$

براحتی می توان نشان داد که روابط زیربرقرارهستند:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \qquad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \qquad [L_z, L_x] = i\hbar L_y, \tag{10}$$

یا بطور فشرده

$$[L_a, L_b] = i\hbar\epsilon_{abc}L_c. \tag{11}$$

دراین رابطه و همه رابطه های آینده روی شاخص های تکراری جمع می زنیم. اصطلاحاً می گوییم که این روابط جبر تکانه‌ی زاویه‌ای را تعریف می کنند. L_x, L_y و L_z را مولدهای این جبر را می نامیم. خواننده‌ای که می خواهد اطلاعات بیشتری دراین مورد و به طور کلی در مورد جبرها و گروه های لی پیدا کند می تواند به درسنامه نظریه گروه مراجعه کند.

باتعریف مربع اندازه کل تکانه زاویه ای به صورت

$$L^2 := L_aL_a = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \tag{12}$$

تمرین: ثابت کنید که که

$$[L^2, L_a] = 0, \qquad \forall \ a. \tag{13}$$

از نظر فیزیکی L^2 اندازه تکانه زاویه‌ای را مشخص می کند و از نظر ریاضی عملگری است که با تمام مولدهای جبر تکانه‌ی زاویه‌ای جابجا می شود. چنین عملگری اصطلاحاً عملگر کازیمیر [1] خوانده می شود.

بنابر روابط 11، هرگز نمی توان هر سه مولفه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای را باهم مشخص کرد و تنها کاری که می توان کرد آن است که اندازه‌ی کل تکانه‌ی زاویه و یکی از مولفه ها را مشخص کرد.

دربعضی از مواقع بجای عملگرهای L_x وL_y ازعملگرهای $L_+ := L_x + iL_y$ و $L_- := L_x - iL_y$ استفاده می کنیم. خواننده براحتی می تواند صحت روابط زیر را تحقیق کند:

$$\begin{aligned}
&[L_z, L_+] = L_+, \\
&[L_z, L_-] = -L_-, \\
&[L_+, L_-] = 2L_z,
\end{aligned} \tag{14}$$

و

$$L^2 = L_+L_- + L_z^2 - L_z, \qquad L^2 = L_-L_+ + L_z^2 + L_z. \tag{15}$$

تمرین: درستی روابط بالا را بررسی کنید.

هم چنین می توان روابط جابجایی بین مولفه های اندازه حرکت زاویه ای و مولفه های مکان ویاتکانه را پیداکرد:

$$[L_a, X_b] = i\hbar\epsilon_{abc}X_c, \qquad [L_a, P_b] = i\hbar\epsilon_{abc}P_c. \tag{16}$$

هم چنین دیده می شود که

$$[L_a, R^2] \equiv [L_a, X_bX_b] = 0, \qquad [L_a, P^2] = [L_a, P_aP_a] = 0, \qquad \forall \ a. \tag{17}$$

تعریف: هرگاه یک عملگر با تمام مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای جابجا شود یک عملگر اسکالر خوانده می شود. بنابراین L^2 و R^2 عملگرهای اسکالر هستند.

---

[1] Casimir Operator

تعریف: هرگاه سه عملگرِ A_y, A_x و A_z روابط جابجایی زیر را با مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای داشته باشند،

$$[L_a, A_b] = i\epsilon_{abc}A_c, \tag{18}$$

عملگر $A = (A_x, A_y, A_z)$ یک عملگربرداری نامیده می شود. بنابراین X، P و خود L عملگرهای برداری هستند.

تمرین: نشان دهید که هرگاه A و B دو عملگر برداری باشند، آنگاه $A \cdot B$ یک عملگر اسکالراست.

می دانیم که برای کمیت های کلاسیک که عملگرنیستند رابطه

$$L^2 = (\vec{R} \times \vec{P})^2 = R^2P^2 - (\vec{R} \cdot \vec{P})^2. \tag{19}$$

به عنوان آخرین رابطه‌ی جبری بین مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای سعی می کنیم که L^2 را برحسب اندازه حرکت خطی بنویسیم. اگر این کمیت ها کلاسیک بودند می دانیم که رابطه‌ی آنها به شکل زیر می‌شد:

$$L^2 = R^2P^2 - (\mathbf{R} \cdot P^2)$$

. بدلیل اینکه درمکانیک کوانتومی بجای کمیت های کلاسیک عملگرهایی داریم که باهم جابجا نمی‌شوند، این رابطه اندکی تغییرمی کند. یادآوری می کنیم که دردوبعد این رابطه به همین شکل برای عملگرتکانه زاویه ای که یک مولفه بیشترنداشت برقرار است. درسه بعد می نویسیم

$$\begin{aligned} L^2 &= L_jL_j = \epsilon_{jkm}X_kP_m\epsilon_{jln}X_lP_n = \epsilon_{jkm}\epsilon_{jln}X_kP_mX_lP_n \\ &= (\delta_{kl}\delta_{mn} - \delta_{kn}\delta_{ml})X_kP_mX_lP_n \\ &= X_kP_mX_kP_m - X_kP_mX_mP_k = X_k(X_kP_m - i\hbar\delta_{k,m})P_m - X_kP_m(P_kX_m + i\hbar\delta_{k,m}) \\ &= R^2P^2 - i\hbar\vec{R} \cdot \vec{P} - (\vec{R} \cdot \vec{P})(\vec{R} \cdot \vec{P}) - i\hbar\vec{R} \cdot \vec{P}. \end{aligned} \tag{20}$$

حال ازاین مطلب استفاده می کنیم که $\vec{P} \cdot \vec{R} = \vec{R} \cdot \vec{P} - 3i\hbar$ و به نتیجه زیرمی رسیم

$$L^2 = R^2P^2 - (\vec{R} \cdot \vec{P})^2 + i\hbar(\vec{R} \cdot \vec{P}). \tag{21}$$

جمله آخر درمکانیک کلاسیک و هم چنین درمکانیک کوانتومی دو بعدی غایب است. در بخش های آینده از این رابطه استفاده خواهیم کرد. در بخش بعدی شکل عملگرهای تکانه‌ی زاویه ای را در پایه مختصات بدست می آوریم. دانستن این شکل‌ها چه در مختصات دکارتی و چه در مختصات کروی اهمیت دارد.

۱.۲ اندازه حرکت زاویه ای درپایه مختصات

درپایه مختصات عملگرهای تکانه زاویه ای به شکل زیردرمی آیند:

$$L_x := \frac{\hbar}{i}(y\partial_z - z\partial_y), \qquad L_y := \frac{\hbar}{i}(z\partial_x - x\partial_z), \qquad L_z := \frac{\hbar}{i}(x\partial_y - y\partial_x). \tag{22}$$

هرگاه بخواهیم این عملگرها را دردستگاه مختصات کروی بنویسیم می توانیم از تغییرمختصات زیراستفاده کنیم

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{23}$$

انجام این تغییر مختصات و هم چنین استفاده از مشتق های زنجیره‌ای برای نوشتن مشتق ها در مختصات کروی بعد از محاسباتی نسبتاً طولانی شکل عملگرهای تکانه‌ی زاویه‌ای را در مختصات کروی بدست خواهد داد. اما راه ساده ترآن است که ازهمان ابتدا تکانه زاویه ای را دردستگاه مختصات کروی به شکل زیربنویسیم

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{R}\times P = \frac{\hbar}{i}\vec{R}\times\vec{\nabla} \\ &= \frac{\hbar}{i} r\hat{r}\times\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

بااستفاده ازاین که بردارهای یکه دردستگاه مختصات کروی به شکل زیرهستند

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}, \end{aligned} \tag{25}$$

بدست می آوریم

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_y &= \frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{26}$$

بااستفاده ازروابط فوق شکل این عملگرها درپایه مختصات عبارت خواهد بوداز:

$$L_+ = \hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$
\begin{aligned}
L_- &= \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

تمرین: نشان دهید که

$$
L^2=-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{28}
$$

تمرین: نشان دهید که عملگرهای دیفرانسیلی نشان داده شده در رابطه‌ی بالا یعنی رابطه‌ی 27 در روابط جابجایی تکانه زاویه‌ای صدق می کنند.

