کیهان شناسی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۷ بهمن ۱۴۰۳

۱ مقدمه

« ... از دیر باز ، زمانی که نورشهرها در کار نبود و شب ها آسمان بی ابر واقعاً زیبا بود، اجداد ما با دیدن این آسمان زیبا از خودشان پرسیده اند: واقعا آن بالا چه خبر است؟ چرا ما اینجا هستیم؟ آیا کسانی مثل ما آن بالا هم هستند؟ چه کسی ما را اینجا قرار داده؟ این آسمان را چه کسی ساخته؟ هدف از این خلقت چه بوده و عاقبت اش چیست؟ از کجا آمده و قرار است چه شود؟ این زندگی ما واقعا هدف اش چیست؟.... »

جملات فوق بخشی از فصل نخست کتابِ «در جستجوی فهم کیهان» نوشته بهرام مشحون و شانت باغرام دو کیهان شناس برجسته از دانشگاه صنعتی شریف است، که با زبانی ساده و جذاب و البته با استفاده حداقلی از ریاضیات، تاریخ تحول فهم ما از کیهان را شرح می دهد. برای هر کسی که بخواهد با کیهان شناسی آشنا شود، این کتاب مدخلی بی اندازه زیباست. با این فرض که خواننده این فصل با مفاهیم اولیه کیهانشناسی، آشناست، در این فصل سعی می کنیم توضیح دهیم که نسبیت عام چگونه به ساختن مدل های ساده کیهانشناسی می انجامد و این مدل ها چه نتایجی در بر دارند. البته باید تاکید کنیم که این فصل از درسنامه نسبیت به هیچ وجه جایگزین یک درس در کیهانشناسی نیست و تنها مقدمه ای برای فهمیدن مقدمات آن در چارچوب نسبیت عام است. خواننده علاقمند برای مطالعه دقیق کیهان شناسی باید به کتاب های تخصصی این رشته مراجعه کند. این درس را با پارادکس اولبرز آغاز می کنیم و سپس نشان می دهیم که چگونه می توان با استفاده از گرانش نیوتنی نیز یک مدل کیهانشناسی ساخت. پس از آن به معرفی ابتدایی کیهان شناسی نسبیتی خواهیم پرداخت.

امروزه به مدد مشاهدات رصدی فراوان می دانیم که کیهان در حال انبساط است و مدل ایستای کیهانی [۱] که اینشتین در ابتدا به آن باور داشت و فرد هویل [۲] در بسط نظری آن کوشیده بود، مدتهاست که اعتبار خود را از دست داده است. مدلی که اکنون قبول عام یافته موسوم به انفجار بزرگ داغ [۳] است که بر مبنای آن تمام عالم سیزده میلیاردسال پیش از انفجار یک نقطه تکین پدید آمده است. در لحظات اولیه جهان ما مملو از تابش در دماهای فوق العاده بالا و چگالی های بی اندازه زیاد بوده است. با انبساط کیهان، دما و چگالی به تدریج کاهش یافته و پروتون ها، الکترون

[۱] Steady State Universe
[۲] Fred Hoyle
[۳] Hot Big Bang

ها و نوترون ها از حمام تابشی امکان وجود یافته اند. با سرد شدن بیشتر، نخست اتم های سبک و پس از آن اتم های سنگین تر تشکیل شده اند. امروزه می دانیم که در ۳ تا ۲۰ دقیقه اول اتم هایی مثل هیدروژن H ، هلیوم سه ^3He هلیوم چهار ^4He دوتریوم ^2H و عناصر کمی سنگین تر مثل ایزوتوپ هایی از بریلیوم ^7Be و لیتیوم ^7Li تشکیل شده اند. محاسبه فراوانی این عناصر و مطابقت دقیق نتایج آن با مشاهدات تجربی یکی از موفقیت های بزرگ کیهان شناسی مدرن است. توضیح دقیق تابش زمینه کیهانی نیز یکی دیگر از این موفقیت های بزرگ است.

قبل از پرداختن به ادامه این درس، بهتر است نخست سوالی را طرح کنیم که هر ذهن کنجکاوی در اولین مواجهه خود با کیهان شناسی با آن روبرو می شود. سوال این است که «چگونه می توانیم قوانینی را که روی زمین یا حد اکثر در همین نزدیکی و در منظومه شمسی یا فراتر از آن آزموده ایم به کل کیهان تعمیم دهیم؟ » قبل از هر گونه تلاش برای ساختن مدل های کیهانشناسی باید به چنین سوالی پاسخ دهیم. پاسخی کوتاه به آن می تواند چنین باشد. از زمان کپرنیک به بعد یاد گرفته ایم که ما هیچ موقعیت ممتازی در عالم نداریم و همه جای کیهان مثل هم است. بنابراین هر قانونی که در اینجا کشف شود، در بقیه نقاط کیهان هم معتبر است. اتم ها همانگونه در این جا رفتار می کنند که در دیگر ستارگان و کهکشان ها. مکانیک کوانتومی به همان نحو رفتار آنها را در آزمایشگاه های زمینی توصیف می کند که در آسمانها. مشاهدات طیف سنجی اتم ها و بسیاری دیگر از مشاهدات نشان می دهند که گرانش و الکترومغناطیس به عنوان دو نیروی مهم طبیعت در مقیاس های ستاره ای و کهکشانی به همان شکلی رفتار می کنند که در روی زمین قوانین آنها را کشف کرده ایم. با این وجود نمی توان این امکان را نادیده گرفت که ممکن است نیروهایی در مقیاس های خیلی بزرگ کیهانی در کار باشند که ما هنوز نتوانسته ایم آنها را کشف کنیم. ممکن است منشاء ماده تاریک یا انرژی تاریک چنین نیروهایی باشند. در این مرحله این سوال یک سوال باز است.

۲ چرا آسمان شب تاریک است؟

می دانیم که نوری که از یک ستاره به بیرون تابیده می شود به نسبت عکس مجذور فاصله کاهش می یابد. با این وجود اگر جهان بی نهایت باشد و ستاره ها به طور یک نواخت در آن پراکنده باشند، حتی اگر چگالی پراکندگی ستاره ها در آسمان بسیار رقیق هم باشد، آنگاه می توان استدلال کرد که شب نیز می بایست مثل روز، روشن و نورانی باشد. این همان چیزی است که پارادکس اولبرز نامیده می شود و استدلالش چنین است. اگر چگالی ستاره ها را در واحد حجم (مثلا تعداد بر مکعب سال نوری) برابر با ν بگیریم، آنگاه در یک پوسته نازک کروی به شعاع dr و فاصله r از ما تعداد $\nu 4\pi r^2 dr$ ستاره وجود دارد. اگر درخشندگی ذاتی (یعنی مقدار تابش کل) هر ستاره را l_0 بگیریم، آنگاه مقدار تابشی که در هر واحد سطح از نقطه ای که ما هستیم از یک ستاره دریافت می کنیم برابر است با

$$l = \frac{l_0}{4\pi r^2}. \qquad (۱)$$

در نتیجه مقدار تابشی که در هر واحد سطح از کلیه ستارگانی که در آن پوسته کروی دریافت می کنیم برابر خواهد بود با

$$L = \nu 4\pi r^2 dr \times l = \nu 4\pi r^2 dr \times \frac{l_0}{4\pi r^2} = \nu l_0 dr, \qquad (۲)$$

و اگر جهان بی نهایت باشد، آنگاه میزان کل تابشی که دریافت می کنیم برابر است با $\int_0^\infty \nu l_0 dr$ که بی نهایت است. یعنی آسمان شب نه تنها باید مثل روز روشن باشد، بلکه خیلی بیش از آن، می بایست بی نهایت سوزان باشد.

