دینامیک نسبیتی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۱۶ فروردین ۱۴۰۱

۱ مقدمه

نسبیت خاص بر دو اصل اساسی متکی است. نخست اینکه تمامی قوانین فیزیک در چارچوب های لخت متفاوت یکسان اند و با انجام هیچ آزمایشی نمی توان به حرکت مطلق یک چارچوب لخت پی برد. دوم اینکه سرعت نور در همه چارچوب لخت مقدار ثابتی است. این دو اصل به تبدیلات لورنتز می انجامند که در درس قبلی با آن آشنا شدیم. از این پس رابطه بین مختصات رویدادها یا نقاط فضا زمان توسط تبدیلات لورنتز داده می شوند. هر قانون فیزیکی می بایست چنان باشد که تحت تبدیلات لورنتز شکل خود را حفظ کند، چرا که اگر جز این باشد، یعنی شکل این قوانین در چارچوب های مختلف با هم فرق کند به این معناست که می توان با انجام آزمایش فیزیکی و تعیین این که با چه نوع قانونی نتایج آن آزمایش تطابق پیدا می کند به حرکت مطلق آن چارچوب لخت پی برد. هنوز نمی دانیم که آیا قوانین ماکسول تحت تبدیلات لورنتز شکل خود را حفظ می کنند یا خیر. اما قطعا می دانیم که قوانین دینامیک نیوتن چنین خاصیتی ندارند. یک دلیل ساده اش این است که رابطه $F = ma$ نشان می دهد اگر به یک جرم نیروی ثابتی وارد کنیم، شتاب ثابتی پیدا می کند و این شتاب ثابت در زمان کافی می تواند سرعت آن جرم را به هر مقداری و از جمله به بیش از سرعت نور برساند. علاوه بر این استدلال نظری آزمایش های بسیاری نیز گواهی می دهند که مکانیک نیوتنی توصیف کننده صحیح حرکت ذرات در سرعت های بالا نیست. تا کنون در هیچ آزمایشی که با ذرات انجام شده سرعت ذرات به بالاتر از سرعت نور نرسیده است. این گواهی آزمایشگاهی و مشاهداتی است بر نادرستی مکانیک نیوتنی در سرعت های بالا. مکانیک جدید را چگونه باید بسازیم؟ و چه معادلاتی را می بایست جایگزین معادلات نیوتن کنیم؟

۲ جرم و انرژی

نخستین نکته ای که باید به آن توجه کنیم این است که مکانیک جدید، می بایست چنان باشد که در سرعت هایی که نسبت به سرعت نور کوچک اند، معادلات مکانیک جدید که آن را مکانیک نسبیتی می نامیم، می بایست به همان معادلات نیوتن تبدیل شوند. نکته دوم نیز این است که بجای توجه به معادله نیوتن یعنی $F = ma$ و سعی در تعمیم آن به قوانین کلی تر و عمومی تر مکانیک توجه کنیم. رابطه $F = ma$ وقتی مفید است که شکل خاص نیروی وارد بر جرم را بدانیم و قانون مربوط به آن را (که ناشی از گرانش یا الکتریسیته یا کشش یا هرچیز دیگری است) در این رابطه جایگزین کنیم تا بتوانیم شتاب را بدست آوریم. به جای این رابطه می بایست به قوانین کلی تر فکر کنیم که مستقل از هر نوع نیرویی هستند. به همین دلیل است که به سراغ دو قانون بقای مهم می رویم، قانون بقای جرم و قانون بقای تکانه خطی. این دو قانون ربطی به هیچ نیروی خاصی ندارند و همیشه برقرارند. و بالاخره نکته سوم این است که سعی می کنیم کمترین تغییر را در معادلات دینامیک ایجاد کنیم به این معنا که تنها فرض می کنیم که جرم یک ذره (یعنی اینرسی آن در مقابل تغییر سرعت) وابسته به سرعت است. از نظر شهودی انتظار داریم که این اینرسی هرچقدر که سرعت بیشتر می شود، بزرگتر شود و مانع افزایش بی حدو حساب سرعت شود. بنابراین تنها قرار می دهیم

$$m = m(v), \qquad P = m(v)v,$$

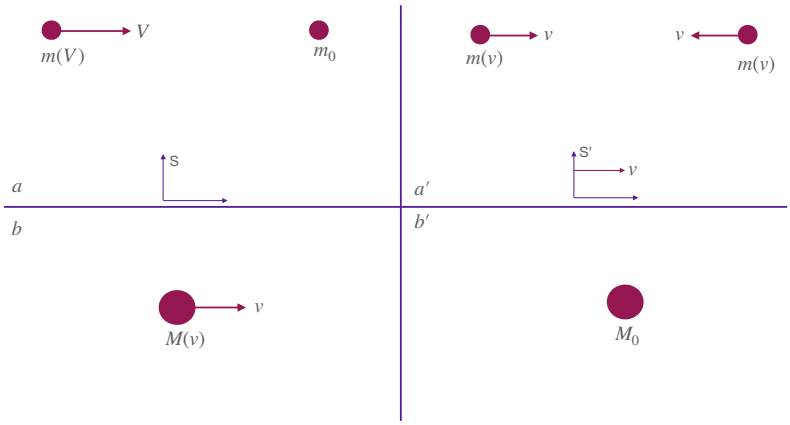
که در آن $m(0) = m_0$ جرم در حال سکون ذره است. برای این که بفهمیم جرم چگونه به سرعت وابسته است می توانیم آزمایش های فکری انجام دهیم و در آنها یک فرایند ساده مثل برخورد ذرات را در دو چارچوب متفاوت بررسی کنیم و با استفاده از اصل موضوع نسبیت یعنی یکسان بودن قوانین فیزیک در همه چارچوب ها سعی کنیم رابطه جرم و سرعت را بدست آوریم. خواهیم دید که آزمایش های فکری مختلف همگی به یک رابطه می رسند و هر بار اطمینان ما را نسبت به درست بودن این رابطه بیشتر می کنند. می توان گفت که روش استفاده از آزمایش فکری یا آزمایش تخیلی [۱] نخستین بار توسط اینشتین، آنهم به وسعت برای درک درست تر پدیده های فیزیکی و کشف قوانین جدید به کار گرفته شد.

۱.۲ برخورد کاملا غیر الاستیک دو ذره

یک آزمایش فکری را در دو چارچوب لخت متفاوت بررسی می کنیم. در این ازمایش فکری دو ذره یکسان با جرم سکون m_0 با سرعت های یکسان ولی در جهت های مخالف با هم برخورد کرده و یک ذره ساکن را با جرم سکونِ M_0 تشکیل می دهند. وضعیت این ذرات قبل و بعد از

[۱] Gedankenexperiment

برخورد در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱: یک برخورد غیرالاستیک در دو مختلف. در هر دو چارچوب می خواهیم قوانین بقای جرم و تکانه خطی برقرار باشند.

در چارچوب S این وضعیت ها با شکل های a و b نشان داده شده اند. چارچوب لخت S' نسبت به چارچوب S با سرعت v حرکت می کند. در این چارچوب یک برخورد غیر الاستیک بین دو ذره یکسان که با سرعت v در جهت مخالف هم حرکت می کنند رخ می دهد و یک ذره یکسان با جرم M_0 تشکیل می شود. قانون بقای تکانه در خود شکل رعایت شده است. حال همین برخورد را در چارچوب S نگاه می کنیم. بنابر قانون بقای جرم داریم:

$$m(V) + m_0 = M(v), \qquad (۱)$$

و بنابر قانون بقای تکانه خطی داریم:

$$m(V)V = M(v)v. \qquad (۲)$$

از آنجا که در باره جرم ذره بزرگ ایجاد شده چیزی نمی دانیم، در این دو معادله این جرم را حذف می کنیم و به رابطه زیر می رسیم:

$$(m(V) + m_0)v = m(V)V, \qquad (۳)$$

و یا

$$m(V) = \frac{m_0 V}{V - v}. \qquad (۴)$$

حال کافی است که v را بر حسب V بنویسیم تا رابطه جرم با سرعت به طور کامل بدست آید. از تبدیلات لورنتز می دانیم که سرعت V برابر است با:

$$V = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (۵)$$

با وارون کردن این رابطه می فهمیم که:

$$v = \frac{c^2}{V}\left[1 - (1 - \frac{V^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (۶)$$

و با جایگذاری در رابطه (۴) بدست می آوریم:

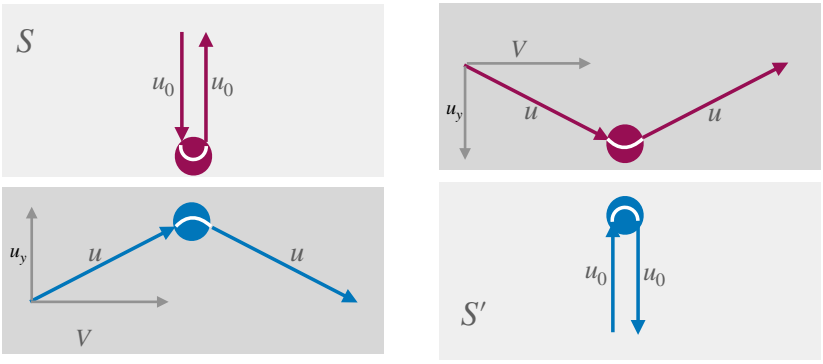
$$m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (۷)$$

به این ترتیب رابطه جرم و سرعت را بدست می آوریم. این رابطه نشان می دهد که هرچقدر سرعت ذره به سرعت نور نزدیک تر می شود اینرسی آن بزرگ تر شده و سرانجام در سرعت نور به سمت بی نهایت میل می کند. این امر در واقع نشان می دهد که چرا از نظر دینامیکی نمی توان ذرات را به سرعت های دلخواه و بسیار بزرگ رساند. این اولین و مهم ترین گسست مکانیک نسبیتی از مکانیک نیوتنی است. بقیه مکانیک نسبیتی با شروع از این رابطه و البته توجه همیشگی به تبدیلات لورنتز و اصول نسبیت خاص یعنی ثابت بودن قوانین فیزیک در چارچوب های لخت مختلف پدید می آیند.