۳ هارمونیک های کروی : معادله دیفرانسیل لژاندر

دراین بخش می خواهیم ویژه بردارهای عملگرتکانه‌ی زاویه‌ای را پیدا کنیم. برای این کار توجه می کنیم که عملگرهای $L_y,\ L_x$ و L_z همه با هم جابجا نمی شوند، بنابراین نمی توان ویژه حالت مشترک آنها را پیدا کرد. اما عملگر L^2 با هر سه این عملگرها جابجا می شود، بنابراین می توان ویژه حالت مشترکِ L^2 و یکی از آنها مثلاً L_z را پیدا کرد. بهترین و آموزنده ترین روش برای این کار آن است که به روش جبری این طیف را پیدا کنیم. این کاری است که در ادامه‌ی این بخش انجام خواهیم داد. اما بد نیست در همین ابتدا به یک روش دیگر که قدیمی تر است اشاره کنیم. دراین روش مستقیماً معادلات دیفرانسیل ویژه مقداری مربوط به عملگرهای L^2 و L_z را حل می کنیم. با توجه به فرم دیفرانسیلی این عملگرها که در بالا بدست آوردیم این معادلات شکل زیر را پیدا می‌کنند:

$$
\begin{aligned}
L_zY_{l,m}(\theta,\phi) &= \lambda_mY_{l,m}(\theta,\phi),\\
L^2Y_{l,m}(\theta,\phi) &= \lambda_lY_{l,m}(\theta,\phi),
\end{aligned} \tag{29}
$$

ویا

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{\partial}{\partial\phi}Y_{l,m}(\theta,\phi)=\lambda_mY_{l,m}(\theta,\phi),\\
&\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{l,m}(\theta,\phi)=\lambda_lY_{l,m}(\theta,\phi).
\end{aligned} \tag{30}
$$

که درآن λ_m و λ_l ویژه مقدارهای مربوط به L_z و L^2 و $Y_{l,m}$ ها ویژه توابع مربوطه هستند. واضح است که جواب معادله دیفرانسیل اول به صورت $P_l^m(\theta)e^{im\phi}$ است که درنتیجه‌ی آن ویژه مقدارِ λ_m نیز برابر با m می شود. علاوه برآن به خاطر تک

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta$$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} = 3\cos\theta\sin\theta$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3\sin^2\theta$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = 15\cos\theta\sin^2\theta$$

$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2} = 15\sin^3\theta$$

چند تابع اول وابسته لژاندر :1

مقداری بودن تابع $Y_{l,m}$ که می بایست روی کره تک مقدار باشد، نتیجه می گیریم که m می بایست یک عدد صحیح باشد. با قرار دادن تابع $P_l^m(\theta)e^{i\ m\phi}$ در معادله دوم به یک معادله دیفرانسیل تنها برحسب θ می رسیم که شکل آن چنین است:

$$\left[-\frac{d^2}{d\theta^2} - \cot\theta\frac{d}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_l^m(\theta) = \lambda_l P_l^m(\theta). \tag{31}$$

تمرین: در معادله بالا قرار دهید $m = 0$.

با تغییر متغیرِ $x = \cos\theta$ این معادله برای تابع $P_l^m(x) =: P_l^m(\cos\theta)$ به شکل زیر در می آید:

$$(x^2-1)\frac{d^2P_l^m}{dx^2} + 2x\frac{dP_l^m}{dx} + \frac{m^2}{1-x^2}P_l^m = \lambda_l P_l^m. \tag{32}$$

به روش های مختلفی می توان جواب های این معادله را پیدا کرد. (خواننده می تواند به یک کتاب ریاضی فیزیک و یا به ضمیمه‌ی این فصل رجوع کند). نشان داده می شود که این معادله تنها وقتی جواب های هنجارپذیر دارد که ویژه مقدار λ_l برابر باشد با $l(l+1)$ که درآن l یک عدد صحیح نامنفی باشد و درشرط زیر نیز صدق کند:

$$|m| \leq l. \tag{33}$$

جواب های این معادله توابع وابسته لژاندر نامیده می شوند. بنابراین توابع وابسته لژاندر پاسخ های معادله دیفرانسیل زیرهستند:

$$(x^2-1)\frac{d^2P_l^m}{dx^2} + 2x\frac{dP_l^m}{dx} + \frac{m^2}{1-x^2}P_l^m = l(l+1)P_l^m. \tag{34}$$

درجدول (۳) چند تا از توابع وابسته لژاندر نوشته شده‌اند.

$Y_{0,0}$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$Y_{1,0}$	$-\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$
$Y_{1,0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cos\theta$
$Y_{2,2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}$
$Y_{2,1}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$
$Y_{2,0}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta-1)$
$Y_{3,3}$	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\sin^3\theta e^{3i\phi}$
$Y_{3,2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\sin^2\theta\cos\theta e^{2i\phi}$
$Y_{3,1}$	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}\sin\theta(5\cos^2\theta-1)e^{i\phi}$
$Y_{3,0}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$

2: چند تا ازهماهنگ های کروی : $(Y_{l,-m}=(-1)^m Y^*_{l,m})$

در ضمیمه این درس با تفصیل بیشتری با توابع لژاندر آشنا خواهیم شد.

تمرین: نشان دهید که تابع های $P_1^1(x)$ و $P_2^2(x)$ که در جدول ۳ داده شده‌اند در معادله دیفرانسیل لژاندر صدق می کنند.

با در دست داشتن این توابع فرم کامل توابع $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ که به هارمونیک های کروی معروفند، تعیین می شوند. چندتا هارمونیک اول کروی در جدول (۳) نشان داده شده‌اند. این هارمونیک ها توابعی هستند که به عنوان توابع روی کره دوبعدی، اولاً متعامدند، ثانیاً یک پایه کامل تشکیل می دهند. بنابراین داریم

$$\int d\Omega Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)Y_{l,m}(\theta,\phi)=\delta_{l,l'}\delta_{m,m'},$$
$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{l,m}(\theta,\phi)Y_{l,m}(\theta',\phi')=\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi'). \tag{35}$$

تمرین: مستقیماً نشان دهید که هماهنگ های کروی $Y_{0,0}$، $Y_{1,1}$ ، $Y_{1,0}$ و $Y_{1,-1}$ ویژه توابع L^2 و L_z هستند. هم چنین نشان دهید که این توابع به عنوان توابعی روی کره دوبعدی بهنجار هستند.