شکل ۱: هاینریش ویلهلم ماتیاس اولبرز (۱۷۵۸ــ۱۸۴۰ میلادی)

هاینریش ویلهلم ماتیاس اولبرز[1] فیزیکدان، منجم و پزشک آلمانی بود که در ۱۷۵۸ میلادی متولد شد و در ۱۸۴۰ در سن هشتاد و یک سالگی در گذشت. البته نجوم برای او یک فعالیت جانبی بود که آن را در کنار فعالیت های دیگرش از جمله پزشکی دنبال می کرد. ظاهرا طبقه دوم خانه اش را تبدیل به یک رصد خانه کرده بود و شب ها به رصد ستارگان و دنباله دارها می پرداخت. او چند سیارک و ستاره دنباله دار نیز کشف کرد. نظریه او در باره منشاء سیارک ها این بود که اینها بقایای یک سیاره است که در اثر برخورد با یک سیاره بزرگ تر خرد شده است. امروزه این نظریه به دلایل متعدد رد شده، از جمله این که جرم کل سیارک هایی که در یک کمربند بین مریخ و مشتری قرار دارند، آن اندازه نیست که سیاره ای را تشکیل داده باشند. امروز نظر پذیرفته شده این است که این ها بقایای آن چیزی است که می توانسته سیاره شود ولی گرانش قوی سیاره مشتری اجازه آن را نداده است. نظریه اولبرز در باره منشاء ستاره های دنباله دار و چگونگی حرکت آنها در منظومه شمسی امروز هم معتبر است. شهرت اولبرز البته بیش از هر چیز مدیون پارادوکسی به نام اوست که در ابتدای این فصل به آن می پردازیم و آن این است که چرا آسمان شب تاریک است؟

[1] Olbers Mattias Wilhelm Heinrich

۳ کیهان شناسی نیوتنی

برای ساختن ساده ترین مدل های کیهانشناسی نیازی به استفاده از نسبیت عام نیست و با همان گرانش نیوتنی نیز می توان خصوصیات اصلی یک مدل کیهان شناسی ساده را بررسی کرد. چه در کیهان شناسی نیوتنی و چه در کیهان شناسی نسبیتی، مثل هر نوع مدل سازی دیگری، نخست از جزئیات صرف نظر می کنیم و به اصلی ترین ویژگی های کیهان می پردازیم. بعد از آن می توانیم جزییاتی مثل ناهمگنی را اضافه کنیم تا مدل کامل

تری بدست آوریم. (البته این کاری نیست که ما در این درس مقدماتی انجام دهیم.)

در یک مدل ساده می توانیم موقعیت هر کهکشان را (که از این به بعد و در مقیاس کیهانی آن را ذره می نامیم) در زمان t با $\mathbf{r}(t)$ نشان دهیم. داریم

$$\mathbf{r}_(t) = r_i(t)\hat{\mathbf{r}} \tag{۳}$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه ای است که جهت مکان کهکشان را مشخص می کند. اگر جرم هر کهکشان را با m_i نشان دهیم، در این صورت انرژی جنبشی کل کهکشان ها برابر است با:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \tag{۴}$$

انرژی پتانسیل گرانشی کهکشان ها نسبت به هم نیز برابر است با:

$$V = -G\sum_{1=i<j}^{n} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{۵}$$

که در آن G ثابت گرانش است. (فرض شده است که ثابت گرانش در همه فاصله ها یکسان است.) علاوه بر اینها باید یک نیروی دافعه را که ناشی از ثابت کیهان شناسی است در نظر بگیریم:

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{3}\Lambda m_i \mathbf{r}_i. \tag{۶}$$

این نیروی دافعه از پتانسیل زیر بدست می آید.

$$V_c = -\frac{1}{6}\Lambda\sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2. \tag{۷}$$

به این ترتیب انرژی کل کیهان برابر می شود با:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 - G\sum_{1\leq i<j}^{n} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{۸}$$

فاکتور مقیاس $S(t)$ که نشان می دهد موقعیت یک کهکشان در طول زمان چگونه در زمینه کل کیهان تغییر می کند و نشانه ای است از میزان انبساط کیهانی به صورت زیر تعریف می شود.

$$r_i(t) =: S(t) r_i(t_0) \tag{۹}$$

در این صورت می توانیم بنویسیم:

$$\dot{r}_i(t) = \dot{S}(t) r_i(t_0) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} r_i(t) \tag{۱۰}$$

ثابت هابل [۴] نیز مطابق تعریف برابر است با:

$$H(t) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}. \tag{۱۱}$$

[۴] Hubble Constant

این ثابت چگونگی انبساط یا انقباض کیهان را نشان می دهد. صفر بودن آن به معنای ایستا بودن کیهان، و مثبت یا منفی بودن آن به ترتیب به معنای انبساط یا انقباض کیهانی است. با این تعاریف می توانیم بنویسیم:

$$\dot{r}_i(t) = H(t)r_i(t) \qquad (۱۲)$$

حال می توانیم انرژی کل کیهانی را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i^2 - G\sum_{1\leq i<j}^{n}\frac{m_im_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{S}(t)^2r_i(t_0)^2 - G\sum_{1\leq i<j}^{n}\frac{m_im_j}{S(t)|\mathbf{r}_i(t_0)-\mathbf{r}_j(t_0)|} - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} m_iS^2(t)r_i(t_0)^2. \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

با جمع و جور کردن فاکتورهایی که به زمان t بستگی ندارند و نامگذاری آنها، می توان معادله بالا را به شکل ساده زیر نوشت:

$$E = A\dot{S}(t)^2 - \frac{B}{S(t)} - DS(t)^2, \qquad (۱۴)$$

که در آن ضرایب $A,\ B$ و D این ها هستند:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2(t_0), \qquad (۱۵)$$

$$B = G\sum_{1\leq i<j}^{n}\frac{m_im_j}{|\mathbf{r}_i(t_0)-\mathbf{r}_j(t_0)|}, \qquad (۱۶)$$

و

$$D = \frac{1}{6}\Lambda\sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2(t_0) = \frac{1}{3}\Lambda A. \qquad (۱۷)$$

با مرتب کردن جمله ها در معادله (۱۴) به این رابطه می رسیم:

$$\begin{aligned} \dot{S}^2 &= (\frac{B}{A})\frac{1}{S} + \frac{D}{A}S^2 + \frac{E}{A} \\ &= \frac{B}{A}\frac{1}{S} + \frac{\Lambda}{3}S^2 + \frac{E}{A}. \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

می توانیم این معادله را بازهم ساده تر کنیم. برای این منظور کمیت $R(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R(t) := \mu S(t) \qquad (۱۹)$$

که در آن μ پارامتری است که بعداً آن را تعیین می کنیم. در نتیجه معادله (۱۸) به صورت زیر در می آید:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - k \qquad (۲۰)$$

که در آن

$$C = B\mu^3/A, \qquad k = -\mu^2E/A. \qquad (۲۱)$$

اگر $E=0$ باشد، این معادله به شکل زیر در می آید:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \tag{۲۲}$$

اگر E غیر صفر باشد، می توانیم μ را به شکل زیر تعیین کنیم

$$\mu^2 = \frac{A}{|E|} \tag{۲۳}$$

که در این صورت معادله (۱۸) به صورت زیر در می آید:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 \mp 1, \tag{۲۴}$$

که در آن علامتِ -1 برای انرژی مثبت و علاومت $+1$ برای انرژی منفی است. به این ترتیب معادله انبساط یا انقباض یا به طور کلی تحول کیهانی را از گرانش نیوتنی نیز بدست می آوریم. بعدها در همین درس خواهیم دید که گرانش نسبیتی اینشتین نیز به همین معادله منجر خواهد شد.