۲.۲ برخورد کاملا الاستیک دو ذره

حال برخورد کاملا الاستیک دو ذره یکسان را در نظر می گیریم. دو قطار S و S' از روبرو و از کنار هم و با سرعت های مساوی ولی در خلاف جهت هم حرکت می کنند. جهت حرکت قطارها را محور x می گیریم. در ایستگاه قطار یک میله یا نشانه وجود دارد و این دو قطار در یک لحظه به این نشانه می رسند. این دو مسافر تصمیم می گیرند که در آن لحظه ، توپ هایی را به طرف هم یعنی در راستای y و با سرعت u_0 پرتاب کنند. یعنی هر ناظر سرعت توپ را در چارچوب خودش u_0 و در راستای محور y می بیند. ممکن است بپرسید که چرا لحظه رسیدن این دو قطار به آن نشانه (یعنی لحظه پرتاب توپ) از دید هر دو ناظر یکسان است؟ پاسخ اش این است که چون دو رویداد (یعنی رسیدن قطار به نشانه و پرتاپ توپ) رویدادهایی هستند که در یک نقطه رخ می دهند، اگر در یک چارچوب همزمان باشند، برای هر چارچوب دیگری نیز همزمان هستند. (به عبارت

دیگر نسبی بودن همزمانی برای رویدادهایی است که در یک نقطه رخ نمی دهند. این موضوع را می توانید با تبدیلات لورنتز تحقیق کنید.) حال سرعت هر کدام از قطار ها را نسبت به قطار دیگر برابر با v می گیریم، و این دو رویداد را به صورت جداگانه از دید هر دو ناظر بررسی می کنیم. شکل (۲) این برخورد را از دید هر دو ناظر نشان می دهد.



برخورد دو ذره از دید ناظر S برخورد دو ذره از دید ناظر S'

شکل ۲: یک برخورد کاملا الاستیک از دید دو ناظر که با سرعت نسبی V به سوی هم حرکت می کنند.

قبل از هر محاسبه ای می بایست به وضعیت کاملا متقارن این دو نسبت به هم و نحوه دیدن برخورد این دو توپ از دید دو ناظر توجه کنیم. از تبدیلات لورنتز می دانیم که

$$u_y = \frac{u_0}{\gamma} \qquad (۸)$$

که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

هم چنین سرعت ذره آبی رنگ از دید ناظر S' برابر است با:

$$u^2 = V^2 + u_y^2. \qquad (۹)$$

حال به قانون بقای تکانه از دید یکی از ناظر ها مثلا ناظر S' توجه می کنیم. تکانه در راستای x به وضوح مقدارش حفظ می شود در راستای y

می نویسیم:

$$m(u)u_y - m(u_0)u_0 = m(u_0)u_0 - m(u)u_y \qquad (۱۰)$$

و از آنجا

$$m(u)u_y = m(u_0)u_0, \qquad (۱۱)$$

و با ترکیب این رابطه با رابطه $u_y = \frac{u_0}{\gamma}$ به نتیجه زیر می رسیم:

$$m(u) = m(u_0)\gamma. \qquad (۱۲)$$

حال دقت می کنیم که این رابطه برای هر مقداری از u_0 و هر مقداری از V معتبر است. بنابراین u_0 را خیلی خیلی کوچک و نزدیک به صفر ولی V را دلخواه می گیریم. در نتیجه می توانیم بنویسیم:

$$m(u_0) = m_0, \qquad u = V, \qquad (۱۳)$$

که در نتیجه آن بدست می آوریمک

$$m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (۱۴)$$

دقت کنید که در این آزمایش فکری فقط از قانون بقای تکانه استفاده کرده ایم.

۳.۲ انرژی در حال سکون

شاید معروف ترین رابطه ناشی از نسبیت که برای عامه مردم نیز شناخته شده است رابطه $E = mc^2$ است. این رابطه بیان می کند که هر مقداری از جرم معادل با مقداری انرژی است. همین رابطه است که در شکل صلح امیزش منشاء انرژی خورشید و دیگر ستارگان را برای ما روشن می سازد و از واکنش های شکافت یا گداخت هسته ای انرژی الکتریکی تولید می کند و در شکل مخرب اش نیز منجر به انفجار اتمی می شود. می خواهیم این رابطه را با مطالعه رابطه جرم و سرعت که در بخش های پیشین یافتیم و هم چنین با استفاده از یک آزمایش فکری دیگر پیدا کنیم.

رابطه بقای جرم در یک برخورد الاستیک را در نظر می گیریم. دو ذره با جرم سکون m_0 و m_0 با یک دیگر برخورد می کنند. سرعت آنها قبل از برخورد $\mathbf{v_1}$ و $\mathbf{v_2}$ و بعد از برخورد $\mathbf{v'_1}$ و $\mathbf{v'_2}$ است. قانون بقای جرم برای این دو ذره به صورت زیر است:

$$m_1(\mathbf{v_1}) + m_2(\mathbf{v_2}) = m_1(\mathbf{v'_1}) + m_2(\mathbf{v'_2}). \qquad (۱۵)$$

دقت هم می کنیم که جرم تنها به اندازه سرعت بستگی دارد. در سرعت های کم می دانیم که

$$m(\mathbf{v}) = \frac{m_0}{(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}. \qquad (۱۶)$$

در نتیجه در این برخورد الاستیک بقای جرم نسبیتی منجر به رابطه زیر می شود:

$$\frac{1}{2}m_0\frac{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_1}}{c^2} + \frac{1}{2}m_0\frac{\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{v_2}}{c^2} = \frac{1}{2}m_0\frac{\mathbf{v'_1}\cdot\mathbf{v'_1}}{c^2} + \frac{1}{2}m_0\frac{\mathbf{v'_2}\cdot\mathbf{v'_2}}{c^2} \qquad (۱۷)$$

که اگر آن را در c^2 ضرب کنیم چیزی نیست جز همان قانون بقای انرژی جنبشی. به این ترتیب قانون بقای جرم در سرعت های کم چیزی نیست جز همان قانون بقای انرژی جنبشی. اما اینشتین در این جا یک گام مهم برداشت به این معنا که کل عبارت $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ را به مثابه انرژی یک ذره به جرم سکون m_0 در نظر بگیریم و m_0c^2 انرژی ذره ای است که هیچ سرعتی ندارد، و به همین دلیل انرژی در حال سکون آن ذره نامیده می شود. از این جا دومین گسست مهم از دینامیک نیوتنی رخ می دهد و آن معادل بودن جرم و انرژی و ابداع عبارت جدیدی برای انرژی یک ذره است. ذره ای به جرم m دارای انرژی

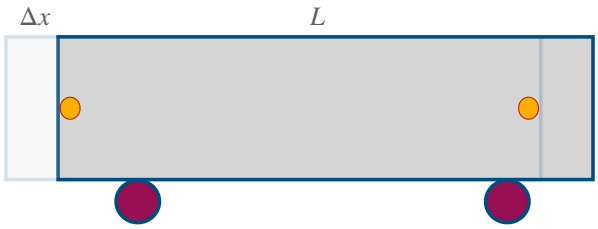
$$E = mc^2$$

است. در این رابطه منظور از m همان عبارت $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ است.

۴.۲ یک آزمایش فکری برای معادل بودن جرم و انرژی

آن آزمایش فکری ای که در بخش قبل شرح دادیم نخستین بار توسط لویس و تالمن [۲] در ۱۹۵۷ ابداع شد. خود اینشتین آزمایش فکری ساده ای را در همان سال های ۱۹۰۵ـ۱۹۰۶ ابداع کرده که به این شرح است. اتاقکی را به طول L و جرم M] در نظر بگیرید که در فضای خالی (یا روی یک سطح کاملاً بدون اصطکاک قرار گرفته) است. شکل (۳)

[۲] G.N. Lewis and R. C. Tolman



شکل ۳: یک آزمایش فکری برای اثبات رابطه $E = MC^2$.

حال تصور کنید که یک بسته نور (می توانید آن را فوتون بنامید) با انرژی E از دیواره سمت چپ این اتاقک گسیل شده و در دیواره طرف راست جذب می شود. همه کمیت های فوق را در چارچوب متصل به اتاقک محاسبه می کنیم. تکانه بسته نور برابر است با

$$P = \frac{E}{c}.$$

گسیل فوتون باعث می شود که اتاقک به عقب پس رانده شود. تکانه اتاقک برابر است با $-P = -\frac{E}{c}$ و سرعت حرکت آن برابر است با:

$$v = -\frac{P}{M} = -\frac{E}{Mc}.$$

مدت زمانی که طول می کشد تا این بسته نور به انتهای دیگر اتاقک برسد و در دیواره آنجا جذب شود برابر است با:

$$\Delta t = \frac{L}{c}.$$

در این فاصله اتاقک به اندازه $\Delta x = v\Delta t = -\frac{EL}{Mc^2}$ به عقب می رود. اما می دانیم این سیستم (اتاقک بعلاوه بسته نور) یک سیستم منزوی است و بنابراین مرکز جرم آن نمی بایست تغییر کند. این کار فقط وقتی ممکن است که حمل انرژی E از انتهای سمت چپ اتاقک به انتهای سمت راست آن می بایست معادل با حمل مقداری انرژی بوده باشد. این جرم معادل را برابر با m می گیریم و مقدار آن را با توجه به ثابت بودن مرکز جرم کل حساب می کنیم: می دانیم که E

$$M\Delta x + mL = 0 \qquad (۱۸)$$

و یا

$$-M\frac{EL}{Mc^2} + mL = 0 \qquad (۱۹)$$

و از آنجا به رابطه

$$E = mc^2$$

می رسیم که معادل بودن جرم و انرژی را به این صورت دقیق بیان می کند. این که آیا چنین رابطه ای واقعا در طبیعت برقرار است یا نه می بایست به بوته آزمایش سپرده شود و بیش از صدسال آزمایش در حوزه های مختلف فیزیک درستی آن را ثابت کرده است. به گوشه ای از این آزمایش ها در ادامه درس و در تمرین ها اشاره می کنیم.