تمرین: نشان دهید که هارمونیک های کروی $Y_{1,m}$ برای m های متفاوت برهم عمودند. ضرب داخلی برای توابع روی کره به شکل زیر تعریف می شود:

$$\langle f, g\rangle = \int d\sin\theta d\phi f^* g. \tag{36}$$

تمرین: عملگر $L_+ := L_x + iL_y$ را روی هارمونیک های کروی $Y_{1,m}$ اثر دهید و نشان دهید که حاصل را می توان بازهم بر حسب $Y_{l,m}$ ها نوشت.

۴ هارمونیک های کروی : طیف تکانه ی زاویه ای

در بخش گذشته به روش سنتی یعنی حل معادله دیفرانسیل هارمونیک های کروی را پیدا کردیم. دراین بخش این کار را به روش جبری انجام می دهیم. خواهیم دید که این روش از عمق و غنای بیشتری برخورداراست و از طریق آن مطالب خیلی زیادتری در باره این هارمونیک ها یاد خواهیم گرفت. ازاین به بعد عملگرهای تکانه زاویه ای را به جای L_x ، L_y و L_z با J_x، J_y و J_z نشان می دهیم. حکمت این تغییرنام درانتهای درس معلوم خواهد شد. می دانیم که عملگرهای تکانه زاویه ای درروابط جبری زیرصدق می کنند:

$$\begin{aligned}
[J_x, J_y] &= i\ J_z,\\
[J_y, J_z] &= i\ J_x,\\
[J_z, J_x] &= i\ J_y,
\end{aligned} \tag{37}$$

ویا

$$\begin{aligned}
[J_z, J_+] &= J_+,\\
[J_z, J_-] &= -J_-,\\
[J_+, J_-] &= 2J_z.
\end{aligned} \tag{38}$$

دراین روابط $J_\pm = J_x \pm iJ_y$. دقت کنید که ثابت $\hbar$ را دراین روابط ننوشته ایم . درانتها می توان این ثابت را اضافه کرد. دراین بخش مسئله یافتن ویژه مقدارهای عملگر J_z و J^2 را در یک چارچوب کلی تر انجام می دهیم. این مسئله عبارت است از پیدا

کردن تمام ماتریس هایی که در روابط جابجایی 51 صدق می کنند. هرگاه چنین ماتریس هایی پیدا کنیم، در اصطلاح ریاضی گفته می شود که یک نمایش برای این روابط جبری پیدا کرده‌ایم. به بعد ماتریس ها بعد نمایش گفته می شود. درواقع اگر بعد ماتریس ها برابر با n باشد به این معناست که ما یک فضای برداری n بعدی V یافته ایم و توانسته‌ایم J_+, J_- و J_z را به عنوان ماتریس هایی در آن فضا نمایش دهیم. به همین جهت بعد نمایش همان بعد فضای برداری V نیز هست. به یک نکته در باره نماد گذاری نیز باید دقت کنیم. به عنوان مثال یک نمایش یک بعدی برای این جبر می توان یافت و آن این است که قرار دهیم $J_z = J_+ = J_- = 0$. واضح است که این ماتریس های یک بعدی در روابط جابجایی فوق صدق می کنند. یک نمایش دو بعدی به صورت زیراست:

$$J_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

به بیان دیگر این نمایش دو بعدی عبارت است از:

$$J_x = \frac{1}{2}\sigma_x, \qquad J_y = \frac{1}{2}\sigma_y, \qquad J_z = \frac{1}{2}\sigma_z. \tag{40}$$

خواننده می تواند تحقیق کند که این ماتریس ها در روابط 51 صدق می کنند. دراین نمایش، ویژه بردارهای J_z عبارتند از

$$|\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\frac{-1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

اثر عملگرهای دیگر روی این حالت ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} J_+|\frac{1}{2}\rangle = 0, \qquad & J_+|\frac{-1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}\rangle, \\ J_-|\frac{1}{2}\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle, \qquad & J_-|\frac{-1}{2}\rangle = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

هم چنین می توان تحقیق کرد که حالت های $|\frac{1}{2}\rangle$ و $|-\frac{1}{2}\rangle$ ویژه حالتِ عملگر $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ نیز هستند یعنی

$$J^2|\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{4}|\frac{1}{2}\rangle, \qquad J^2|\frac{-1}{2}\rangle = \frac{3}{4}|\frac{-1}{2}\rangle. \tag{43}$$

به عبارت دیگر حالت های $|\frac{1}{2}\rangle$ و $|-\frac{1}{2}\rangle$ ویژه حالت های مشترک J_z و J^2 دراین فضای دو بعدی هستند.

به یک مثال دیگر توجه می کنیم. یک نمایش سه بعدی نیز به صورت زیراست:

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که دراین نمایش:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

به این معنا که

$$J_z|m\rangle = m|m\rangle, \qquad m = 1,\ 0,\ -1. \tag{46}$$

هم چنین خواننده می تواند تحقیق کند که

$$J^2|1\rangle = 2|1\rangle, \qquad J^2|0\rangle = 2|0\rangle, \qquad J^2|-1\rangle = 2|-1\rangle. \tag{47}$$

بنابراین حالت های فوق ویژه حالت های مشترک J_z و J^2 هستند.

آیا نمایش های دیگری نیز از روابط جبری تکانه‌ی زاویه‌ای وجود دارند؟ آیا می توان در هر بعد دلخواه نمایشی از روابط جبری 51 بدست آورد؟ درنگاه اول به نظر می رسد که براحتی می توانیم نمایش های با بعد بالاتر بسازیم مثل نمایش چهاربعدی زیر:

$$J_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_x & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_x \end{pmatrix}, \qquad J_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_y & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_y \end{pmatrix}, \qquad J_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_z & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_z \end{pmatrix}. \tag{48}$$

اما واضح است که این نمایش واقعاً یک نمایش جدید نیست و بدلیل ساختار بلوکه قطری ماتریس های آن چیزی جز برهم نهادن دو نمایش دوبعدی نیست. چنین نمایشی را یک نمایش کاهش پذیر می گوییم. هم چنین باید دقت کنیم که اگر J_a ها یک نمایش از روابط (51) باشند، و S یک ماتریس دلخواه وارون پذیر باشد، آنگاه $J'_a = SJ_aS^{-1}$ ها نیز یک نمایش از همان روابط جبری هستند که اساساً فرقی با همان نمایش اولیه ندارند. در حقیقت مثل این است در فضای برداری یک تغییر پایه داده ایم و در نتیجه ماتریس های نمایش با یک تبدیل تشابهی عوض شده‌اند. به همین جهت این دو نمایش را دو نمایش معادل می گوییم. هم چنین برای کاربرد در مکانیک کوانتومی مهم است که ماتریس هایی که پیدا می کنیم هرمیتی باشند. به چنین نمایش هایی نمایش های یکانی می گوییم. دلیل این نامگذاری آن است که هرگاه ماتریس هایی که پیدا می کنیم هرمیتی باشند، آنگاه ماتریس های $U_{\hat{n}}(\theta) = e^{i\theta \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}$ که نمایش دهنده دوران هستند یکانی خواهند بود. باتوجه به این ملاحظات، آنچه که اهمیت دارد آن است که نمایش های، یکانی، کاهش ناپذیر و غیر معادل را پیدا کنیم. دراین جا یک قضیه در نظریه نمایش جبرهای لی به ما کمک می کند.