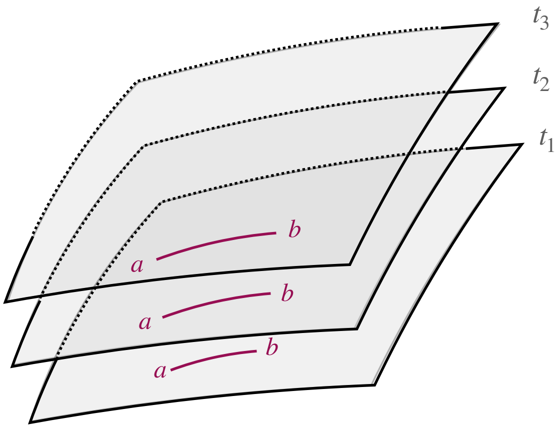
۴ اصل کیهانشناسی

تا قبل از کپرنیک، فکر می کردیم که زمین مرکز عالم است و خورشید و ستارگان همگی به دور زمین می گردند. کپرنیک این اعتقاد قدیمی را واژگون کرد. از آن به بعد موقعیت کره زمین و به تبع آن انسان مرتباً سقوط کرده یا تعدیل شده، چه از نظر جغرافیایی که موضوع درس ماست و چه از نظر زیستی که موضوع درسی در زیست شناسی و انسان شناسی است و موضوع درس ما نیست. امروزه می دانیم که خورشید هم مرکز عالم نیست، بلکه ستاره ای است همچون میلیاردها ستاره دیگر که در دیسک کهکشانی به قطر حدود یک صدهزار سال نوری هر دویست و پنجاه میلیون سال به دور مرکز این دیسک می چرخد. حتی کهکشان راه شیری هم مرکز عالم نیست، بلکه عضو گروهی از کهکشان ها موسوم به گروه محلی [۵] است که ضمن داشتن حرکاتی موضعی در آسمان بی انتها شناور است و مثل این کهکشان بیش از صد میلیارد کهکشان دیگر نیز هست. این بدان معناست که هیچ نقطه ای از کیهان موقعیت ممتازی نسبت به نقاط دیگر ندارد. البته این حرف تنها در مقیاس های خیلی بزرگ درست است چرا که ما می دانیم همه جای آسمان ها مثل هم نیست. این جا زمین هست و بعد ماه و بعد مریخ و مشتری و دیگر سیارات و بعد خورشید و بعد فضای خالی به اندازه چهار سال نوری تا نزدیک ترین ستاره به نام آلفا قنطورس [۶]. در واقع اگر می شد از خیلی خیلی دور یعنی از فاصله های از مرتبه چند صد میلیون سال نوری به کیهان نگاه کنیم، آنوقت از آن بالا کیهان را مثل یک سیال یکنواخت می دیدیم که از مولکولهایی به اسم کهکشان تشکیل شده و این مولکول ها هم چون مولکول های آب یا گاز حرکاتی جزئی به این طرف و آن طرف دارند ولی هیچ جای این سیال با جای دیگر آن فرق ندارد. این آن چیزی است که به آن اصل کیهانشناسی [۷] می گوییم. معنای دقیق اش این است که صرف نظر از این اختلالات موضعی ساختار کیهان گرد هر نقطه ای دارای تقارن دورانی و تقارن انتقالی است. به عبارت دیگر کیهان نسبت به هر نقطه ای هم همسانگرد است و هم همگن. در واقع می توان نشان داد که فضایی که در آن حول هر نقطه همسانگردی وجود داشته باشد، الزاماً همگن نیز هست. به عبارت دیگر تقارن دورانی

[۵] local group
[۶] Alpha-Centauri
[۷] Cosmological Principle

حول هر نقطه در یک فضا الزاماً به تقارن انتقالی در آن فضا منجر خواهد شد.

نتیجه ساده اصل کیهانشناسی این است که فضازمان را می توان به صورت یک برگ بندی [8] از ابررویه های فضاگونه [9] در نظر گرفت که در آن هر ابررویه فضاگونه یک خمینه کاملاً همگن است که هیچ نقطه ای بر نقطه دیگر و هیچ جهتی بر جهت دیگر ترجیح ندارد. این ابر رویه ها هم منهای یک ضریب مقیاس کاملاً مشابه یکدیگر هستند. یعنی با یک تغییر مقیاس ساده این ابر رویه ها بر یکدیگر منطبق خواهند شد، شکل (۲).



شکل ۲: بیان اصل کیهان شناسی به صورت هندسی: فضا زمان یک برگ بندی از ابررویه های فضاگونه است که در زمان های گوناگون روی یک دیگر قرار گرفته اند. هر ابر رویه با یک تغییر مقیاس بر ابررویه دیگر منطبق خواهد شد.

آیا داده های رصدی اصل کیهانشناسی را پشتیبانی می کنند؟ در واقع اگر به داده های مربوط به رصد کهکشان ها از دریچه نور مرئی بنگریم، شواهد تایید کننده این اصل چندان قوی نیستند، چرا که میزان ناهمسانگردی در توزیع این کهکشانها حدوداً ۳۰ درصد است. اما اگر به داده های مربوط به دیگر اجرام و چشمه های کیهانی نگاه کنیم، شواهد موثری برای این اصل بدست می آوریم. در واقع مشاهده ثابت هابل میزان ناهمسانگردی را تا ۲۵ درصد، مشاهدات کهکشانهای رادیویی، به ۵ درصد، مشاهده چشمه های پرتوی ایکس به زیر ۵ درصد و نهایتا تابش زمینه کیهانی میزان ناهمسانگردی را به کسری از یک درصد می رساند. امروزه به مدد این مشاهدات می توانیم با اطمینان بگوییم که اصل کیهانشناسی یک اصل معتبر مشاهداتی است.

۵ اصل موضوع وایل

کیهان شناسی مدرن بر سه اصل اساسی استوار است: نخست آنکه ساختار فضازمان توسط نظریه نسبیت عام توصیف می شود، دوم اصل کیهانشناسی. به کمک این دو اصل می توانیم متریک فضازمان را در مقیاس کیهانی مشخص کنیم. به این ترتیب این دو اصل، طرف چپ معادله اینشتین یعنی

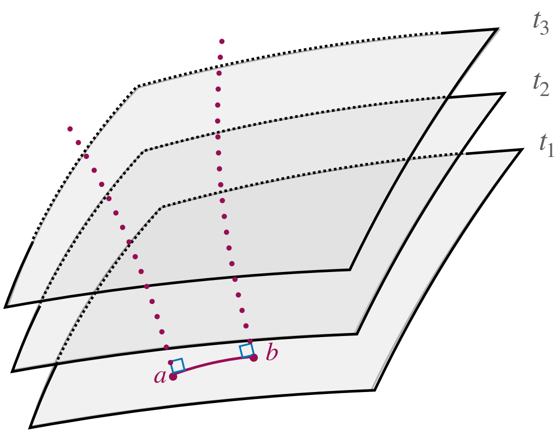
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

[8] Foliation
[9] Space like hypersurfaces

را به طور کامل (منهای یک علامت) تعیین می کنند. باقی می ماند این که در طرف راست این معادله برای تانسور ماده کیهانی چه نوع تانسوری باید قرار دهیم. این کار توسط اصل موضوع وایل که اصل سوم کیهان شناسی است انجام می شود. در مقیاس های خیلی بزرگ (چند مگا پارسک) که کهکشان ها مثل مولکولهایی در یک سیال همگن هستند، می توان تانسور مربوط به یک سیال کامل را قرار داد که شکل آن چنین است:

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}p, \tag{۲۵}$$

که در آن ρ چگالی و p فشار است. به بیان شهودی این اصل بیان می کند که می توانیم از حرکات خیلی جزئی و موضعی کهکشان ها در مقابل حرکت آنها به واسطه انبساط کیهانی صرف نظر کنیم. در واقع مشاهدات نشان می دهند که حرکات موضعی کهکشان ها سرعتی در حدود چند ده هزارم سرعت نور دارند و حال آنکه حرکت کهکشان ها در اثر انبساط کیهان قابل مقایسه با سرعت نور است. تحت این شرایط می توانیم فرض کنیم که موقعیت کهکشان ها در هر ابر رویه فضای گونه در برگ بندی فضازمان ثابت است (شکل (۲)) و فقط به دلیل انبساط فضا فاصله کهکشان ها از هم زیاد می شود. در نتیجه جهان خط هر کهکشان بر این ابر رویه های فضاگونه عمود خواهد بود. این جهان خط ها یکدیگر را قطع نمی کنند، شکل (۳).