---

۳ چند مثال از کاربرد قوانین بقا

با همین عبارت های نسبیتی که برای تکانه و انرژی یافته ایم، بدون اینکه هنوز چیزی در مورد معادله دینامیک نسبیتی بدانیم، می توانیم مسایل مهم و متنوعی را حل کنیم. طبیعی هم هست چرا که قوانین بقای تکانه و انرژی مهم تر از هر شکل نیرویی هستند که ما ممکن است بین ذرات تصور کنیم. نخستین چیزی که باید به آن توجه کنیم این است که فوتون ذره ای است که با سرعت نور حرکت می کند. برای چنین ذره ای جرم در حال سکون حتما می بایست برابر با صفر باشد چرا که در غیر این صورت با توجه به رابطه $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ جرم فوتون به بی نهایت میل می کند. بنابراین برای فوتون ها رابطه انرژی و تکانه به صورت زیر است:

$$E^2 - c^2p^2 = 0 \qquad \text{یا} \qquad E = cp. \tag{۲۰}$$

قبل از ابداع نسبیت خاص یا تقریبا همزمان با آن معلوم بود که انرژی فوتون با فرکانس آن به شکل زیر رابطه دارد:

$$E = h\nu \tag{۲۱}$$

که به این معناست که تکانه فوتون به صورت زیر است:

$$P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{۲۲}$$

در این رابطه ν فرکانس و λ طول موج فوتون است. درستی این روابط را آزمایش های مستقل مثل آزمایش کامپتون نیز تایید کرده اند. در دو زیر بخش بعدی به مسئله مهم جذب و گسیل فوتون ها از اتم ها می پردازیم و همه آنها را به عنوان مثال هایی از برخورد مطالعه می کنیم. خواهیم دید که با استفاده از قوانین بقای تکانه و انرژی می توانیم به طور کامل این پدیده ها را به صورت کمّی بررسی کرده و اطلاعات دقیقی در باره کیفیت آنها بدست آوریم. خواهیم دید که از نظر جزئیات محاسبات نیز همه این پدیده ها بسیار شبیه به هم هستند و اگر خواننده محاسبات یکی را به دقت دنبال کند، می تواند بقیه محاسبات را بدون کمک گرفتن از درسنامه انجام دهد. هم چنین به یک نکته مهم هم باید توجه کنیم و آن این است که کار کردن در سیستم واحدهایی که در آن $c = 1$ است محاسبات را به شدت آسان و هموار می کند. در پایان همواره می توان نتایج را به سیستم واحدهای متریک منتقل کرد.

---

۴ جذب و گسیل فوتون ها توسط اتم ها

پدیده هایی را که در این بخش بررسی می کنیم، عبارت اند از:

الف- جذب فوتون توسط یک اتم ساکن،

ب- جذب فوتون توسط یک اتم متحرک،

ج- گسیل فوتون توسط یک اتم ساکن ،

د- گسیل فوتون توسط یک اتم متحرک، و

ه- یک ایده تخیلی در مورد موشک هایی که با سوخت فوتونی کار می کنند.

۱.۴ جذب فوتون توسط اتم

اتمی را در نظر می گیریم به جرم سکون m_0 که ساکن است. این اتم فوتونی را با فرکانس ν جذب می کند. طبیعی است که به دلیل تکانه فوتون، اتم پس از جذب فوتون در همان راستا با سرعت خیلی کمی به جلو پرتاب می شود، شکل (۴). سوال این است که این سرعت چقدر است؟ و جرم سکون اتم پس از جذب فوتون چقدر زیاد شده است. برای پاسخ به این سوالها از قوانین بقا استفاده می کنیم. در طول محاسبات هم همه جا در واحدهایی کار می کنیم که $c = 1$ باشد و فقط در انتها، به سیستم واحدهای متریک بازمی گردیم. جرم در حال سکون اتم را پس از جذب

فوتون با m'_0 نشان می دهیم. بنابر قانون بقای انرژی داریم:

$$Q + m_0 = m'_0\gamma \qquad (۲۳)$$

که در آن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ و v سرعت پرتاب شدن اتم است. بنابر قانون بقای تکانه داریم:

$$Q = m'_0\gamma v \qquad (۲۴)$$

با جایگذاری $m'_0\gamma$ از رابطه پایینی در رابطه بالایی بدست می آوریم:

$$v = \frac{Q}{Q + m_0}. \qquad (۲۵)$$

و از آنجا

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{Q + m_0}{\sqrt{m_0^2 + 2m_0Q.}} \qquad (۲۶)$$

سرانجام با قراردادن این مقدار γ در رابطه ی (۲۳) مقدار m'_0 تعیین می شود:

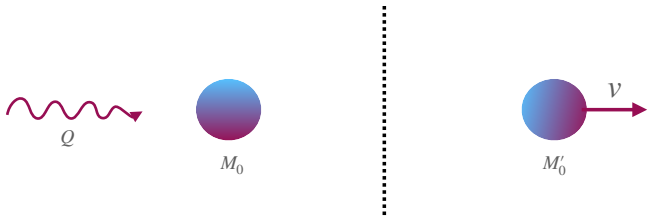
$$m'_0 = \sqrt{m_0^2 + 2m_0Q}. \qquad (۲۷)$$

این رابطه نشان می دهد که اتم پس از جذب فوتون اندکی سنگین تر شده است. برای محاسبه مقادیر واقعی می بایست به سیستم واحدهای متریک برگردیم که در نتیجه آن مقادیر سرعت و جرم به ترتیب برابر خواهند بود با:

$$v = \frac{Q}{Q + m_0c^2}c, \qquad m'_0 = \sqrt{m_0^2 + 2m_0\frac{Q}{c^2}} \qquad (۲۸)$$

باید به یاد داشته باشیم که انرژی فوتون های نور بسیار کمتر از انرژی سکون اتم هاست، یعنی $Q << m_0c^2$. در نتیجه سرعت پرتاب شدن اتم [۳] بسیار کمتر از سرعت نور است و میزان افزایش جرم اتم هم بسیار ناچیز است.

[۳] recoil



شکل ۴: جذب فوتون توسط یک اتم ساکن و پرتاب شدن اتم رو به جلو.

■ **تمرین:** برای اتم هیدروژنی که یک فوتون نور مرئی سبزرنگ با طول موج ۵۵۰۰ آنگستروم را جذب می کند، سرعت پرتاب شدن اتم را حساب کنید. هم چنین حساب کنید که جرم اتم هیدرون چه مقدار زیاد شده است و آن را با جرم اتم قبل از جذب فوتون مقایسه کنید.

۲.۴ جذب فوتون توسط اتم متحرک

این پدیده در شکل (۵) نشان داده شده است. قانون بقای انرژی و تکانه به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} Q + m_0\gamma &= m_0'\gamma' \\ Q + m_0\gamma v &= m_0'\gamma' v'. \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

در این رابطه مجهولاتی که باید پیدا کنیم v' و m_0' هستند. $m_0'\gamma'$ را از رابطه اول در رابطه دوم جایگزین می کنیم و بدست می آوریم:

$$Q + m_0\gamma v = (Q + m_0\gamma)v' \qquad (۳۰)$$

و از آنجا

$$v' = \frac{m_0\gamma v + Q}{m_0\gamma + Q}. \qquad (۳۱)$$

این رابطه نشان می دهد که در حدی که اتم بسیار سنگین باشد، سرعت آن تغییر نمی کند و هر چه سبک تر باشد سرعت آن زیادتر می شود. از این رابطه با کمی محاسبه و ساده کردن γ' معلوم می شود:

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}} = \frac{m_0\gamma - Q}{\sqrt{m_0^2 - 2m_0\gamma Q(1 - v)}} \qquad (۳۲)$$

و یا

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{m_0\gamma + Q}{\sqrt{m_0^2 + 2m_0 Q\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}}} \qquad (۳۳)$$

و در نتیجه از رابطه ی (۲۹)

$$m_0' = \frac{m_0\gamma + Q}{\gamma'} = \sqrt{m_0^2 + 2m_0 Q\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}}. \qquad (۳۴)$$

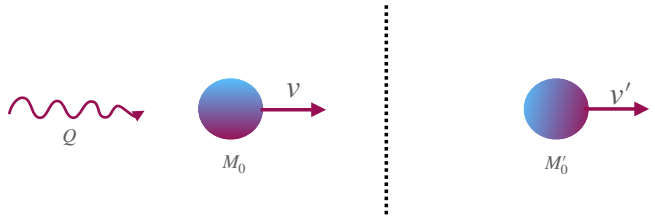
حال از خود می پرسیم که چه مقدار از انرژی فوتون تابیده شده صرف تحریک اتم (از یک تراز پایینی به یک تراز بالایی) می شود. برای این کار کافی است که تغییر جرم سکون اتم یعنی $m_0' - m_0$ را حساب کنیم. این تغییر جرم سکون همان تغییر انرژی داخلی اتم است که آن را با E نشان می دهیم:

$$E \equiv m_0' - m_0 = \sqrt{m_0^2 + 2m_0 Q\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}} - m_0. \qquad (۳۵)$$

با کمی بازنویسی این رابطه می توانیم آن را به شکل گویاتری بنویسیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که:

$$Q = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}E(1 + \frac{E}{2m_0}). \qquad (۳۶)$$

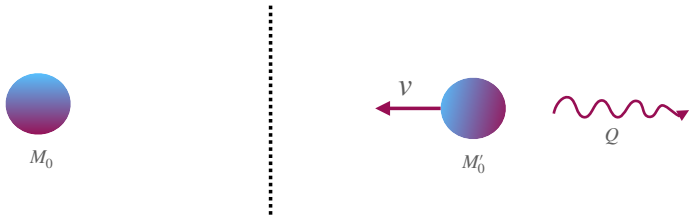
این رابطه نشان می دهد که اگر اتم بی نهایت سنگین باشد، آنگاه $E = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}Q$. چنانچه اتم ساکن باشد، تمام انرژی فوتون را جذب می کند و به لایه بالاتر می رود. اما اگر حرکت کند تنها بخشی از آن را جذب می کند. این اثر را می توان ناشی از پدیده دوپلر دانست که بسته به جهت حرکت اتم باعث کاهش یا افزایش فرکانس آن و در نتیجه باعث کاهش یا افزایش انرژی آن می شود.