قضیه: همه نمایش های یکانی و کاهش ناپذیر جبر تکانه‌ی زاویه‌ای محدود بعد هستند. این قضیه حالت خاصی است از

یک قضیه در مورد گروه هاو جبرهای لی فشرده [2] که به قضیه پیتر– وایل [3] مشهور است.

نخستین کاری که می کنیم آن است که عملگرهرمیتی J_z راقطری می کنیم. ویژه مقادیر این عملگررا با m وویژه بردارهای آن را با $|m\rangle$ نمایش می دهیم:

$$J_z|m\rangle = m|m\rangle. \tag{49}$$

هنوزراجع به مقادیرممکن m وهم چنین بعد فضای V_j چیزی نمی دانیم. تنهاچیزی که می دانیم آن است که این ویژه مقدارهاحقیقی هستند و ویژه بردارهای $\{|m\rangle\}$ یک پایه‌بهنجارویکه برای فضای V_j تشکیل می دهند. حال ازروابط جبرمی توانیم نتیجه بگیریم که

$$\begin{aligned} J_+|m\rangle &= C_+(m)|m+1\rangle \\ J_-|m\rangle &= C_-(m)|m-1\rangle. \end{aligned} \tag{50}$$

که درآن $C_\pm(m)$ ضرایبی هستند که می بایست تعیین شوند. برای آنکه خود رابرای نامگذاری آینده آماده کنیم به هر ویژه مقدار m یک وزنه می گوییم و به رشته $\cdots m-2,\ m-1,\ m,\ m+1,\ m+2,\cdots$ یک نردبان از وزنه ها می گوییم. ازآنجا که نمایش محدود بعد است این نردبان می بایست حتماً یک بالاترین پله مثل j و یک پایین ترین پله مثل $j-g$ داشته باشد که درآن تعداد پله هایعنی $g+1$ می بایست یک عدد صحیح باشد.
حال دقت می کنیم که ضرایب $C_-(m)$ را می توان حقیقی گرفت زیراهرفازی را که چنین ضریبی داشته باشند می توان بابازتعریف حالت $|m-1\rangle$ ازبین برد.
قدم بعدی آن است که ازرابطه (51) روابط زیر را نتیجه بگیریم :

$$\begin{aligned} \langle m|J_- &= C_+^*(m)\langle m+1| \\ \langle m|J_+ &= C_-(m)|m-1\rangle. \end{aligned} \tag{51}$$

حال عنصر ماتریسی $\langle m+1|J_+|m\rangle$ را ازدوطریق حساب می کنیم و به رابطه می رسیم:

$$C_+(m) = C_-(m+1), \tag{52}$$

که درضمن نشان می دهد ضرایب $C_+(m)$ نیز حقیقی هستند.
حال به عنصرماتریسی زیرتوجه می کنیم

$$\langle m|J_+J_-|m\rangle = \langle m|J_-J_+ + 2J_z|m\rangle, \tag{53}$$

Compact Lie Groups and Algebras[2]
Peter-Weyl[3]

که ازآن نتیجه می گیریم

$$(C_-(m))^2 = (C_+(m))^2 + 2m, \tag{54}$$

ویا

$$(C_+(m-1))^2 = (C_+(m))^2 + 2m, \tag{55}$$

باتوجه به اینکه بالاترین پله نردبان j وپایین ترین پله آن $j-g$ است می دانیم که

$$C_+(j+1) = 0, \qquad C_-(j-g) = 0, \tag{56}$$

ویاباتوجه به رابطه (52)،

$$C_+(j) = 0, \qquad C_+(j-g-1) = 0. \tag{57}$$

اگر برای سادگی $(C_+(m))^2$ را با D_m نشان دهیم روابط تکرارفوق به شکل زیرهستند:

$$\begin{aligned}
&D_{j-1} = 2j,\\
&D_{j-2} = D_{j-1} + 2(j-1),\\
&\cdots,\\
&D_{m-1} = D_m + 2m\\
&\cdots
\end{aligned} \tag{58}$$

حال می توان طرفین رابطه تکرار (55) را برای تمام پله ها جمع زد و به رابطه زیررسید

$$\sum_{m=j-g}^{j} D_{m-1} = \sum_{m=j-g}^{j} D_m + 2\sum_{m=j-g}^{j} m, \tag{59}$$

ویا باتوجه به شرط مرزی (57)،

$$0 = 2\sum_{m=j-g}^{j} m \longrightarrow (2j-g)(g+1) = 0. \tag{60}$$

ازآنجا که g نمی تواند برابربا -1 باشد این رابطه به این معناست که

$$2j = g. \tag{61}$$

این رابطه به این معناست که برچسب نمایش یعنی j که تاکنون نامعلوم بود یک عدد نیمه صحیح است. بنابراین بالاترین پله نردبان j و پایین ترین پله آن $-j$ است.
هم چنین از روابط (58) نشان می توان مقدار D_m ها ونتیجتاً ضرایب $C_\pm(m)$ را بدست آورد. یک محاسبه ساده نشان می دهد که

$$C_+(m) = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \qquad C_-(m) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}. \tag{62}$$

به این ترتیب نمایش های یکانی جبر $su(2)$ ساخته می شوند. هرنمایش با یک عدد نیمه صحیح j مشخص می شود وبعد آن برابراست با $2j+1$. بردارهای پایه نمایش عبارتند از $\{|-j\rangle,\ |-j+1\rangle, \cdots |j-1\rangle, |j\rangle\}$.
ماتریس های نمایش نیز توسط روابط زیرتعیین می شوند:

$$\begin{aligned}
J_z|m\rangle &= m|m\rangle \\
J_+|m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|m+1\rangle \\
J_-|m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|m-1\rangle.
\end{aligned} \tag{63}$$

تمرین: اثر عملگر $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_+J_- + J_z^2 - J_z$ را روی بردارها حساب کنید و نشان دهید که

$$J^2|m\rangle = j(j+1)|m\rangle. \tag{64}$$

این نتیجه نمونه‌ای است از یک قضیه‌ی کلی که موسوم است به لمِ‌شور [4] که بیان می کند هر عملگری که با همه مولد های یک جبر جابجا شود در هر نمایش کاهش ناپذیر متناسب با ماتریس واحد خواهد بود. دراین جا نیز عملگر کازیمیرِ J^2 با همه مولدها جابجا می شود و همانطور که این قضیه بیان می کند دراین نمایش کاهش ناپذیر متناسب با واحد شده است و ضریب تناسب برابر است با $j(j+1)$ که همان ویژه مقدار اندازه تکانه زاویه‌ای است. در واقع مقدار j برچسب این نمایش است و همانطور که دیدیم به ازای هر عدد صحیح یا نیمه صحیح یک نمایش یکانی کاهش ناپذیر وجود دارد. برای این که بردارهای حالت یک نمایش را از هم تمیز دهیم بهتر است بجای نماد ساده‌ی $|m\rangle$ از نماد $|j,m\rangle$ استفاده کنیم. بنابراین نمایش اسپین j روی یک فضای برداری V_j با بعدِ $(2j+1)$ تعریف می شود و بردارهای متعامد $|j,m\rangle$ پایه های این فضا را تشکیل می دهند. نماد $|j,m\rangle$ درعین حال نشان می دهد که این حالت ویژه بردار همزمان عملگر J^2 و J_z است.