شکل ۳: اصل موضوع وایل. جهان خط کهکشان ها بر ابررویه های فضاگونه عمود هستند. این اصل به معنای این است که می توانیم از حرکت های موضعی و کند کهکشان ها صرف نظر کنیم و هر کهکشانی را به عنوان نقطه ثابتی در این ابر رویه در نظر بگیریم که به واسطه انبساط ابررویه فضاگونه فاصله اش از دیگر کهکشان ها زیاد می شود.

۶ کیهانشناسی نسبیتی

از آنچه که در بخش قبل یاد گرفتیم، نتیجه می گیریم که متریک فضازمان در مقیاس کیهانشناسی باید به شکل زیر باشد که در آن $h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ متریک فضایی روی ابررویه های فضا گونه است.

$$ds^2 = dt^2 - h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{۲۶}$$

این متریک البته می تواند بستگی به زمان داشته باشد و در هر ابررویه به شکل متفاوتی باشد:

$$h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(t, x). \tag{۲۷}$$

اما بنابر اصل وایل حرکات جزیی کهکشان ها در مقابل حرکت کلی (انبساط) ابر رویه ها قابل صرف نظر کردن است و هر نوع تغییر فاصله (افزایش) فاصله کهکشان ها از یکدیگر ناشی از همین انبساط ابر رویه هاست. بنابراین اصل کیهانشناسی هیچ نقطه و جهت مرجحّی در روی ابر رویه ها وجود ندارد. بنابراین متریک $h_{\alpha\beta}(t, x)$ بستگی اش به زمان و فضا به صورت زیر است

$$h_{\alpha\beta} = [S(t)]^2 g_{\alpha\beta}(x^\alpha), \tag{۲۸}$$

که در آن $S(t)$ یک مقیاس زمانی است که نشان دهنده انبساط کلی عالم است. مرحله بعدی این است که متریک روی ابر رویه فضایی $g_{\alpha\beta}$ را تعیین کنیم. در این جا بازهم از اصل کیهانشناسی استفاده می کنیم. بنابراین اصل ابر رویه فضا گونه تنها می تواند فضایی باشد با انحنای ثابت، یعنی انحنایی که بستگی به نقطه نداشته باشد. این گونه فضاها در ریاضیات قبلا طبقه بندی شده اند. بررسی خصوصیات کلی این فضاها موضوع بخش بعدی است.

۷ فضاهای با انحنای ثابت

در هندسه دیفرانسیل ثابت می شود که تانسور ریمان برای فضایی با انحنای ثابت باید به شکل زیر باشد که در آن K یک ثابت است.

$$R_{abcd} = K(g_{ad}g_{bc} - g_{ac}g_{bd}) \tag{۲۹}$$

در یک فضای n بعدی با این تانسور ریمان، تانسور ریچی به شکل زیر در می آید:

$$R_{bc} = g^{ad}R_{abcd} = Kg^{ad}(g_{ad}g_{bc} - g_{ad}g_{bc}) = (n-1)Kg_{bc}. \tag{۳۰}$$

به این ترتیب در هر فضایی شکل متریک این گونه فضاها را با الزام آنها به رعایت تناسب بالا می توان بدست آورد. البته قبل از آن می توان با استفاده از تقارن ها، شکل متریک را نخست محدود کرد. این موضوع را در مثال هایی که در ادامه خواهد آمد خواهیم دید.

۱.۷ فضا های دو بعدی با انحنای ثابت

برای آنکه تصویر شهودی ملموسی از فضاهای با انحنای ثابت بدست آوریم، نخست به فضاهای دوبعدی با انحنای ثابت توجه می کنیم. فضای دو بعدی به ما اجازه می دهد که بتوانیم این فضاها را براحتی تصور کنیم. در فضای دو بعدی تانسور ریمان فقط یک مولفه دارد، یعنی مولفه R_{1212} که براحتی از روی علائم کریستوفل بدست می آید. به یاد می آوریم که

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\alpha,\mu} - g_{\beta\mu,\alpha}) \tag{۳۱}$$

و

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}. \quad (۳۲)$$

■ **تمرین:** با انتخاب مختصات قطبی (r,ϕ)، و حل رابطه $R_{\mu\nu} = Kg_{\mu\nu}$ نشان دهید که در یک فضای دوبعدی با انحنای ثابت متریک به صورت زیر است:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\phi^2, \quad (۳۳)$$

که در آن $k = 0, \pm 1$ یک ثابت است.

سه حالت را جداگانه بررسی می کنیم.

■ **فضای دو بعدی با انحنای ثابت صفر**

در این صورت $k = 0$ و متریک فضا برابر است با

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (۳۴)$$

این همان متریک یک صفحه دو بعدی تخت و آشنایی است که در مختصات قطبی (r,ϕ) نوشته شده است. r مختصه شعاعی و ϕ مختصه زاویه ای است. با انتخاب مختصات جدید

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

می توان آن را به صورت $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$ نوشت. وقتی متریک را با این مختصات می نویسیم، این فضا چهره آشناتری پیدا می کند. یک صفحه تخت دو بعدی که تا بی نهایت گسترده است. خطوط راست آن همان هایی هستند که با شهود ما سازگارند. از یک نقطه خارج از یک خط راست نیز یک و فقط یک خط موازی با آن می گذرد.

■ **فضای دو بعدی با انحنای ثابت مثبت،**

در این صورت $k = 1$ و متریک فضا برابر است با

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\phi^2. \quad (۳۵)$$

در اینجا r در محدوده ی $0 \le r \le 1$ قرار دارد. باید دقت کنیم که r در اینجا نشان دهنده فاصله یک نقطه از مبداء مختصات نیست. در واقع می توان فاصله یک نقطه با مختصه (r,θ) از مبدا را روی یک خط شعاعی به دست آورد:

$$l(r,\theta) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-r'^2}} = \sin^{-1} r \quad (۳۶)$$

که براحتی معلوم می شود، فاصله دورترین نقطه از مبداء مختصات، فقط $\frac{\pi}{2}$ است. هم چنین می توانیم طول دایره هایی را که مختصه r آنها ثابت است بدست آوریم:

$$P(r) = \int_0^{2\pi} r\, d\phi = 2\pi r. \quad (۳۷)$$

که نشان می دهد محیط این دایره ها نیز حداکثر به اندازه 2π است. بنابراین در این جا ما با یک فضای بسته و محدود سروکار داریم. احتمالا این فضا مثل یک کره است و با توجه به شکل (**؟؟**) می توانیم به جای مختصه های (r, ϕ) مختصات آشناتری مثل (θ, ϕ) برای آن بکار ببریم. در نتیجه متریک به صورت زیر در می آید.

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \tag{۳۸}$$

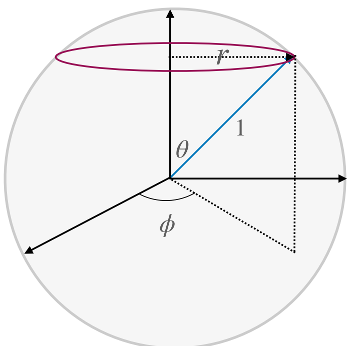
که همان متریک آشنا برای سطح یک کره با شعاع برابر با یک است که هر نقطه اش نیز با مختصات (θ, ϕ) مشخص می شود. شکل (۴). خطوط ژئودزی یا خطوط راست این فضا، دایره های عظیمه هستند. به این ترتیب از هر نقطه خارج از یک خط راست (یک دایره عظیمه)، هیچ خطی (دایره عظیمه ای) به موازات آن نمی گذرد و هر خط راستی که از آن نقطه عبور دهیم، حتما خط راست اول را قطع خواهد کرد. می توان این سطح دوبعدی را در فضای دکارتی سه بعدی نشاند. برای این کار کافی است که قرار دهیم:

$$z = \cos\theta, \quad x = \sin\theta\cos\phi, \quad y = \sin\theta\cos\phi. \tag{۳۹}$$

این روابط در واقع یک شیوه قرار گرفتن یا نشاندن [۱۰] این سطح دوبعدی را در فضای سه بعدی نشان می دهند. تمرین زیر نشان می دهد که چرا این تصویر درست است.