شکل ۵: جذب فوتون توسط یک اتم متحرک .

۳.۴ گسیل فوتون توسط اتم ساکن

حال تصور کنید که اتمی با جرم سکون m_0 که ساکن است، فوتونی با فرکانس ν از خود گسیل می کند. در اینجا اتم پس زده می شود (درست مثل وقتی که یک گلوله از یک تفنگ شلیک می شود.) در این جا می خواهیم سرعت پس زنی [۴] اتم را حساب کنیم. علاوه بر آن می خواهیم ببینیم اتم چقدر سبک شده است.



شکل ۶: گسیل فوتون توسط یک اتم ساکن و پس زده شدن اتم رو به عقب.

قانون بقای انرژی و تکانه را می نویسیم. جرم در حال سکون اتم را پس از گسیل فوتون با m_0' نشان می دهیم. برای سادگی در محاسبات خود قرار می دهیم $c = 1$. بنابر قانون بقای انرژی داریم:

$$m_0 = m_0'\gamma + Q. \qquad (۳۷)$$

قانون بقای تکانه نیز بیان می کند که:

$$m_0' v\gamma = Q. \qquad (۳۸)$$

در این مثال هم درست مطابق مثال قبلی یعنی مسئله جذب فوتون پیش می رویم. نخست $m_0'\gamma$ بین این دو رابطه بدست می آوریم:

$$v = \frac{Q}{m_0 - Q}, \qquad (۳۹)$$

و از آنجا بدست می آوریم:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{m_0 - Q}{\sqrt{m_0^2 - 2m_0 Q.}} \qquad (۴۰)$$

[۴] Recoil Speed

و سرانجام با قراردادن این مقدار γ در رابطه (۳۷) جرم جدید اتم را محاسبه می کنیم:

$$m_0' = \frac{m_0 - Q}{\gamma} = \sqrt{m_0^2 - 2m_0 Q}. \qquad (۴۱)$$

در این جا می توانیم به این روابط از یک زاویه دیگر نگاه کنیم و یک سوال جالب از خود بپرسیم: می دانیم که اتم با سبک شدن خود انرژی فوتون گسیل شده را تامین کرده است. سوال این است: اتم چه مقدار از این اختلاف انرژی را صرف تابش فوتون کرده است؟ برای این کار از رابطه قبلی میزان تغییر جرم اتم را بدست می آوریم که برابر است با:

$$E \equiv m_0 - m_0' = m_0 - \sqrt{m_0^2 - 2m_0 Q}. \qquad (۴۲)$$

برای آنکه به سوال خود پاسخ دهیم می بایست Q را برحسب E بنویسیم. اما معکوس کردن رابطه بالا ساده است. با کمی محاسبه درمی یابیم:

$$Q = E(1 - \frac{E^2}{2m_0}) \qquad (۴۳)$$

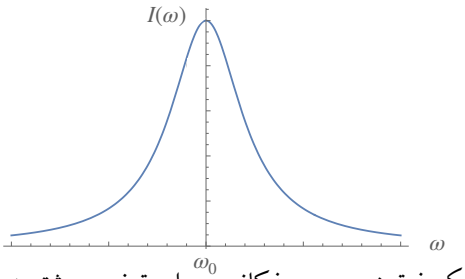
حال وقت آن است که توان های مناسبی از c را در روابط بالا قرار دهیم تا به سیستم واحدهای متریک برگردیم. این کار به سادگی انجام می شود و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v &= (\frac{Q}{m_0 c^2 - Q})c, \\ Q &= E(1 - \frac{E^2}{2m_0 c^2}). \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

این روابط نشان می دهند که هر چه اتم سنگین تر باشد، سرعت پس زنی آن کمتر است و مقدار بیشتری از تغییر جرم آن به انرژی تابش تبدیل می شود. اما اهمیت این سوال و رابطه ای که بدست آورده ایم در چیست؟ این رابطه آخر نشان می دهد که اتمی که یک فوتون تابش می کند، انرژی آن فوتون کمتر از انرژی از دست داده شده توسط فوتون گسیل شده است و بنابراین اگر آن فوتون به اتم مشابه دیگری برخورد کند، نخواهد توانست آن اتم را تحریک کرده و از یک حالت با انرژی کمتر به حالت با انرژی بیشتر ببرد و در واقع نخواهد توانست توسط آن اتم جذب شود. معنای آشکارش این است که یک گاز نسبت به تابش خود کاملا شفاف است. اما در واقعیت این شفافیت چندان کامل نیست. یک دلیل اش این است که لایه های اتمی انرژی شان کاملا تیز نیست، شکل (۷)،

و در نتیجه اتم ها فوتون ها را در یک محدوده خیلی باریکی از یک فرکانس گسیل کرده و در همان محدوده باریک هم جذب می کنند. برای فهم بهتر این موضوع اتمی را در نظر بگیرید که فاصله انرژی تراز برانیگخته اش با تراز پایه اش برابر با $E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$ باشد. این اتم اگر از تراز بالایی به تراز پایینی سقوط کند با احتمال خیلی زیاد فوتونی با فرکانس ω_0 تولید می کند. هم چنین فوتون هایی با این فرکانس را نیز با

احتمال بسیار زیاد جذب می کند. اما این تابع احتمال یک تابع خیلی تیز نیست و معمولا شبیه به منحنی نشان داده شده در شکل (۷) است که معنایش این است که فوتون هایی با فرکانس کمی کمتر یا بیشتر نیز با احتمالی کمتر از ا حتمال بیشینه گسیل و جذب می شوند.

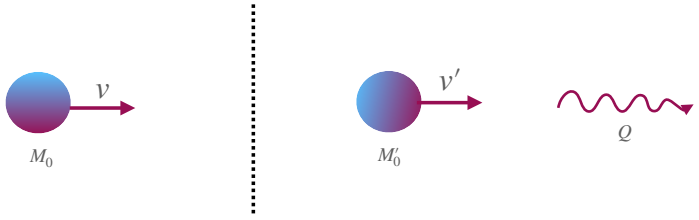


شکل ۷: احتمال جذب یک فوتون بر حسب فرکانس. برای توضیح بیشتر به متن درس مراجعه کنید.

البته احتمال جذب یک فوتون با دورشدن از مرکز آن محدوده کم می شود. دلیل دوم اش این است که اتم ها در یک گاز حرکت می کنند و حرکت اتم ها باعث تغییر روابط بالا می شود. این را می توان به پدیده دوپلر و پهن شدگی دوپلری خطوط طیفی [۵] نیز ربط داد. در ادامه این بخش گسیل فوتون را از یک اتم متحرک مطالعه می کنیم.

۴.۴ گسیل فوتون توسط اتم متحرک

این پدیده در شکل (۸) نشان داده شده است.



شکل ۸: گسیل فوتون از یک اتم متحرک

[۵] Doppler Broadening of Spectral Lines

اتمی که خود در حال حرکت است فوتونی را گسیل می کند. در این حالت روابط بقای انرژی و تکانه به ترتیب عبارت اند از:

$$m_0\gamma = m_0'\gamma' + Q$$
$$m_0\gamma v = m_0'\gamma' v' + Q. \qquad (۴۵)$$

در این رابطه مجهولاتی که باید پیدا کنیم v' و m_0' هستند. بازهم مثل قبل $m_0'\gamma'$ را از رابطه اول در رابطه دوم جایگزین می کنیم و بدست می آوریم:

$$m_0\gamma v = (m_0\gamma - Q)v' + Q \qquad (۴۶)$$

و از آنجا

$$v' = \frac{m_0\gamma v - Q}{m_0\gamma - Q}. \qquad (۴۷)$$

از این رابطه با کمی محاسبه و ساده کردن γ' معلوم می شود:

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{m_0\gamma - Q}{\sqrt{m_0^2 - 2m_0\gamma Q(1-v)}} \qquad (۴۸)$$

و یا

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{m_0\gamma - Q}{\sqrt{m_0^2 - 2m_0 Q\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}}} \qquad (۴۹)$$

و در نتیجه از رابطه ی (۴۵)

$$m_0' = \frac{m_0\gamma - Q}{\gamma'} = \sqrt{m_0^2 - 2m_0 Q\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}}. \qquad (۵۰)$$

بازهم مثل قبل می توانیم بپرسیم که اتم چه مقدار از جرم سکونی را که از دست می دهد تبدیل به انرژی فوتون می کند. برای پاسخ به این سوال می نویسیم:

$$E := m_0 - m_0' = m_0 - \sqrt{m_0^2 - 2m_0 Q\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}} \qquad (۵۱)$$

با معکوس کردن این رابطه به نتیجه زیر می رسیم:

$$Q = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}E(1 - \frac{E}{2m_0}) \qquad (۵۲)$$

مقایسه این رابطه با رابطه ی (۴۴) نشان می دهد که سرعت اولیه اتم از طریق فاکتور $\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ کمبود تبدیل انرژی را جبران کرده است.