[4] Schur Lemma

درنتیجه ماتریس های نمایش j برابرندبا:

$$\begin{aligned}
\langle j,m'|J_z|j,m\rangle &= m\delta_{m,m'} \\
\langle j,m'|J_+|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\delta_{m',m+1} \\
\langle j,m'|J_-|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\delta_{m',m-1}.
\end{aligned} \tag{65}$$

تمرین: نشان دهید که اگر S یک عملگر اسکالر باشد آنگاه شرط زیر همواره برقراراست:

$$\langle j,m|S|j'.m'\rangle = 0 \quad if \quad j\neq j'. \tag{66}$$

تمرین: نشان دهید که اگر $V=(V_x,V_y,V_z)$ یک عملگر برداری باشد آنگاه شرط زیر همواره برقراراست:

$$\begin{aligned}
\langle j,m|V_z|j',m'\rangle &= 0, \quad if \quad m\neq m', \\
\langle j,m|V_x|j',m'\rangle &= 0, \quad if \quad m\neq m'\pm 1, \\
\langle j,m|V_y|j',m'\rangle &= 0, \quad if \quad m\neq m'\pm 1.
\end{aligned} \tag{67}$$

مثال ۱: نمایش اسپین $\frac{1}{2}$

این نمایش دوبعدی است و بردارهای پایه آن عبارتنداز $\{|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\}$. دراین نمایش داریم

$$J_z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad J_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad J_y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}. \tag{68}$$

مثال ۲: نمایش اسپین 1

این نمایش سه بعدی است و بردارهای پایه آن عبارتنداز $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$. دراین نمایش داریم

$$J_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \qquad J_x=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad J_y=i\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}. \tag{69}$$

تمرین: شکل صریح ماتریش های L_x L_y و L_z را در نمایش اسپین $3/2$ بدست آورید.

تمرین: عملگرهای مربوط به دو نوسانگر هارمونیک مستقل را در نظر بگیرید. روابط جابجایی این عملگرها به شکل زیراست:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [b, b^\dagger] = 1, \quad [a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0. \tag{70}$$

حال عملگر زیر را در نظر بگیرید:

$$J_z := \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b). \tag{71}$$

الف: مشابه با تعریف بالا، عملگرهای J_+ و J_- را چنان بسازید که در روابط جابجایی جبر تکانه زاویه‌ای صدق کنند.

ب: با توجه به آنکه نمایش جبر نوسانگر هارمونیک را می شناسیم به این معنا که

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \qquad & a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ b|n'\rangle &= \sqrt{n'}|n'-1\rangle \qquad & b^\dagger|n'\rangle = \sqrt{n'+1}|n'+1\rangle. \end{aligned} \tag{72}$$

در فضای برداری که از ضرب تانسوری فضای نمایش های این دو نوسانگر ساخته می شود یعنی در فضایی که بردارهای پایه ی آن $|n, n'\rangle$ ها هستند نمایشِ عملگرهای J_z، J_+ و J_- را پیدا کنید. کدام دسته از حالاتِ $|n, n'\rangle$ بردارهای حالت نمایش اسپین j هستند؟ آیا فضای برداری که از بردارهای $|n, n'\rangle$ ساخته می شود تمام نمایش های کاهش ناپذیرِ تکانه‌ی زاویه‌ای را در بر دارد؟

۵ رابطه هماهنگ های کروی و نمایش های کاهش ناپذیر

در ابتدای این درس دیدیم که یک نمایش عملگری مثل 27 برای جبرتکانه‌ی زاویه‌ای وجود دارد. این عملگرها در فضای توابع روی کره دوبعدی عمل می کنند. این فضا را با $V(S^2)$ نشان می دهیم . عناصر این فضا توابع مختلطی هستند که روی کره تعریف می شوند. هر عضو آن یک تابع مختلط مثل $f(\theta, \phi)$ است. ضرب داخلی دو بردار (تابع) دراین فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle f, g\rangle = \int d\Omega f^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi). \tag{73}$$

واضح است که عملگرهای 27 یک نمایش یکانی از جبرتکانه‌ی زاویه‌ای تعریف می کنند. اما بنابرقضیه پیتر– وایل نمایش های یکانی کاهش ناپذیر همه می بایست محدود بعد باشند. پس نمایش بی نهایت بعدیِ 27 حتماً یک نمایش کاهش پذیراست و به نمایش های محدود بعد و کاهش ناپذیر تجزیه می شوند.

در حقیقت همین طور است و هرکدام از رشته هارمونیک های کروی با یک l مشخص تشکیل یک نمایش محدود بعد می دهند.

تمرین: با اثر دادن عملگرهای دیفرانسیلی 27 روی هارمونیک های کروی $Y_{2,m}$ نشان دهید که تحت اثر این عملگرهای این هارمونیک ها درست همانطور که از نمایش اسپین—۲ انتظار داریم به هم تبدیل می شوند.

در واقع هرگاه فضای جاروب شده توسط هارمونیک های کروی $Y_{l,m}$ را با V_l نشان دهیم، آنگاه فضای نمایش بی نهایت بعدی $V(S^2)$ به مجموعی از این زیرفضاها تجزیه می شود، یعنی

$$V(S^2) = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \cdots = \bigoplus_{l=0} V_l \qquad (74)$$

حال که رابطه هارمونیک های کروی را با نمایش های کاهش ناپذیر یادگرفته‌ایم می توانیم راهی ساده و جبری برای ساختن هارمونیک های کروی به کار ببریم. این کار از حل کردن معادله وابسته لژاندر خیلی راحت تراست.
می دانیم که

$$\begin{aligned} J^2|j,m\rangle &= j(j+1)|j,m\rangle \\ J_z|j,m\rangle &= m|j,m\rangle. \end{aligned} \qquad (75)$$

درپایه مختصات قرارمی دهیم

$$f_{j,m}(r,\theta,\phi) := \langle \vec{r}|j,m\rangle. \qquad (76)$$

دراین پایه عملگرهای J_z و J^2 به صورت دوعملگر دیفرانسیل و روابط بالا به صورت دو معادله دیفرانسیل درمی آیند. نگاهی به روابط شکل این عملگرها نشان می دهد که تنها به θ و ϕ بستگی دارند. بنابراین نتیجه می گیریم که

$$f_{j,m}(r,\theta,\phi) = f(r)\langle\theta,\phi|j,m\rangle, \qquad (77)$$

که درآن $f(r)$ هرتابع دلخواهی از r و تابع

$$Q_{j,m}(\theta,\phi) := \langle\theta,\phi|j,m\rangle \qquad (78)$$

تابعی روی کره است که د معادلات دیفرانسیل بالا صدق می کند. حال دقت می کنیم که بجای حل معادلات دیفرانسیل فوق می توانیم ازنمایش هایی که بدست آورده ایم استفاده کنیم. اولاً هرگاه $Q_{j,j}(\theta,\phi) := \langle\theta,\phi|j,j\rangle$ را پیداکنیم بقیه توابع به ترتیب زیر بدست می آیند:

$$Q_{j,m}(\theta,\phi) = AJ_-^{j-m}Q_{j,j}(\theta,\phi), \qquad (79)$$

که درآن A یک ثابت بهنجارش و J_- عملگردیفرانسیل زیراست:

$$J_- := e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \qquad (80)$$

ثانیاً $Q_{j,j}(\theta,\phi)$ تابعی است که دردورابطه زیرصدق می کند:

$$\begin{aligned} J_zQ_{j,j}(\theta,\phi) &= jQ_{j,j}(\theta,\phi), \\ J_+Q_{j,j}(\theta,\phi) &= 0, \end{aligned} \tag{81}$$