■ **تمرین:** با توجه به روابط بالا نشان دهید که

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{۴۰}$$



شکل ۴: هرگاه سطح کره دو بعدی را به جای مختصه های (θ, ϕ) با مختصه های $(r.\phi)$ نشان دهیم، متریک روی سطح کره به شکل $d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\phi^2$ در می آید و اگر نام ϕ را هم با θ عوض کنیم، متریک روی سطح کره به همان شکلی در می آید که در رابطه (۳۵) نوشته شده است.

■ فضای دو بعدی با انحنای ثابت منفی

در این صورت $k = -1$ و متریک فضا برابر است با

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\phi^2. \tag{۴۱}$$

[۱۰] embedding

در اینجا r در محدوده ی $0 \leq r \leq \infty$ می تواند تغییر کند.

باز هم r نشان دهنده فاصله یک نقطه از مبداء مختصات نیست و فاصله یک نقطه با مختصه (r, ϕ) از مبدآ را روی یک خط شعاعی می توان به دست آورد:

$$l(r, \phi) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 + r'^2}} = \sinh^{-1} r \qquad (۴۲)$$

که براحتی معلوم می شود هیچ حدی برای این فاصله وجود ندارد. هم چنین می توانیم طول دایره هایی را که مختصه r آنها ثابت است بدست آوریم:

$$P(r) = \int_0^{2\pi} r d\phi = 2\pi r. \qquad (۴۳)$$

که نشان می دهد محیط این دایره ها نیز می تواند نامحدود باشد. بنابراین در این جا ما با یک فضای نامتناهی و باز سروکار داریم که همگن و همسانگرد است و انحنای آن نیز ثابت و منفی است. گاهی اوقات، بخصوص در کتابهایی برای عموم، دیده می شود که تصویر این چنین سطحی مثل یک زین اسب یا یک هذلولی گون در فضای سه بعدی رسم می شود. هر دوی این تصاویر نادرست هستند. هذلولی گون و زین اسب نه همگن هستند و نه همسانگرد. این تصاویر شاید به درد ایجاد یک تصویر اولیه به درد بخورند ولی بیش از آن فایده ای ندارند. اصولا سطح با انحنای ثابت منفی را نمی توان در فضای دکارتی سه بعدی نشاند، اما می توان آن را در یک فضای سه بعدی با متریک

$$d\sigma^2 = dz^2 - dx^2 - dy^2$$

نشاند. در چنین فضای سه بعدی ای، معادله سطح با انحنای ثابت منفی به شکل یک هذلولی گون یعنی

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

در می آید و در واقع منشاء تصویر هذلولی گون از همین جاست، اگر چه به دلیل آن که فضای سه بعدی ای که این سطح در آن نشانده شده فضای دکارتی معمولی نیست، تصویر هذلولی گون نیز از نظر شهودی نادرست است. برای این که نشاندن این سطح را بفهمیم بازهم متغیرهای جدیدی مثل θ و ϕ تعریف می کنیم و این سطح را در یک فضای دکارتی می نشانیم.برای این کار قرار می دهیم:

$$z = \cosh\theta, \qquad x = \sinh\theta\cos\phi, \qquad y = \sinh\theta\sin\phi. \qquad (۴۴)$$

در این صورت با کمی محاسبه متوجه می شویم که اولاً همان متریک روی سطح یعنی رابطه (۴۱) این بار به صورت

$$d\sigma^2 = dz^2 - dx^2 - dy^2$$

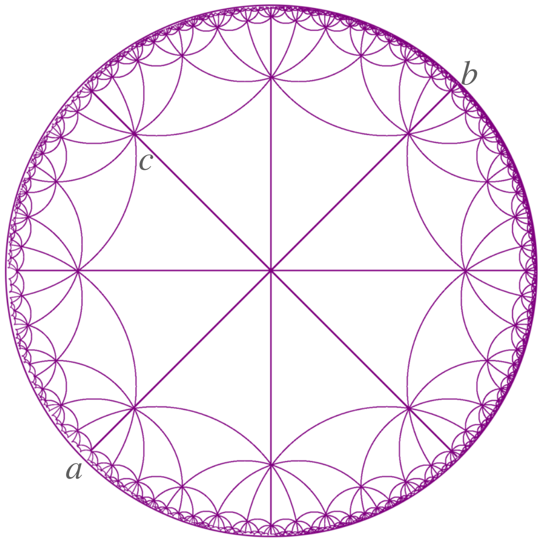
نوشته می شود و ثانیاً معادله سطح بر حسب متغیرهای دکارتی سه بعدی به صورت زیر است:

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1. \qquad (۴۵)$$

معنای این روابط این است که سطحی که با متریک (۴۱) تعریف شده در واقع سطح یک هذلولی گون دوبعدی است که در یک فضای سه بعدی دکارتی اما نه یک فضای اقلیدسی که با آن آشنا هستیم بلکه یک فضای شبه اقلیدسی با متریک $d\sigma^2 = dz^2 - dx^2 - dy^2$

غوطه ور شده است.

می توان به شکل دیگر و بهتری این فضای دوبعدی با انحنای ثابت را فهمید و آن مدل دیسک پوانکاره [11] است.



شکل ۵: مدل دیسک پوآنکاره از یک فضای دوبعدی با انحنای ثابت منفی. با وجود اینکه از نقطه نظر ما این سطح دوبعدی همسانگرد و همگن به نظر نمی رسد، اما از دید کسی که روی سطح زندگی می کند و متریک (۴۱) یا (۴۶) را به کار می برد، این فضای دوبعدی همگن و همسانگرد است و همه جای آن مثل هم است. تمام خطوطی که در این شکل دیده می شوند، ژئودزی (یا به اصطلاح خط راست) هستند. محیط دایره که شعاع آن برابر با 1 است، در بی نهایت قرار دارد. ژئودزی هایی با طول بی نهایت منحنی هایی هستند که از روی محیط با زاویه ۹۰ درجه شروع می شوند و جایی دیگر روی همان دایره با زاویه ۹۰ درجه فرود می آیند. دیده می شود که از نقطه c بی نهایت خط راست می توان رسم کرد که همگی با خط راست ab موازی هستند و آن را قطع نمی کنند. این یک مثال مشخص از این است که اصل پنجم اقلیدس بدیهی نیست.

- **مدل دیسک پوآنکاره برای فضای دوبعدی با انحنای ثابت منفی:**

صفحه دو بعدی را در نظر بگیرید با مختصات (x, y) و متریک زیر:

$$ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}. \qquad (۴۶)$$

این صفحه با این متریک، یک فضای با انحنای ثابت منفی را نشان می دهد که به آن مدل دیسک پوآنکاره می گویند.

- **تمرین انتخابی:** نشان دهید که ژئودزی های دیسک پوآنکاره، منحنی هایی هستند که از یک نقطه روی محیط دایره و عمود بر آن شروع می شوند و روی نقطه ای دیگر روی محیط دایره به صورت عمود می نشینند.