این رابطه نشان می دهد که اگر سرعت اتم به اندازه کافی زیاد باشد، انرژی فوتون گسیل شده از آن نیز می تواند به اندازه کافی زیاد شود طوریکه بتواند دوباره جذب یک اتم دیگر شود. برای این کار کافی است سرعت چنان باشد که Q یعنی انرژی فوتون گسیل شده در حدود اختلاف انرژی دو تراز انرژی یعنی E باشد. با توجه به رابطه (۵۲) این به معنای آن است که داشته باشیم:

$$v \approx \frac{E}{2m_0} \qquad (۵۳)$$

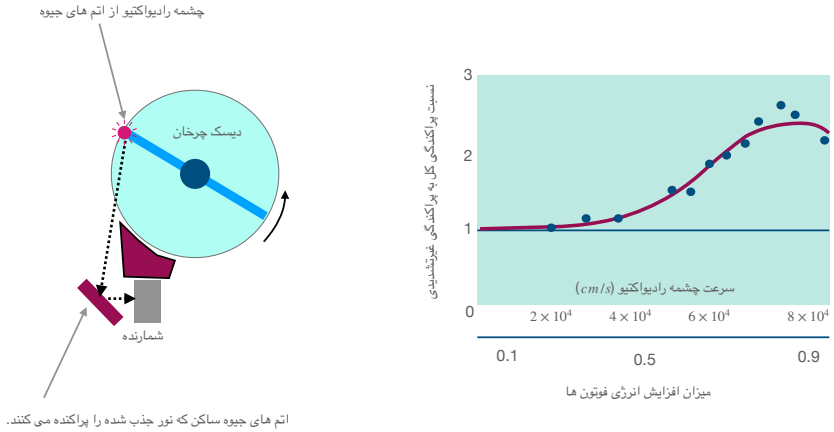
و یا در سیستم واحدهای متریک

$$v \approx \frac{E}{2m_0 c}. \qquad (۵۴)$$

اگر فوتون های گسیل شده از اتم های متحرکت را به اتم های ساکن بتابانیم، احتمال جذب آنها وقتی به بیشترین حد ممکن می رسد که سرعت اتم ها از رابطه بالا تعیین شود. این پدیده نخستین بار توسط فیلیپ برتن مون [۶] در ۱۹۵۱ در یک آزمایش مشاهده شده است. شمای کلی این آزمایش در شکل (۹) دیده می شود. یک چشمه از اتم های رادیو اکتیو جیوه H^{128} روی یک لبه چرخ قرار داده شده و اشعه گامای گسیل شده از آن توسط آینه ای که در زیر چرخ تعبیه شده به اتم های جیوه ای از همان نوع تابانده می شود. چنانچه اتم های جیوه این اتم هرا پراکنده کنند به معنای این است که آنها را جذب کرده و در یک جهت دیگر گسیل کرده اند. یک شمارنده تعداد فوتون های گاما را می شمارد و ثبت می کند. منحنی طرف راست نشان می دهد که وقتی سرعت اتم ها به مقدار نشان داده شده در رابطه بالا نزدیک می شود تعداد فوتون های پراکنده شده به بیشترین مقدار خود می رسد. سرعت اتم ها (یعنی سرعت لبه چرخ) را نمی توان از یک حدی زیاد تر کرد چرا که ناپایداری مکانیکی چرخ باعث متلاشی شدن آن می شود.

■ در آزمایش اولیه مون، سرعت لبه چرخ به هفتصد متر بر ثانیه می رسد. انرژی فوتون های صادر شده از اتم های رادیو اکتیو یعنی Q چقدر است؟

[۶] Philip Burton Moon



شکل ۹: طرح آزمایشِ Moon برای مطالعه تاثیر سرعت اتم ها بر گسیل فوتون ها.

۵.۴ موشک فوتونی

شکل (۱۰) ایده یک موشک فوتونی [۷] را نشان می دهد. در این موشک به جای اینکه گاز های سوزان ناشی از سوخت های معمولی از موشک خارج شده و آن را به بالا پرتاب کند، گاز فوتونی با سرعت نور از آن خارج شده و باعث رانش موشک به سمت بالا می شود. هدف از طراحی چنین موشک خیالی ای این است که سفینه با آن چنان سرعتی به بالا پرتاب شود که ضریب γ برای آن قابل ملاحظه شود،مثلا به مقدار $\gamma = 10$ برسد، چرا که اگر چنین هدفی محقق شود به معنای آن است که گذشت زمان برای مسافران سفینه با ضریب $\frac{1}{10}$ کند خواهد شد و صد سال زمینی برای آنها تنها ده سال خواهد گذشت. می خواهیم حساب کنیم چنین موشکی چه مقدار از جرم سکون اولیه خود را می تواند به بالا پرتاب کند.

[۷] Photon Rocket

شکل ۱۰: سمت چپ. قبل از پرواز با جرم سکون m_0. سمت راست: گاز فوتونی با انرژی کل E_r با سرعت نور از موشک خارج می شود و سفینه به جرم سکون fm_0 را به بالا پرتاب می کند.

برای پاسخ به این سوال بازهم می بایست از قوانین بقا استفاده کنیم. با در نظر گرفتن $c = 1$ می نویسیم:

$$\begin{aligned} m_0 &= fm_0\gamma + E_r \\ 0 &= E_r - fm_0\gamma v. \end{aligned} \tag{۵۵}$$

با حذف E_r در این دو معادله بدست می آوریم:

$$m_0 = fm_0\gamma(1+v) \tag{۵۶}$$

و یا

$$f = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \tag{۵۷}$$

از آنجا که هدف اصلی ما رسیدن به γ های زیاد است بهتر است طرف راست معادله بالا را بر حسب γ بنویسیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که:

$$f = \frac{1}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}. \tag{۵۸}$$

این رابطه نشان می دهد که برای رسیدن به چنین ضریبی از انبساط زمان جرم سفینه می بایست حدوداً $\frac{1}{20}$ جرم موشک باشد. به خودی خود این ضریب بدی نیست. اما مسئله این است که این موشک فوتونی برای کاهش سرعت اش و نشستن روی مثلا ماه بازهم باید همین کار را انجام دهد

و یک بار دیگر هم برای شتاب گرفتن و برخاستن از سطح ماه و فرود به سطح زمین می بایست همین کار را تکرار کند. در نتیجه ضریب نهایی نه یک f بلکه f^4 است که جرم سفینه را نسبت به جرم موشک اولیه به مقدار ناچیز $\frac{1}{160,000}$ می رساند. بنابراین ایده موشک فوتونی نه تنها از نظر مهندسی بلکه از نظر فیزیک نیز خیالپردازانه است مگر اینکه تغییری اساسی در آن داده شود، مثلا نوعی سوخت هیبریدی در آن استفاده شود.

---

۵ خلق و نابودی ذرات

دنیای فیزیک ذرات پر است از برخورد ذرات پر انرژی به یکدیگر و تولید ذره های جدید. باریکه های پر انرژی الکترون-پوزیترون یا پروتون-پادپروتون شتاب داده شده و به هم برخورد می کنند و انبوهی از ذرات جدید تولید می شوند. در بعضی آزمایشها نیز یک باریکه پر انرژی به یک هدف ثابت از ذرات دیگر اصابت می کند و ذرات جدید تولید می کند. در همه این برخوردها پیدایش هر نوع ذره جدیدی قابل تصور است مشروط بر آنکه قوانین بقایی که می شناسیم نقض نشوند. طبیعتا مهم ترین این قوانین مربوط به قوانین بقای انرژی و تکانه هستند. اما قوانین دیگری هم هستند که به همین اندازه اهمیت دارند، مثل قانون بقای بار، قانون بقای عدد باریونی و لپتونی و نظایر آن. این قوانین بسیاری از واکنش ها را ناممکن می سازند. به عنوان مثال واکنشِ $p^+ + p^- \longrightarrow e^+ + e^-$ که در آن یک پروتون و یک پادپروتون به هم می تابند و یک زوج الکترون پوزیترون خلق می کنند، ناممکن است چرا که این فرایند بقای عدد باریونی را نقض می کند، اگر چه قوانین بقای انرژی و تکانه را رعایت می کند.

در این درس ما فقط به قانون بقای انرژی و تکانه می پردازیم و چندین واکنش مهم در فیزیک ذرات را بررسی می کنیم. بنابراین در مثال های پیش رو برخوردهایی را در نظر می گیریم که از نظر دیگر قوانین بقا امکان پذیر باشند. می خواهیم ببینیم که قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت چگونه این واکنش ها را محدود می کنند.

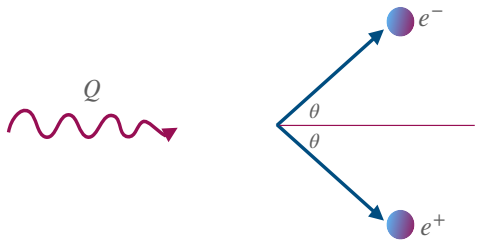
۱.۵ تبدیل فوتون به زوج الکترون ـ پوزیترون

در نخستین مثال می خواهیم ببینیم آیا یک فوتون می تواند به یک زوج ذره ـ پاد ذره تبدیل شود یا خیر؟ به شکل (۱۱) نگاه می کنیم . بازهم مثل همیشه قرار می دهیم $c = 1$ و قوانین بقای انرژی و تکانه در راستای حرکت فوتون را می نویسیم. (روی شکل بقای تکانه در راستای عمود

بر حرکت فوتون رعایت شده است.). انرژی فوتون را برابر با Q می گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} Q &= 2m_0\gamma \\ Q &= 2m_0\gamma v\cos\theta. \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

از ترکیب این دو رابطه نتیجه می گیریم $v\cos\theta = 1$ و چون $\cos\theta \leq 1$ است، این رابطه به معنای این است که $v \geq 1$. یعنی سرعت الکترون و پوزیترن می بایست بزرگتر یا مساوی با سرعت نور باشد که چنین چیزی ممکن نیست، بخصوص وقتی توجه کنیم که این ذرات جرم دارند سرعت آنها مساوی با سرعت نور نیز نمی تواند باشد.



شکل ۱۱: تبدیل یک فوتون به یک زوج الکترون پوزیترون. نمادی است که معمولا برای نمایش فوتون به کار می رود. اگر ذره دیگری حضور نداشته باشد، در چنین واکنشی قانون بقای انرژی و تکانه نقض می شود.