که درآن J_z و J_+ عملگرهای دیفرانسیل زیرهستند:

$$\begin{aligned} J_z &= -i\frac{\partial}{\partial\phi} \\ J_+ &= e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \end{aligned} \tag{82}$$

بنابراین برای یافتن $Q_{j,j}(\theta,\phi)$ می بایست دو معادله دیفرانسیل زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial}{\partial\phi}Q_{j,j} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Q_{j,j} &= 0. \end{aligned} \tag{83}$$

این معادلات یک جواب یکتا دارند که منهای یک ضریب بهنجارش عبارت است از:

$$Q_{j,j}(\theta,\phi) = (\sin\theta)^j e^{ij\phi}. \tag{84}$$

اما برای j های نیمه صحیح این توابع پیوسته نیستند زیرا به ازای ϕ و $\phi+2\pi$ دو مقدارمتفاوت می گیرند. پیوسته نبودن تابع به این معناست که مشتق $\frac{\partial}{\partial\phi}$ روی این توابع تولید بی نهایت می کند که مانع صدق کردن این توابع درمعادلات بالا می شود. بنابراین حالت های $|j,j\rangle$ و درنتیجه $|j,m\rangle$ برای j های نیمه صحیح توصیفی درفضای مختصات ندارند. تنهاحالت های با j ی صحیح چنین توصیفی دارند. برای تمیزاین حالت ها ازاین به بعد آن هارا با $|l,m\rangle$ نشان می دهیم و شکل تابع موج آنها را روی کره نیزبا $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ نشان می دهیم، یعنی قرارمی دهیم

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) := \langle\theta,\phi|l,m\rangle. \tag{85}$$

توابع $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ هارمونیک های کروی خوانده می شوند. l عدد کوانتومی مربوط به اندازه تکانه زاویه ای و m عدد کوانتومی مربوط به مولفه سوم تکانه زاویه ای است. اندازه تکانه زاویه ای حالت $|l,m\rangle$ با تابع موج $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ برابراست با $\hbar^2l(l+1)$ ومولفه سوم تکانه زاویه ای برابراست با $\hbar m$. بحث فوق به مانشان می دهد که

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) = A_l\sin^l\theta e^{il\phi}, \tag{86}$$

که درآن A_l یک ضریب بهنجارش است. این ضریب بهنجارش را می توان به ترتیب زیربدست آورد. باید داشته باشیم

$$\int_0^\pi \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi |Y_{l,l}|^2 = A_l^2 2\pi \int_0^\pi \sin^{2l+1}\theta = 1. \tag{87}$$

اما می دانیم که

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta = \frac{m!n!}{2(m+n+1)!}, \tag{88}$$

و $n! = n(n-1)!$ و $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

تمرین: نشان دهید که

$$A_l = \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{2\pi 2^{l+1}} l!}. \tag{89}$$

درنتیجه

$$Y_{l,l}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{2\pi 2^{l+1}} l!} \sin^l\theta e^{il\phi}. \tag{90}$$

بقیه هارمونیک های کروی را بااثر عملگرهای پایین آورنده یعنی عملگر $L_- = e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$ روی $Y_{l.l}$ بدست می آوریم. درزیرهارمونیک های کروی را برای $l=0$ و $l=1$ بدست می آوریم.

الف: هارمونیک های کروی با $l=0$

دراین حالت فقط یک هارمونیک کروی داریم که عبارت است از

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \tag{91}$$

الف: هارمونیک های کروی با $l=1$

دراین حالت سه هارمونیک کروی داریم که عبارت اند از $Y_{1,1}, \quad Y_{1,0}, \quad Y_{1,-1}$. باتوجه به رابطه 90 داریم

$$Y_{1,1}(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta e^{i\phi}. \tag{92}$$

دقت کنید که علامت $-$ ناشی از قراردادهای رایج است. ازنمایش اسپین یک داریم

$$|1,0\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}} L_- |1,1\rangle,$$

$$|1,-1\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}L_-|1,0\rangle. \tag{93}$$

بنابراین بدست می آوریم

$$\begin{aligned} Y_{1,0}(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y_{1,1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cos\theta, \\ Y_{1,-1}(\theta,\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)Y_{1,0}(\theta,\phi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}. \end{aligned} \tag{94}$$

برای آنکه با شکل فضایی این هارمونیک ها و ارتباط آنها با مفهوم اوربیتال ها بیشترآشنا شویم هارمونیک های مربوط به $l=1$ را رسم می کنیم. دقت کنید که شکل کامل تابع موج عبارت است از

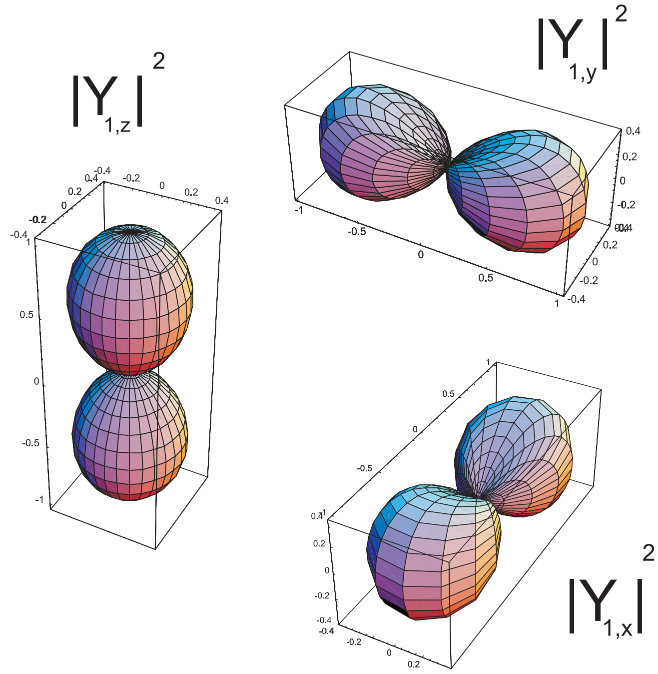
$$\psi_{E,l,m}(r,\theta,\phi)=f(r)Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{95}$$

تمرین: با روش جبری نخست تابع $Y_{1,-1}$ را بدست آورید. سپس با اثردادن عملگرهای J_+ روی این تابع دیگرهارمونیک های کروی $Y_{1,m}$ را پیداکنید.

تمرین: با استفاده از روش جبری هارمونیک های کروی $Y_{2,m}$ را بدست آررید.