- **مثال:** می خواهیم ببینیم آیا این صفحه واقعا در مختصات قطبی دارای متریک (۴۱) است؟ برای این کار حدس می زنیم که رابطه مختصات بالا با مختصات قطبی به صورت زیر است

$$x = f(r)\cos\phi, \qquad y = f(r)\sin\phi. \qquad (۴۷)$$

[11] Poincare Disk Model

که در آن $f(r)$ تابعی است که باید شکل آن را مشخص کنیم. حال بسادگی بدست می آوریم:

$$x^2 + y^2 = f^2, \tag{۴۸}$$

و

$$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} = 4\frac{f'^2 dr^2 + f^2 d\phi^2}{(1 - f^2)^2}. \tag{۴۹}$$

می خواهیم در این مختصات قطبی متریک به صورت زیر در آید:

$$ds^2 = g(r)dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{۵۰}$$

که در آن $g(r)$ تابعی است که باید آن را تعیین کنیم. مقایسه ضریب $d\phi^2$ در این دو عبارت نشان می دهد که

$$\frac{2f}{1 - f^2} = r \tag{۵۱}$$

که با حل آن بدست می آوریم:

$$f(r) = \frac{-1 + \sqrt{1 + r^2}}{r}. \tag{۵۲}$$

اما از رابطه (۴۹) می دانیم که

$$g(r) = \frac{4f'^2}{(1 - f^2)^2}.$$

با دانستن فرم صریح $f(r)$ محاسبه $g(r)$ یک کار سرراست است. بعد از کمی محاسبه (البته با دقت کافی) و ساده کردن عبارت مربوطه بدست می آوریم که

$$g(r) = \frac{1}{1 + r^2}. \tag{۵۳}$$

در نتیجه مدل دیسک پوانکاره را هرگاه با مختصات $(r,\ \theta)$ بنویسیم، صفحه ای است با متریک زیر:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\phi^2. \tag{۵۴}$$

۲.۷ فضاهای سه بعدی با انحنای ثابت

پس از این مثال های دوبعدی به فضاهای سه بعدی با انحنای ثابت می رسیم. نخست باید دقت کنیم که فضای سه بعدی مورد نظر ما همگن و همسانگرد است. با انتخاب مختصات قطبی، $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$

متریک چنین فضایی به صورت زیر است:

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{۵۵}$$

که در آن $\lambda(r)$ تابعی است که باید شکل با توجه به رابطه $R_{\mu\nu} = 2K g_{\mu\nu}$ پیدا شود.

■ **تمرین:** نشان دهید که مولفه های غیر صفر تانسور ریچی به صورت زیر هستند:

$$R_{11} = \frac{1}{r}\lambda', \qquad R_{22} = \frac{1}{\sin^2\theta}R_{33} = 1 + \frac{1}{2}r\lambda' e^{-\lambda} - e^{-\lambda}. \tag{۵۶}$$

که در آن $\lambda' = \frac{d\lambda}{dr}$.

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{\lambda'}{r} = 2Ke^{\lambda}, \qquad 1 + \frac{1}{2}r\lambda' e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 2Kr^2. \tag{۵۷}$$

این دو معادله یک حل دارند و آن اینکه

$$e^{-\lambda} = 1 - Kr^2.$$

بنابراین متریک یک فضای با انحنای ثابت به صورت کلی زیر است:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{۵۸}$$

که در آن $K = 0$ نشان دهنده انحنای ثابت صفر و K های مثبت و منفی به ترتیب، نشان دهنده انحنای ثابت مثبت یا منفی است. اگر $K = 0$ باشد، این فضا همان فضای سه بعدی تخت است که با آن آشنا هستیم. اما اگر K غیر صفر باشد می توانیم متریک را به صورت ساده تری بنویسیم. برای این کار دقت می کنیم که r به هیچ وجه معنای فاصله از مرکز مختصات را ندارد، بلکه تنها یک مختصه است و می توان آن را تغییر داد. فاصله نهایتا با متریک مشخص می شود و این فاصله نیز تحت تغییر مختصات ناورداست. بنابراین قرار می دهیم $K = |K|k$ که در آن $|K|$ اندازه K و $k = \pm 1$ علامت آن است. حال یک تغییر متغیر ساده می دهیم و به جای مختصه r از مختصه $r' = \sqrt{|K|}r$ استفاده می کنیم. در این مختصه های جدید، یعنی مختصه های قطبی (r', θ, ϕ) متریک ابررویه فضاگونه به شکل زیر در می آید:

$$d\sigma^2 = \frac{1}{|K|}\Big(\frac{dr'^2}{1-kr'^2} + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\Big). \tag{۵۹}$$

متریک کل فضا زمان نیز با نامگذاری

$$\frac{S(t)^2}{|K|} \longrightarrow R(t)^2, \qquad r' \longrightarrow r$$

به شکل زیر در می آید:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2\Big(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\Big) \tag{۶۰}$$

توجه می کنیم که در این متریک $k = 0, \pm 1$ است. در زیر متریک ابررویه فضاگونه یعنی $d\sigma^2$ را برای k های مختلف مطالعه می کنیم.

■ **فضای سه بعدی با انحنای ثابت صفر** در این صورت متریک فضا به صورت زیر است

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{۶۱}$$

که نشان دهنده یک فضای دکارتی و تخت سه بعدی است که از دوران دبیرستان با آن آشنا هستیم. برای درک شهودی آن نیز نیازی به هیچ محاسبه ای نیست. این فضایی است که از هر سه سو تا بی نهایت گسترده است. از هر نقطه خارج از یک خط راست نیز یک و فقط یک خط راست موازی با آن می گذرد.

■ **فضای سه بعدی با انحنای ثابت مثبت** در این صورت متریک فضا به صورت زیر است

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \qquad (۶۲)$$

این متریک با این مختصات برای ما ناآشناست و به این شکل نمی دانیم که از نظر شهودی چه نوع فضایی را توصیف می کند، بخصوص که درک شهودی ما از حجم های سه بعدی به قدرتِ درک شهودی ما از سطوح دوبعدی نیست. اما حدس می زنیم که این فضا احتمالا باید سطح یک کره سه بعدی باشد. البته اگر چه از اصطلاح سطح استفاده می کنیم، ولی می دانیم که با یک خمینه یا فضای سه بعدی سروکار داریم. پس بد نیست که با کره سه بعدی بیشتر آشنا شویم. یک کره سه بعدی را به بهترین وجه وقتی می توان فهمید که آن را در فضای چهاربعدی دکارتی با مختصاتِ (x, y, z, w) غوطه ور کنیم. در این صورت کره سه بعدی به شعاع یک که آن را با S^3 نمایش می دهیم با معادله

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

مشخص می شود. طبیعی است که سطح این کره به عنوان یک فضا یا خمینه سه بعدی با سه مختصه مستقل مشخص می شود. این سه مختصه که آنها را

$$(\psi, \theta, \phi)$$

به ترتیب زیر با مختصه های دکارتی ربط دارند:

$$w = \cos\psi, \quad x = \sin\psi\cos\theta, \quad y = \sin\psi\sin\theta\cos\phi, \quad z = \sin\psi\sin\theta\sin\phi. \qquad (۶۳)$$

اگر متریک فضای دکارتی یعنی $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ را بر حسب این مختصه ها بنویسیم، نتیجه اش برابر خواهد شد با:

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sin\psi^2 d\theta^2 + \sin^2\psi\sin^2\theta d\phi^2. \qquad (۶۴)$$

در نگاه اول به نظر می رسد که این متریک شباهتی به متریکِ فضای سه بعدی با انحنای ثابت مثبت یعنی متریک نشان داده شده در (۶۲) ندارد. اما کافی است که مختصات را کمی تغییر دهیم. کافی است که قرار دهیم

$$\sin\psi =: r$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\cos\psi d\psi = dr, \quad \longrightarrow \quad d\psi = \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad (۶۵)$$

که در نتیجه آن متریک به همان صورت (۶۲) در می آید. بنابراین فضای سه بعدی با انحنای ثابت مثبت چیزی نیست جز همان سطح کره سه بعدی. این سطح یک جهان متناهی را توصف می کند. خصوصیات هندسی آن از نظر ژئودزی ها و خطوط موازی نیز مثل همان سطح کره دو بعدی است.