■ **تمرین:** در مسئله قبل جرم الکترون و پوزیترون یکی بود. آیا ممکن است که یک فوتون به دو ذره باردار با جرم های متفاوت تبدیل شود؟

اگر چه تبدیل یک فوتون به یک زوج الکترون ـ پوزیترون غیر ممکن است اما این کار در حضور یک ذره دیگر (مثلا هسته یک اتم) امکان پذیر است. برای این که حداقل انرژی مورد نیاز را برای چنین واکنشی پیدا کنیم بهترین کار این است که موقتا به چارچوبی با تکانه کل صفر برویم و سپس به چارچوب آزمایشگاه بازگردیم. در چارچوب تکانه ـ صفر محصولات واکنش می بایست همه در یک نقطه ساکن بمانند (زیرا می خواهیم حداقل انرژی مورد نیاز را پیدا کنیم یعنی ذرات تولید شده انرژی جنبشی نداشته باشند). در نتیجه در آزمایشگاه همه ذرات تولید شده با یک سرعت در امتداد همان تکانه فوتون حرکت می کنند، شکل (۱۲).

شکل ۱۲: تولید یک زوج ذره و پادذره در حضور یک ذره دیگر توسط فوتون.

در چنین حالتی قوانین بقای انرژی و تکانه به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} Q + M_0 &= (2m_0 + M_0)\gamma \\ Q &= (2m_0 + M_0)\gamma v. \end{aligned} \qquad (۶۰)$$

از ترکیب این دو رابطه سرعت نهایی ذرات بدست می آید:

$$v = \frac{Q}{M_0 + Q}. \qquad (۶۱)$$

و از آنجا

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{Q + M_0}{\sqrt{M_0^2 + 2QM_0}}. \qquad (۶۲)$$

به این ترتیب از رابطه دوم در (۶۰) حداقل انرژی مورد نیاز برای فوتون بدست می آید:

$$Q = 2m_0(1 + \frac{m_0}{M_0}). \qquad (۶۳)$$

در این رابطه ها اگر M_0 را به سوی صفر میل دهیم، به روابط غیر ممکن می رسیم به این معنا که سرعت نهایی ذرات به سمت یک (یعنی سرعت نور) و حداقل انرژی لازم برای فوتون ها به سمت بی نهایت میل می کند. هر چه که جرم ذره ی سوم سنگین تر باشد (مثلا جرم یک هسته اتم) انرژی مورد نیاز برای فوتون کمتر می شود.

۲.۵ تولید پایون از برخورد پروتون ها

در آزمایشگاه می توانیم باریکه های پروتون و پادپروتون را شتاب داده و بهم بکوبیم. از این واکنش ها پروتون، نوترون و یک ذره دیگر به نام پایون با بار منفی تولید می شود:

$$P^+ + P^- \longrightarrow P^+ + N^0 + \pi^-. \qquad (۶۴)$$

پروتون، پادپروتون و نوترون همگی تقریبا یک انرژی سکون دارند که برابر است با $1000\ Mev$ و انرژی در حال سکون پایون برابر است با $140\ Mev$. حال می خواهیم به سوالات زیر پاسخ گوییم:

الف: اگر پروتون ها و پادپروتون ها را با انرژی مساوی به هم بکوبیم، حداقل انرژی برای تولید پایون چقدر است؟ در این انرژی پروتون ها چه سرعتی دارند؟

ب: اگر تنها باریکه پادپروتون ها را شتاب دهیم و برای پروتون ها از یک هدف ثابت استفاده کنیم، حد اقل انرژی پادپروتون ها برای تولید پایون چقدر است؟ در این انرژی سرعت پادپروتون ها چقدر است؟ کدام یک از روش های الف یا ب به صرفه تر هستند؟

■ **حل:** برای قسمت الف، از آنجا که حداقل انرژی خواسته شده است، شرایطی را در نظر می گیریم که همه ذرات نهایی ساکن هستند. بنابراین یک پروتون و یک پاد پروتون با سرعت v در دو جهت مخالف حرکت کرده، به هم برخورد می کنند و سه ذره نهایی را تولید می کنند و این سه ذره هم ساکن باقی می مانند و هیچ انرژی جنبشی با خود حمل نمی کنند. در این شرایط قانون بقای تکانه برقرار است و فقط می بایست قانون بقای انرژی را در نظر بگیریم که به موجب آن:

$$2M_0\gamma = 2M_0 + m_{\pi^-} \qquad (۶۵)$$

که در آن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. از این رابطه نتیجه می گیریم:

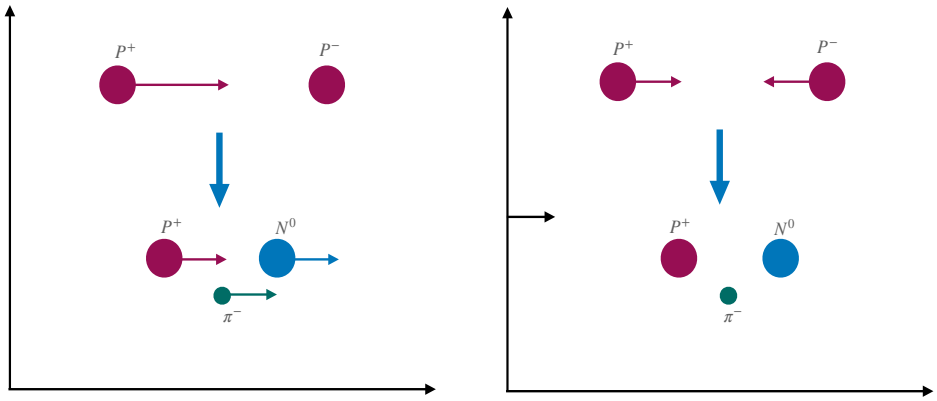
$$\gamma = \frac{m_{\pi^-}}{2M_0} + 1 = 1.07 \qquad (۶۶)$$

بنابراین انرژی پروتون ها و پادپروتون ها برابر است با:

$$E(P^{\pm}) = M_0\gamma = 1070\ Mev \qquad (۶۷)$$

و سرعت آنها برابر است با:

$$v = \sqrt{1-\gamma^{-2}} = 0.36. \qquad (۶۸)$$



شکل ۱۳: برخورد پروتون و پادپروتون و تشکیل پایون از دو مختلف.

حال به قسمت دوم سوال می پردازیم. برای پاسخ به این سوال بجای اینکه یک بار دیگر از ابتدا مسئله را حل کنیم و قوانین بقای تکانه و انرژی را بنویسیم، به همان واکنش قسمت الف که در چارچوب مرکز جرم ذرات نهایی رخ می داد در چارچوب آزمایشگاه نگاه می کنیم. در این چارچوب پروتون ساکن است و پاد پروتون با سرعت V به آن برخورد می کند. با توجه به شکل (۱۳) این سرعت برابر است با:

$$V = \frac{2v}{1+v^2} \qquad (۶۹)$$

برای این سرعت γ_V برابر است با:

$$(\gamma_V)^{-2} = 1 - V^2 = \frac{(1-v^2)^2}{(1+v^2)^2} \qquad (۷۰)$$

و یا

$$\gamma_V = \frac{1+v^2}{1-v^2} \qquad (۷۱)$$

و با جایگذرای از رابطه (۶۸)

$$\gamma_V = 2\gamma^2 - 1 \approx 1.29. \qquad (۷۲)$$

بنابراین مقدار انرژی پروتون هایی که شتاب گرفته اند برابر است با $E_P \approx 1290\ Mev$. در نتیجه مجموع انرژی باریکه پروتون ها و پروتون های هدف برابر است با $1000 + 1290 = 2290\ Mev$، که از مجموع انرژی در حالت قبل یعنی $1070 + 1070 = 2140\ Mev$ بیشتر است. طبیعی هم هست چرا که در این حالت پروتون های ایجاد شده انرژی جنبشی هم دارند. اما مسئله مهم تر این است که رساندن انرژی پروتون ها به $1290\ Mev$ کار بسیار سختی است، چرا که در سرعت های بالا جرم پروتون ها به شدت افزایش پیدا می کند.

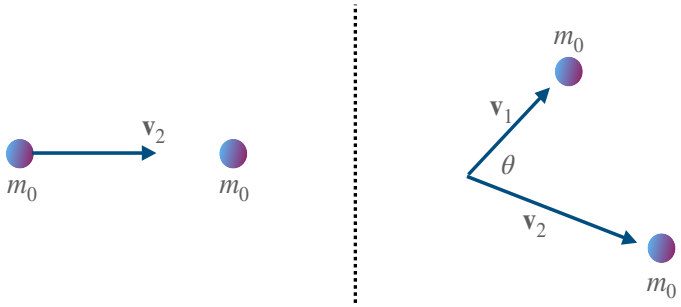
---

۶ پراکندگی

از آزمایش کلاسیک رادرفورد در ۱۹۱۰ تا کنون پراکندگی ذرات از یکدیگر یکی از مهم ترین شیوه های شناخت ساختار ذرات بوده است. در آزمایشگاه های کوچک و بزرگ برخورد ذرات و میزان پراکندگی آنها در زاویه های مختلف منبع ارزشمندی برای کسب اطلاعات است و برای مطالعه همه این برخوردها هم قوانین بقای تکانه و انرژی نسبیتی مورد استفاده قرار می گیرد. در این بخش دو نوع پراکندگی را مطالعه می کنیم. نخست پراکندگی الاستیک ذرات یکسان و سپس پراکندگی فوتون ها از اتم ها که همان اثر شناخته شده کامپتون است.

۱.۶ پراکندگی الاستیک ذرات یکسان

اگر یک ذره با سرعت به ذره ساکن و یکسانی برخورد کند این دو ذره در دو زاویه متفاوت پراکنده می شوند، شکل (۱۴).



شکل ۱۴: پراکندگی الاستیک ذرات یکسان. در مکانیک نیوتنی زاویه بین دو ذره پراکنده شده همواره ۹۰ درجه است ولی در نسبیت این زاویه کمتر است.