این تابع موج نشان دهنده حالتی است که انرژی ذره برابر با E ، تکانه‌ی زاویه‌ای کل آن برابر با $\hbar^2 l(l+1)$ و مولفه سوم تکانه‌ی زاویه‌ای آن برابر با $\hbar m$ است. چگالی احتمال ذره به صورت $|f_E(r)|^2|Y_{l,m}|^2$ نوشته می شود که به صورت حاصل ضرب یک تابع از شعاع در یک تابع از زاویه‌های روی کره است. هرگاه در یک شعاع ثابت به چگالی ابر الکترونی نگاه کنیم یعنی روی یک کره حرکت کرده و به چگالی این ابر نگاه کنیم، تغییرات غلظت آن مطابق با تابع $|Y_{l,m}(\theta,\phi)|^2$ داده می شود. برای تجسم بهتر می توانیم این تابع را روی کره رسم کنیم به این معنا که به ازای هر نقطه با مختصاتِ (θ,ϕ) روی کره شعاعی به اندازه‌ی $r:=|Y_{l,m}(\theta,\phi)|^2$ روی همان نقطه رسم می کنیم. به این ترتیب شکل هارمونیک $|Y_{0,0}|^2$ یک کره خواهد شد و شکل هارمونیک $|Y_{1,0}|^2$ به صورت تابع $r=\frac{3}{2\pi}\cos^2\theta$ داده خواهد شد، شکل (). این همان اوربیتال دامبل شکلی است که در راستای محور z قرار گرفته است، به همین دلیل یک اسم مناسب برای هارمونیک کروی $Y_{1,0}$، $Y_{1,z}$ است، شکل (۲). توجه کنید که معنای این شکل این نیست که غلظت ابر الکترونی منحصر به درون این اوربیتال است بلکه فقط و فقط نشان می دهد که غلظت این ابر نسبت به زوایای مختلف چگونه است. چگالی احتمال کل به عنوان تابعی از نقاط فضا فقط وقتی بدست می آید که تابع شعاعی را نیز معین کرده باشیم.

ممکن است از خود بپرسیم که اوربیتال های دامبل شکلی که محورِ آنها در راستای محورهای x یا y هستند، کدام ها هستند؟ این سوال از آن جهت جالب است که اگر شکل فضایی هارمونیک های $|Y_{1,1}|^2$ و $|Y_{1,-1}|^2$ را تصور کنیم به وضوح با



شکل ۲: اوربیتال های $Y_{1,z}, Y_{1,x}, Y_{1,y}$

آن اوربیتال ها متفاوتند. برای بدست آوردن شکل چنین اوربیتالهایی کافی است که بجای $Y1,1$ و $Y_{1,-1}$ اوربیتال های زیر را تعریف کنیم:

$$Y_{1,x} := Y_{1,1} - Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\cos\phi,$$
$$Y_{1,y} := Y_{1,1} + Y_{1,-1} = i\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\sin\phi. \qquad (96)$$

شکل فضایی این اوربیتال ها همان هایی است که در درس های شیمی با آن آشنا شده ایم یعنی دامبل هایی که محورهای آنها در راستای x یا y قرار گرفته‌اند، شکل (۲)

تمرین: از برنامه‌ای مثل $Mathematica$ یا $Maple$ یا $Matlab$ استفاده کنید و شکل فضایی هارمونیک های کروی $|Y_{2,m}|$ را رسم کنید. هم چنین شکل فضایی هارمونیک هایی که به صورت زیر تعریف می شوند را نیز رسم کنید:

$$Y_{2,0},\quad Y_{2,x} = Y_{2,2} + Y_{2,-2},\quad Y_{2,y} = Y_{2,2} - Y_{2,-2},\quad Y_{1,x} = Y_{2,1} + Y_{2,-1},\quad Y_{2,x} = Y_{2,1} - Y_{2,-1}. \qquad (97)$$

۱.۵ پاریته هماهنگ های کروی

عملگرپاریته درسه بعد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Pi|\vec{r}\rangle = |-\vec{r}\rangle. \qquad (98)$$

به همان ترتیبی که دردرس های پیشین نشان دادیم می توان روابط زیر را ازتعریف فوق نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}&\Pi|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle,\\ &\{\Pi, X\} = \{\Pi, Y\} = \{\Pi, Z\} = 0,\\ &\{\Pi, P_x\} = \{\Pi, P_y\} = \{\Pi, P_z\} = 0.\end{aligned} \tag{99}$$

ازدو رابطه اخیربدست می آید که

$$[\Pi, L_x] = [\Pi, L_y] = [\Pi, L_z] = 0, \quad \longrightarrow \quad [\Pi, L^2] = 0. \tag{100}$$

بنابراین ویژه حالت های مشترک L^2 و L_z ویژه حالت پاریته هم هستند. برای آنکه پاریته حالت های $|l,m\rangle$ راپیداکنیم آنها را درپایه مختصات مطالعه می کنیم. می دانیم که اثر پاریته درمختصات کروی به شکل زیراست:

$$\Pi|r,\theta,\phi\rangle = |r,\pi-\theta,\phi+\pi\rangle. \tag{101}$$

فرض کنید که پاریته حالت $|l,l\rangle$ برابر با α باشد. دراین صورت بادرنظرنگرفتن مختصه شعاعی خواهیم داشت

$$\langle\theta,\phi|\Pi|l,l\rangle = \langle\pi-\theta,\phi+\pi|l,l\rangle, \tag{102}$$

ویا

$$\alpha Y_{l,l}(\theta,\phi) = Y_{l,l}(\pi-\theta,\phi+\pi). \tag{103}$$

نگاهی به شکل تابع $Y_{l,l}(\theta,\phi)$ نشان می دهد که $\alpha = (-1)^l$. ازآنجا که عملگر L_- با پاریته جابجامی شود نتیجه می گیریم که دیگرحالت های یک چند تایی با l ثابت همگی یک پاریته دارند. بنابراین

$$\Pi|l,m\rangle = (-1)^l|\lambda,m\rangle. \tag{104}$$

درپایان بهتراست فرم کلی هماهنگ های کروی را برای استفاده درآینده بنویسیم. صحت روابط زیر را خواننده می تواند یا با محاسبه به روشی که گفته شد تحقیق کند. روابط بیشتر را خواننده می تواند با مراجعه به کتاب های ریاضی فیزیک پیداکند.