■ **فضای سه بعدی با انحنای ثابت منفی:** متریک این فضا به صورت زیر است:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \qquad (۶۶)$$

از آنچه که در بخش های قبل در مورد فضاهای دو بعدی با انحنای ثابت آموخته ایم، و همچنین آنچه که در باره کره سه بعدی یاد گرفته ایم، می توانیم نخست مختصه ها را به شکل زیر تغییر دهیم و قرار دهیم

$$r = \sinh\psi$$

که در نتیجه آن

$$r = \sinh\psi \qquad dr = \cosh\psi d\psi, \longrightarrow dr = \sqrt{1+r^2}d\psi. \tag{۶۷}$$

در این مختصات جدید، یعنی مختصه های $(\psi,\ \theta,\ \phi)$ متریک این فضای سه بعدی به صورت زیر درمی آید:

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{۶۸}$$

شباهت این متریک با متریک روی کره ظاهری است، چرا که $\sin\psi$ جای خود را به $\sinh\psi$ داده و بین این دو فرق بسیار زیادی است. این فضا یک فضای نامتناهی است. در واقع اگر طول یک خط از مبداء مختصات را به یک نقطه دلخواه روی مسیر شعاعی حساب کنیم بدست می آوریم:

$$l(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1+r'^2}} = \int_0^\psi d\psi' = \psi = \sinh^{-1}(r) \tag{۶۹}$$

که نشان می دهد طول چنین خط شعاعی با افزایش r می تواند تا بی نهایت زیاد شود.

درست مثل دو بعد، این خمینه سه بعدی را نیز می توان در فضای تخت دکارتی چهاربعدی غوطه ور کرد و در این فضا شکل این خمینه مثل یک هذلولی گون خواهد بود. اما بازهم مثل دوبعد، آن فضای دکارتی فضای دکارتی اقلیدسی نیست. برای این کار کافی است که فضای چهاربعدی با مختصاتِ $(x,\ y,\ z,\ w)$ و متریک زیر را در نظر بگیریم:

$$d\sigma^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2 - dw^2. \tag{۷۰}$$

در این صورت روابطی که غوطه ورسازی این فضای سه بعدی را در فضای دکارتی نشان می دهند، به صورت زیر خواهند بود:

$$x = \cosh\psi, \quad y = \sinh\psi\cos\theta, \quad z = \sinh\psi\sin\theta\cos\phi, \quad w = \sinh\psi\sin\theta\sin\phi. \tag{۷۱}$$

از این معادلات براحتی معلوم می شود که

$$x^2 - y^2 - z^2 - w^2 = 1, \tag{۷۲}$$

که نشان دهنده سطح یک هذلولی گون سه بعدی است. اما این کافی نیست. باید ببینیم که آیا متریک روی این کره هذلولی گونه سه بعدی بر حسب مختصات $(\psi,\ \theta,\ \phi)$ همان چیزی هست که در رابطه (۶۸) داده شده است یا نه؟ برای این کار از همین معادله (۷۱) باید $(dx,\ dy,\ dz,\ dw)$ را بدست آوریم و سپس $d\sigma^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ را بر حسب متغیرهای موضعی بنویسیم. بعد از یک محاسبه سرراست (و البته با شکیبایی) به این نتیجه می رسیم که واقعا متریک این فضا بر حسب این متغیرها همان چیزی است که در رابطه (۶۸) داده شده است. در نتیجه می فهمیم که فضای سه بعدی با انحنای ثابت منفی، چیزی نیست جز سطح یک هذلولی گونه سه بعدی.

۸ حل فریدمان

تا کنون از اصل کیهانشانسی استفاده کرده ایم و شکل کلی متریک یک فضا زمان چهاربعدی را با انحنای ثابت مشخص کرده ایم. این متریک در رابطه (۶۰) نشان داده شده است. به این ترتیب همه مشخصات فضازمان کیهانی به جز یک $k = 0, \pm 1$ و یک مقیاس طول $R(t)$ مشخص شده است. پارامتر k در واقع ساختار کلی کیهان یا توپولوژی آن را تعیین می کند و مقیاس $R(t)$ نیز اندازه آن را. این دو کیفیت توسط اصل کیهان شناسی تعیین نمی شوند. برای تعیین این که ما در کدام یک از این جهان ها زندگی می کنیم باید به یک عامل مهم دیگر توجه کنیم. ما هنوز از این استفاده نکرده ایم که این متریک باید در معادله اینشتین صدق کند، معادله ای که طرف دوم آن از توزیع ماده و انرژی در فضا مشخص می شود. اکنون به این کار می پردازیم. این کاری است که نخستین بار آلکساندرفریدمان انجام داده است. معادله فریدمان قرار است رابطه ای باشد برای تعیین این دو مجهول که نهایتا به کمک داده های تجربی کیهان شناسی مشخص خواهد کرد که ما در کدام نوع از جهان های سه گانه فوق زندگی می کنیم. البته این کار را باید به یک درس جداگانه در کیهان شناسی توسط متخصصان این رشته بسپاریم. در این جا تنها به چند نکته اصلی اشاره می کنیم. نخست این که تانسوری انرژی تکانه ای که برای طرف راست معادله اینشتین در نظر گرفته می شود، تانسور یک سیال یا شاره کامل است که شکل آن چنین است:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \qquad (۷۳)$$

که در آن ρ چگالی و p فشار است. به این ترتیب معادله اینشتین به شکل زیر در می آید:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Big((\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}\Big). \qquad (۷۴)$$

با توجه به شکل کلی متریک یعنی رابطه (۶۰) این معادلات به دو معادله زیر که به معادلات فریدمان یا معادلات فریدمان_رابرتسون_والکر [۱۲] مشهورند، منجر می شوند:

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda &= \frac{8\pi G}{c^4}\rho \\ \frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + k}{R^2} - \Lambda &= -\frac{8\pi G}{c^4} p. \end{aligned} \qquad (۷۵)$$

مقدار چگالی و فشار از مشاهدات رصدی و اینکه ما در کدام مرحله از تحول کیهانی هستیم باید تعیین شوند. در یک مدل کیهان شناسی جزییات بسیار دیگری نیز از دیگر شاخه های فیزیک، بخصوص فیزیک ذرات بنیادی وجود دارد که به همراه مشاهدات رصدی تعیین می کنند کیهان چه مراحلی را از سر گذرانده، مراحلی که به عنوان مثال تابش در آن غالب بوده [۱۳] یا مرحله ای که سپس ماده غالب شده [۱۴] یا حتی قبل از این دو، مرحله ای که تورم بسیار سریع [۱۵] و نمایی وجود داشته است. در هر کدام از این مراحل، یک نوع معادله حالت (رابطه بین چگالی و فشار) وجود دارد که باید در معادلات فریدمان قرار داده شوند. همه این ها موضوع یک درس جداگانه در کیهان شناسی است که ما در این درس به آن نمی پردازیم.