در مکانیک نیوتنی به آسانی ثابت می شود که زاویه بین دو ذره پس از پراکندگی الاستیک همواره ۹۰ درجه است. اما خواهیم دید که در مکانیک نسبیتی این زاویه کمتر از ۹۰ درجه است و برای وقتی که سرعت ذره اولیه به سوی سرعت نور میل می کند این زاویه نیز به صفر میل می کند. نخست اثبات قضیه نیوتنی را که خیلی هم ساده است مرور کنیم. قوانین بقای تکانه و انرژی برای این دو ذره (در مکانیک نیوتنی) و پس از حذف جرم m_0 که برای همه ذرات یکسان است عبارت است از:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ v^2 &= v_1^2 + v_2^2. \end{aligned} \qquad (۷۳)$$

از این دو رابطه براحتی معلوم می شود که $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ که نشان می دهد زاویه بین دو ذره همواره ۹۰ درجه است.

حال این مسئله را در مکانیک نسبیتی حل می کنیم. بدیهی است که نتایجی که بدست خواهیم آورد در حد سرعت های خیلی کم می بایست به همین نتیجه بالا تبدیل شوند.

الف: نخست حالت متقارنی را در نظر می گیریم که ذارت نهایی با زاویه یکسان نسبت به مسیر اولیه منحرف می شوند. قانون بقای انرژی و تکانه در مکانیک نسبیتی بیان می کنند که:

$$\begin{aligned} m_0\gamma + m_0 &= m_0\gamma_1 + m_0\gamma_2 \\ m_0\gamma\mathbf{v} &= m_0\gamma_1\mathbf{v}_1 + m_0\gamma_2\mathbf{v}_2. \end{aligned} \qquad (۷۴)$$

با حذف m_0 از طرفین و ترکیب آن دو خواننده می تواند براحتی نشان دهد که

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \equiv v_1 v_2 \cos\theta = 1 - \frac{\gamma}{\gamma_1\gamma_2}, \qquad (۷۵)$$

از آنجا که $v_i = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_i^2}}$، به نتیجه زیر می رسیم:

$$\cos\theta = \frac{\gamma_1\gamma_2 - \gamma}{\sqrt{\gamma_1^2 - 1}\sqrt{\gamma_2^2 - 1}}. \qquad (۷۶)$$

اما با جایگذاری $\gamma + 1 = \gamma_1 + \gamma_2$ در رابطه بالا و ساده کردن درمی یابیم که :

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}}. \qquad (۷۷)$$

این رابطه نشان می دهد که $0 \leq \cos\theta < 1$. هرچه که سرعت ذرات زیاد تر باشد زاویه بین دو ذره کوچکتر است. در واقع در سرعت های کم که γ ها نزدیک به یک هستند، زاویه ۹۰ درجه است و در سرعت های نزدیک به سرعت نور که γ ها به سمت بی نهایت میل می کنند، زاویه به سمت صفر میل می کند و بسته می شود.

۲.۶ اثر کامپتون

اثر کامپتون شاید مهم ترین و مستقیم ترین شاهد برای ماهیت ذره ای نور است. اشعه نوری (معمولا اشعه ایکس یا گام) را به الکترون ها می تابانیم و این اشعه پراکنده می شود. در هر زاویه ای که طول موج نور پراکنده شده را اندازه می گیریم مشاهده می کنیم که طول موج آن اندکی (بسته به زاویه) افزایش یافته است. دلیل آن هم این است که نور تابیده شده الکترون را به سویی پرتاب کرده و انرژی اش کم شده و در نتیجه طول موج اش افزایش یافته است. بستگی طول موج به زاویه را تنها می توان با در نظر گرفتن نور به صورت ذره ای با انرژی و تکانه معین و تحلیل این پراکندگی به مثابه یک برخورد الاستیک توضیح داد. این کاری است که در این بخش انجام می دهیم. در سلسله آزمایشهایی که آرتور کامپتون [۸] در فاصله سالهای ۱۹۱۹ تا ۱۹۲۳ انجام داده، این وابستگی به دقت تایید شده است. شکل (۱۵)

شکل ۱۵: اثر کامپتون: پراکنده شدن فوتون از الکترون.

این پدیده را به شکل ساده ای نشان می دهد. قوانین بقای انرژی، تکانه در راستای افقی و تکانه در راستای عمودی را در سیستم واحدهایی می نویسیم که در آن c برابر با یک باشد. این روابط به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} h\nu + m_0 &= h\nu' + m_0\gamma \\ h\nu &= h\nu' \cos\theta + m_0\gamma v \cos\phi \\ 0 &= h\nu' \sin\theta - m_0\gamma v \sin\phi. \end{aligned} \qquad (۷۸)$$

هدف ما بدست آوردن ν' به عنوان تابعی از θ است. بنابراین می بایست مجهولات دیگر یعنی ϕ v را فعلا حذف کنیم. با ترکیب روابط دوم و سوم بدست می آوریم:

$$(h\nu - h\nu' \cos\theta)^2 + (h\nu' \sin\theta)^2 = (m_0\gamma)^2, \qquad (۷۹)$$

[۸] Arthur Holy Compton (1892-1962)

یا پس از ساده کردن

$$h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta) = m_0^2(\gamma^2 - 1). \qquad (۸۰)$$

با ترکیب این رابطه با رابطه اول از (۷۸) و ساده کردن به رابطه زیر می رسیم:

$$h\nu\nu'(1 - \cos\theta) = m_0(\nu - \nu'). \qquad (۸۱)$$

می توانیم با استفاده از $\nu = \frac{c}{\lambda}$ این رابطه را بر حسب طول موج بنویسیم که در این صورت به شکل زیر در می آید:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta). \qquad (۸۲)$$

این رابطه همان چیزی است که توسط کامپتون به تایید تجربی رسیده است. کمیت $\lambda_c := \frac{h}{m_0 c}$ نیز به طول موج کامپتون معروف است و مقدار آن برابر با 2.43×10^{-2} آنگستروم است. از این رابطه معلوم است که اگر پراکندگی از ذره سنگین تری مثل هسته اتم صورت بگیرد، تغییری در طول موج نور پراکنده شده مشاهده نخواهد شد، دلیل اش هم این است که در این صورت هسته پس زده نخواهد شد. اگر به الکترون ها بازگردیم، می توانیم زاویه پرتاب الکترون یعنی ϕ را نیز حساب کنیم. در روابط (۷۸) از تقسیم دو رابطه دوم و سوم برهم، بدست می آوریم:

$$\tan\phi = \frac{\nu'\sin\theta}{\nu - \nu'\cos\theta} \qquad (۸۳)$$

و با جایگزینی طول موج به جای فرکانس و ساده کردن نتیجه نهایی به شکل زیر در می آید:

$$\tan\phi = \frac{\lambda\sin\theta}{\lambda(1 - \sin\theta) + \lambda_c(1 - \cos\theta)}. \qquad (۸۴)$$

تحقیق تجربی این رابطه یعنی اندازه گیری زاویه ای که الکترون ها پرتاب می شوند، در زمان کامپتون امکان پذیر نبوده و سی سال طول کشیده تا آزمایش درستی این رابطه را نشان دهد. [۹] به بیان دقیق تر در آزمایش معلوم شده وقتی فوتونی در زاویه θ پراکنده می شود، الکترون هم با اختلاف زمانی ای که کمتر از حدودِ 10^{-11} ثانیه است در زاویه بالا پراکنده می شود.

۷ چهاربردار تکانه

دیدیم که مختصات زمانی و مکانی یک رویداد کمیت های جداگانه ای نیستند بلکه همه آنها در یک چهاربردار فضازمان $x^\mu = (ct, x, y, z)$ جای می گیرند که مشخص کننده آن رویداد در یک فضازمان است. ناظرهای مختلف مولفه های این چهاربردار را به صورت های مختلفی می

[۹] W.G. Cross, N. F. Ramsey, 1950.

بینند در حالی که خود آن چهاربردار ثابت و لایتغیر است. حال سوال می کنیم که انرژی و تکانه های یک جسم چگونه کمیت هایی هستند و این کمیت ها برای ناظر های مختلف چگونه به هم مرتبط می شوند. برای این که پاسخ متقنی به این سوال بدهیم بهترین کار این است که واقعا انرژی و تکانه های جسمی به جرم سکون m_0 را در چارچوب های مختلف محاسبه کنیم و ربط بین آنها را به طور صریح پیدا کنیم. این کاری است که در ابتدای این بخش انجام می دهیم.

جسمی به جرم سکون m_0 در چارچوب S' با سرعت u' در راستای x حرکت می کند. چارچوب S' نسبت به چارچوب S با سرعت v در راستای x حرکت می کند. در این صورت این ذره در چارچوب S دارای سرعت $u = \frac{u'+v}{1+u'v}$ است. حال عبارت های تکانه و انرژی این ذره را در چارچوب S می نویسیم و با استفاده از رابطه اخیر سعی می کنیم آنها را به عبارت های مشابه در چارچوب S' ربط دهیم. نخست با کمی محاسبه بدست می آوریم:

$$(1-u^2) = (1-u'^2)\frac{1-v^2}{(1+u'v)^2} \qquad (۸۵)$$

و یا

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \gamma\frac{1}{\sqrt{1-u'^2}}(1+u'v), \qquad (۸۶)$$

که در آن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ همان ضریبی است که در تبدیلات لورنتز بین دو چارچوب به کار می بریم. با استفاده از این رابطه و عبارت هایی که برای انرژی و تکانه داریم به آسانی بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} = \gamma\frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2}}(1+u'v) = \gamma(E'+vP') \\ P_x &= \frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2}} = \gamma\frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2}}(1+u'v)(\frac{u'+v}{1+u'v}) = \gamma\frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2}}(u'+v) = \gamma(P'+vE'). \end{aligned} \qquad (۸۷)$$

این روابط را در واحدهایی نوشته ایم که در آن سرعت نور c برابر با 1 بوده است. برای اینکه در سیستم واحدهای متریک این روابط را بنویسیم، می بایست توانهای مناسبی از c را چنان قرار دهیم که دیمانسیون طرفین برابر باشد. بنابراین به رابطه زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} &= \gamma(\frac{E'}{c}+\beta P') \\ P_x &= \gamma(P'+\beta\frac{E'}{c}), \end{aligned} \qquad (۸۸)$$

که در آن $\beta = \frac{v}{c}$.