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \qquad m \geq 0. \tag{105}$$

$$Y_{l\ -m} = (-1)^m Y_{lm}^*. \tag{106}$$

دراین روابط $P_l^m(x)$ چند جمله ای های وابسته لژاندر هستند که یک پایه متعامد برای فضای چند جمله ای ها تشکیل داده‌وبرای $m \geq 0$ به طریق زیر تعریف می شوند:

$$P_l^m(x) = (-1)^{l+m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d}{dx}^{\,l-m} (1-x^2)^l, \tag{107}$$

و برای $m < 0$ به طریق زیر:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \tag{108}$$

تمرین: نشان دهید که شرایط زیر همواره برقرارند:

$$\begin{aligned} \langle l, m | X_a | l'.m' \rangle &= 0 \quad if \quad |l - l'| = even, \\ \langle l, m | P_a | l'.m' \rangle &= 0 \quad if \quad |l - l'| = even. \end{aligned} \tag{109}$$

۶ معادله شعاعی

برای ذره ای که دریک پتانسیل مرکزی حرکت می کند هامیلتونی به شکل زیراست

$$H = \frac{1}{2\mu} \vec{P} \cdot \vec{P} + V(r), \tag{110}$$

که درآن $r = (\vec{R} \cdot \vec{R})^{\frac{1}{2}}$ و جرم ذره را با μ نشان داده ایم. این پتانسیل بوضوح تقارن دورانی دارد و بامولفه های تکانه زاویه ای جابجامی شود. بنابراین می توانیم طیف مشترک H, L_z و L^2 را پیداکنیم. برای این کار ازرابطه $L^2 = R^2 P^2 - (\vec{R} \cdot \vec{P}^2 + i\hbar(\vec{R} \cdot \vec{P}))$ استفاده می کنیم ومعادله شرودینگر را به شکل زیربازنویسی می کنیم

$$\left[\frac{L^2 + (\vec{r} \cdot \vec{P})^2 - i\vec{r} \cdot \vec{P}}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi), \tag{111}$$

که درآن $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$ عملگرتکانه درپایه مختصات است. حال ویژه تابع را به شکل زیردرنظرمی گیریم

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{l,m}(\theta, \phi), \tag{112}$$

و پس ازجایگذاری درمعادله فوق به رابطه زیرمی رسیم

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}-\frac{1}{\mu r}\frac{d}{dr}+V_{eff}(r)\right]f(r)=Ef(r), \tag{113}$$

که درآن V_{eff} پتانسیل موثراست و شکل آن برابراست با

$$V_{eff}(r)=V(r)+\frac{l(l+1)}{2\mu r^2}. \tag{114}$$

به معادله فوق معادله شعاعی شرودینگر گفته می شود. دقت کنید که V_{eff} همان پتانسیل معمولی است که پتانسیل دافعه‌ی ناشی از تکانه‌ی زاویه‌ای به آن اضافه شده است. برای وقتی که ذره تکانه‌ی زاویه‌اش صفر باشد این دنباله دافعه وجود ندارد و هرچقدر که تکانه‌ی زاویه‌ای بیشتر باشد این پتانسیل دافعه نیز بیشتر خواهد بود. اثر این پتانسیل دافعه در مکانیک کلاسیک آن است که مانع نزدیک شدن ذره به مرکز پتانسیل می شود ولی در مکانیک کوانتومی اثرش این است که احتمال وجود ذره را در نزدیکی های مرکز پتانسیل کاهش می دهد.

دقت کنید که دراین معادله ثابت پلانک را برابربا ۱ گرفته ایم. هرجا که لازم باشد می توانیم مقدارواقعی این ثابت را درروابط قراردهیم. هرگاه قراردهیم

$$f(r)=\frac{R(r)}{r}$$

آنگاه معادله حاکم بر R به شکل ساده تر زیردرمی آید که کاملا با معادله یک بعدی شرودینگر برای یک پتانسیل موثر یکسان است:

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)+\frac{l(l+1)}{2\mu r^2}\right]R(r)=E\ R(r), \tag{115}$$

تمرین: معادله شعاعی شرودینگر را برای اتم هیدروژن و با جایگزاری واحدهای صحیح بنویسید. این کار را برای ذره آزاد نیز انجام دهید.

تمرین: نشان دهید که شرط بهنجارش برای تابع شعاعی R به شکل زیراست:

$$\int_0^\infty dr|R(r)|^2=1. \tag{116}$$

۷ ضمیمه

دراین قسمت می خواهیم با چندجمله‌ای های لژاندر و توابع وابسته‌ی لژاندر آشناشویم. خواننده می بایست ضمن خواندن متن تمرین های کوچکی را که طرح کرده‌ایم حل کند تا بتواند متن را بخوبی دنبال کند. مثل همیشه این توابع را با مولد آنها معرفی می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$g(t,x) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \qquad |t| < 1. \tag{117}$$

توابع $P_n(x)$ چند جمله‌ای هایی از درجه‌ی n هستند و چندجمله‌ای های لژاندر خوانده می شوند.
تمرین: نشان دهید که چند جلمه‌ای های لژاندر خاصیت های زیر را دارند:

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n, \tag{118}$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad P_{2n+1}(0) = 0. \tag{119}$$

تمرین: با بسط طرف چپ رابطه (117) و مقایسه عبارت زیر را برای چند جمله‌ای های لژاندر بدست آورید:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}. \tag{120}$$

تمرین: روابط تکرار: با مشتق گیری از طرفین رابطه‌ی (117) نسبت به متغیر t و مقایسه طرفین نشان دهید که:

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \tag{121}$$

هم چنین با مشتق گیری از طرفین نسبت به متغیر x و مقایسه طرفین نشان دهید که

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x). \tag{122}$$

تمرین: معادله دیفرانسیل: با ترکیب روابط تکرار بالا نشان دهید که $P_n(x)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$(1-x^2)P_n" - 2xP'_n + n(n+1)P_n(x) = 0. \tag{123}$$

تمرین: تعامد: با نوشتن معادله دیفرانسیل لژاندر، معادله‌ای که درتمرین قبل بدست آوردید، یک بار برای پارامترِ m و یک بار برای n و انجام عملیات مناسب نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad m \neq 0. \tag{124}$$

حال با استفاده از این مطلب می توانید چند جمله‌ای های لژاندر را بهنجار کنید. برای این کار دو طرف رابطه‌ی (117) را مربع کرده و روی متغیر x از -1 تا 1 انتگرال بگیرید. برای این کار می بایست نخست انتگرال طرف چپ را به عنوان تابعی از متغیر t حساب کرده و آن را به عنوان تابعی از t بسط دهید. دراین صورت ثابت خواهید کرد که

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{125}$$

تمرین: فرمول رودریگز: نشان دهید که $P_n(x)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n. \tag{126}$$

یک راه برای حل این تمرین آن است که نشان دهید این عبارت در معادله دیفرانسیل لژاندر صدق می کند. راه بهتر آن است که از عبارت (120) شروع کنید واز اتحاد دوجمله‌ای وهم چنین دو اتحاد زیر استفاده کنید:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \tag{127}$$

و

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^k(x) g^{n-k}(x), \tag{128}$$

که درآن معنای $f^k(x)$ مشتق مرتبه‌ی k از تابع f است.

تمرین: نشان دهید که چند جمله‌ای های اولیه لژاندر مطابق با جدول (۷) هستند.

تمرین: توابع وابسته لژاندر: معادله دیفرانسیل لژاندر را در نظر بگیرید:

$$(1-x^2)P_n" - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{129}$$

حال قرار دهید

$$u := \frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \tag{130}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

چند جمله‌ای های اول لژاندر :3

و معادله دیفرانسیل حاکم بر u را بدست آورید. سپس قرار دهید

$$v = (1 - x^2)^{m/2} u \tag{131}$$

و نشان دهید که v در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$(1 - x^2)v" - 2xv' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}]v = 0. \tag{132}$$

این معادله، همان معادله دیفرانسیل وابسته لژاندراست. با استفاده از روابطی که بدست آورده اید، چند تابع اولیه لژاندر را بدست آورید و نشان دهید که مطابق با جدول (۳) هستند.