---

[۱۲] Freedman-Roberteson-Walker

[۱۳] Radiation-dominated era

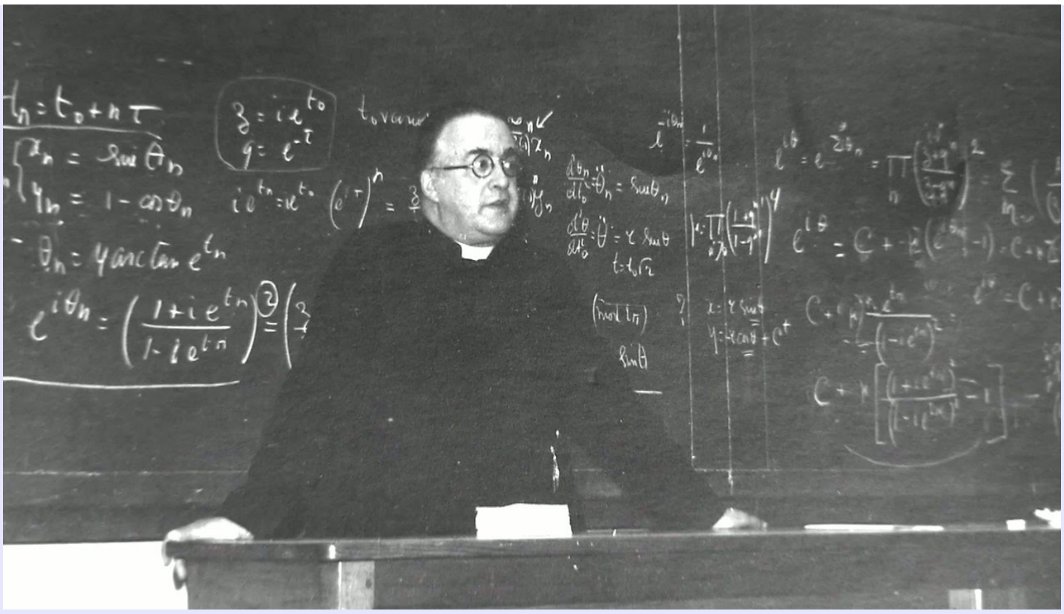
[۱۴] Matter-dominated ear

[۱۵] Inflation

آلکساندر آلکساندرویچ فریدمان، فیزیکدان و ریاضیدان روس بود که عمر کوتاه خود را تا سی سالگی در زمان روسیه تزاری و هشت سال آخر عمر خود را در اتحاد جماهیر سوسیالیستی شوروی پس از انقلاب اکتبر سپری کرد. پدر او یک رقصنده باله و مادرش یک پیانیست و پدربزرگ مادری اش موسیقدان اهل چکوسلاوی بود. ایده جهان منبسط شونده، نخستین بار توسط او به سال ۱۹۲۲ و به طور مستقل توسط لامتره، بدون اینکه از کار فریدمان خبر داشته باشد، پنج سال بعد در سال ۱۹۲۷ طرح شد. هر دوی آنها ایده جهان منبسط شونده را از حل معادلات نسبیت عام با فرض های کیهانشناسی بدست آورده بودند. در آن هنگام اینشتین به دلیل اعتقاد به یک جهان ایستا و ابدی نمی توانست چنین حل هایی را بپذیرد. سرانجام کشف ادوین هابل و بعدها کشف تابش زمینه کیهانی نشان داد که اعتقاد اینشتین نادرست بوده و جهان ما در حال انبساط است. فریدمان روز ۱۶ سپتامبر سال ۱۹۲۵ در اثر یک تشخیص اشتباه پزشکی در سن ۳۷ سالگی درگذشت.

شکل ۶: آلکساندر فریدمان (۱۸۸۸ـ۱۹۲۵)

ژرژ لوماتره، کشیش کاتولیک و در عین ریاضیدان و فیزیکدان بلژیکی بود که با سهم عمده اش در پژوهشهای اخترفیزیک و کیهانشناسی شناخته می شود. او اولین کسی بود که مشاهدات تجربی ادوین هابل را به حل های معادله اینشتین مبنی بر انبساط یک کیهان همگن و همسانگرد مرتبط کرد. لوماتره در دانشگاه کاتولیک لووان [آ] که شهر کوچکی در نزدیکی بروکسل است، به مطالعه مهندسی، فیزیک و ریاضیات پرداخت و در ۱۹۲۳ به عنوان کشیشِ یک ناحیه کوچک در بلژیک منصوب شد. اما رهبر روحانی وی در کلیسا، کاردینال دزیره‌ـژوزف مسیه [ب] ، او را تشویق کرد که همچنان به مطالعات علمی اش ادامه دهد. در سالهای ۱۹۲۳ـ۱۹۲۴ به دانشگاه کمبریج انگلستان رفت تا با آرتور ادینگتون و سال بعد به دانشگاه هاروارد و ام‌ـآی‌ـتی رفت تا با هارلو شاپلی [ج] کار کند. او هم چنین یکی از پیشگامان استفاده از رایانه در پژوهشهای فیزیک است و در سالهای ۱۹۳۰ توانست نشان دهد که اشعه کیهانی توسط میدان مغناطیسی زمین منحرف می شود و بنابراین این اشعه از ذرات باردار تشکیل شده است. از دیگر کارهای پیشتازانه او می توان از کتابی که در باره کواترنیون ها و فضاهای بیضوی [د] نوشته، از روش جدیدی که برای پرهیز از تکینگی ها در مسئله سه جسم [ه] ابداع کرده و هم چنین کارهای او در باره تبدیل فوریه سریع [و] می توان نام برد. لوماتره در سال ۱۹۶۶، اندکی بعد از کشف تابش زمینه کیهانی توسط پنزیاس و ویلسون، که شاهدی قطعی برای انبساط کیهانی است، درگذشت. او که توسط پاپ جان پل سیزدهم به عضویت آکادمی پاپی علوم [ز] منصوب شده بود، در تمام عمر خود مخالف هر نوع اختلاط علم و دین بود، اگر چه معتقد بود که این دو مقوله بر ضد یکدیگر نیستند. اعتقاد راسخ او این بود که پژوهش هایش در کیهانشناسی منحصراً باید بر اساس معیارهای علمی قضاوت شود.



شکل ۷: ژرژ لوماتره (۱۸۹۴ـ۱۹۶۶)

[آ] Louvain
[ب] Desire-Joseph Mercier
[ج] Harlow Shapley
[د] Quaternions and elliptic space
[ه] Three-body problem
[و] Fast Fourier Transform
[ز] Pontifical Academy of Sciences

ادوین هابل سهم قاطعی در بنیانگذاری نجوم فراکهشکانی و کیهانشناسی رصدی داشته است. اگر چه یک دهه قبل از او منجم آمریکایی به نام وستو سلیفر [آ] نشان داده بود که نور ساطع شده از شماری از سحابی ها به سمت نور سرخ متمایل شده و هم چنین دو سال قبل از او کیهانشناس بلژیکی ایده انبساط کیهانی را پیش نهاده بود، اما این هابل بود که با رصد منظم و سیستماتیک نهایتا توانست نشان دهد که سحابی ها در واقع جزئی از کهشکان راه شیری نیستند و خود کهکشان هایی هستند بسیار دورتر از ما. به این ترتیب ادوین هابل مقیاس شناخت ما از کیهان را نسبت به آنچه که قبل از او می شناختیم به شکل بی سابقه و بسیار عظیمی گسترش داد. این کشف همزمان جایگاه ما انسان ها ساکنان کره زمین را در کیهانِ بی انتها به طرز شگفت آوری تنزل داد.

نتایج ادوین هابل که منجم سی و پنج ساله و ناشناخته ای بود، در ابتدا با مخالفت منجمان مشهور از جمله هارلو شاپلی [ب] در هاروارد مواجه شد، به همین دلیل در سال ۱۹۲۴، نتایج اولیه او به جای یک مجله علمی در یک روزنامه یعنی نیویورک تایمز منتش شد. بعدها به ترتیب در ۱۹۲۵ و ۱۹۲۹ او توانست نتایج مشاهداتش را در انجمن نجوم آمریکا و سپس در یک مجله تخصصی منتشر کند.

هابل در سال ۱۹۵۳ در سان مارینوی کالیفرنیا در اثر سکته مغزی درگذشت. برای او مطابق شیوه ای که او و همسرش در تمام عمر دنبال کرده بودند، یعنی پرداختن به زندگی خصوصی و پرهیز از هرگونه تلاش برای کسب توجه، مراسم ترحیمی برگزار نشد. محل خاکسپاری او نیز تا به امروز ناشناخته است.

شکل ۸: ادوین هابل (۱۸۸۹ـ۱۹۵۳)

[آ] Vestro Slipher
[ب] Harlow Shapley