این رابطه نشان می دهد که $P^\mu = (\frac{E}{c}, P_x, P_y, P_z)$ یک چهاربردار است. یعنی تکانه سه مولفه ای $\mathbf{P}$ و انرژی E هیچکدام هویت مستقلی ندارند و آنچه که هویت مستقل دارد چهاربردار $(\frac{E}{c}, P_x, P_y, P_z)$ است که ثابت است و مولفه هایش بین چارچوب های لخت مختلف به شکلی که نشان داده شده تبدیل می شوند.

- **تمرین:** این تمرین یک راه خیلی ساده برای بدست آوردن تبدیلات انرژی و تکانه است. سرعت چارچوب S' را نسبت به چارچوب S با پارامتر θ مشخص کنید که در آن $v = \tanh\theta$، (c را برابر با یک بگیرید.) سرعت ذره را نسبت به هر دو دستگاه نیز با پارامترهای مثلثات هیربولویک مشخص کنید و سپس از روابط مثلثاتی استفاده کنید و تبدیلات سرعت و تکانه را بدست آورید.

- **تمرین:** در مثال قبلی تنها تبدیل E و P_x را بدست آوردیم. نشان دهید که مولفه های عمودی تکانه بین دو دستگاه یکسان است. به عبارت دیگر وقتی حرکت دو دستگاه در راستای x است، داریم:

$$\begin{aligned} P_y &= P'_y, \\ P_z &= P'_z. \end{aligned} \qquad (۸۹)$$

- **تمرین:** دستگاه S' نسبت به دستگاه S با سرعت $\mathbf{v} = v\hat{x}$ در حال حرکت است. ذره ای در دستگاه S' با سرعت $\mathbf{u}'$ و در دستگاه S با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می کند. در این صورت نشان دهید که رابطه زیر برقرار است:

$$\gamma_u = \gamma_v \gamma_{u'} (1 + \mathbf{u}'.\mathbf{v}) \qquad (۹۰)$$

که در آن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

یک بار دیگر رابطه جرم و انرژی و تکانه را می نویسیم:

$$E = mc^2, \qquad \mathbf{P} = m\mathbf{v}, \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (۹۱)$$

با ترکیب این عبارت ها به رابطه زیر می رسیم:

$$E^2 - c^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = (m_0 c^2)^2. \qquad (۹۲)$$

این رابطه اهمیت بسیار دارد. چرا که می دانیم انرژی و تکانه در دستگاه های لخت متفاوت مقادیر متفاوتی دارند (چون هر دو وابسته به سرعت ذره هستند)، اما طرف راست این عبارت ثابت است و ربطی به سرعت ندارد. بنابراین علیرغم این که انرژی و تکانه یک ذره در دستگاه های مختصات مختلف متفاوت است، اما عبارت $E^2 - c^2\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$ یک ناوردای نسبیتی است. این امر یادآور ناوردای نسبیتی بودن عبارت $c^2t^2 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ است. معنای آن این است که انرژی و تکانه نیز دیگر کمیت های مستقلی نیستند بلکه مولفه های یک چهاربردار به نام چهاربردار تکانه هستند که آن را با

$$P^\mu \equiv (\frac{E}{c}, P_x, P_y, P_z) \qquad (۹۳)$$

نشان می دهیم. ناوردایی طول این چهاربردار نیز به صورت زیر بیان می شود:

$$\eta_{\mu,\nu}P^\mu P^\nu = m_0^2c^4 \qquad (۹۴)$$

و یا با قرار دادن $c = 1$

$$\eta_{\mu,\nu}P^\mu P^\nu = m_0^2. \qquad (۹۵)$$

به این ترتیب در نسبیت خاص سه کمیت تکانه و یک کمیت انرژی تفسیر هندسی عمیق وزیبایی پیدا می کنند به این معنا که مولفه ها ی یک چهاربردار لورنتزی هستند. به محض اینکه می فهمیم با یک چهاربردار سر و کار داریم بلافاصله می توانیم بفهمیم که در یک چارچوب لخت جدید، تکانه ها و انرژی یک ذره چگونه خواهند بود. جواب اش ساده است: مثل هر چهاربردار دیگری این مولفه ها نیز تبدیل می شوند:

$$P^\mu \longrightarrow P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu. \qquad (۹۶)$$

هم چنین از رابطه $E^2 - c^2\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = m_0^2c^4$ نتیجه می گیرم

$$E = \sqrt{P^2c^2 + (m_0c^2)^2}.$$

سرعت های پایین یا حد غیرنسبیتی به این معناست که $v << c$ و یا $P << m_0c$ در نتیجه در این حد می توانیم بنویسیم:

$$E = m_0c^2\Big[1 + (\frac{P}{m_0c})^2\Big]^{\frac{1}{2}} = m_0c^2\big(1 + \frac{1}{2}\frac{P^2}{m_0^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{P^4}{m_0^4c^4} + \cdots\big) = m_0c^2 + \frac{P^2}{2m_0} - \frac{P^4}{8m_0^3c^2} + \cdots \qquad (۹۷)$$

که نشان می دهد جمله اول همان انرژی سکون ذره و جمله دوم انرژی جنبشی در تقریب نیوتنی است. جملات بعدی هم تصحیحات انرژی نسبیتی هستند. در درون اتم ها الکترون ها با سرعت هایی حدود یک صدم سرعت نور حرکت می کنند، به همین دلیل اثر این تصحیحات در محاسبه طیف انرژی اتم ها و در نتیجه طیف تابشی آنها قابل مشاهده و اندازه گیری است.

۸ معادله حرکت در نسبیت

تا کنون دیده ایم که قوانین بقای انرژی و تکانه تا چه حد می توانند در حل گستره وسیعی از مسایل دینامیکی از جذب و گسیل تابش گرفته تا برخوردهای الاستیک و غیرالاستیک و سرانجام پراکندگی ذرات و نور، به ما کمک کنند. اما همه مسایل دینامیک را نمی توان تنها با این قوانین بقا حل کرد. به عنوان مثال می خواهیم بدانیم یک ذره تحت یک نیروی معین (الکتریکی یا مغناطیسی) چگونه منحرف می شود. بنابراین لازم است که مفهوم نیرو را در نسبیت نیز وارد کنیم و بفهمیم که تحت تبدیلات لورنتز چگونه تبدیل می شود. می خواهیم بدانیم که معادله نیوتن یعنی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ جای خود را به چگونه قانونی می دهد؟ از همین ابتدا معلوم است که این رابطه، نمی تواند به همین شکل در نسبیت باقی بماند، چرا که شتاب یک کمیت ناوردا نیست، یا حتی قسمتی از یک چهاربردار نیست و اتفاقا تحت تبدیلات لورنتز به شکل پیچیده ای تبدیل می شود. برای این که بفهمیم این رابطه را چگونه می بایست در نسبیت بفهمیم و اصولا چگونه باید نیرو را تعریف کنیم، بازهم از این نقطه شروع می کنیم که

- یک- قوانین جدید مکانیک می بایست با حداقل تعمیم های منطقی از قوانین نیوتن بدست بیایند و در حد سرعت های کم می بایست به همان قوانین بازگردند و
- دو- این قوانین می بایست در همه دستگاه های لخت یک شکل داشته باشند تا اصل اساسی نسبیت یعنی عدم ترجیح دستگاه های لخت بر یک دیگر برقرار باقی بماند.

این اصل دوم راهنمای ما برای شیوه نوشتن قوانین و معادلات جدید در هر حوزه ای است. بنابراین نخست به این اصل راهنما توجه می کنیم.

۱.۸ یک اصل راهنمای کلی: یک قانون فیزیکی با چه معادله ای باید توصیف شود؟

تا کنون یاد گرفته ایم که تحت تبدیلات لورنتز مختصات x^μ و هم چنین تکانه P^μ مثل مولفه های یک بردار تبدیل می شوند. یعنی

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu \; P^\mu = \Lambda^\mu_\nu P'^\nu.$$

هم چنین می دانیم که چه نوع کمیت های اسکالر یا ناوردا هستند یعنی تحت تبدیلات لورنتز تغییر نمی کنند. مثلا کمیت هایی مثل $x^\mu x_\mu,\; P^\mu P_\mu$ و یا $x^m P_\mu$ یا $dx^m P_\mu$ همگی ناوردا یا به اصطلاح اسکالر هستند. می توانیم کمیت هایی نیز در نظر آوریم که با تبدیلات پیچیده تری تبدیل

شوند. کمیت هایی مثل $x^\mu x^\nu$ یا $x^\mu P^\nu$، یا $X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu$. چنین کمیت هایی به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$A^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta A'^{\alpha\beta}. \qquad (۹۸)$$

چنین کمیتی را یک تانسور رتبه دو می خوانیم. طبیعی است که می توانیم تانسورهای با رتبه های بالاتر را نیز تعریف کنیم. می توانیم تانسورهایی را رتبه های مخلوط نیز تعریف کنیم. مثل تانسورهای زیر:

$$B_{\mu\nu} := X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu, \qquad A^{\mu,\nu}_\alpha = X^\mu X^\nu P_\alpha, \qquad \cdots. \qquad (۹۹)$$

حال به یک نکته مهم می رسیم و آن این که قانون فیزیکی با چه معادله ای باید نوشته شود؟ پاسخ اش این است که اگر می خواهیم بنابر اصل نسبیت، این قانون و در نتیجه معادله توصیف کننده آن شکل خود را در همه دستگاه های مختصات حفظ کند، این معادله می بایست به صورت تساوی دو تانسور از یک نوع نوشته شود. تنها در این صورت است که این معادله شکل خود را در دستگاه های لخت مختلف حفظ می کند. فهمیدن این موضوع با یک مثال ساده امکان پذیر است: فرض کنید یک قانون فیزیکی به صورت زیر نوشته شده است:

$$Q^{\mu\nu} = R^{\mu\nu}. \qquad (۱۰۰)$$

در این صورت این کمیت ها در یک چارچوب لخت دیگر به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta Q'^{\alpha\beta} \\ R^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta R'^{\alpha\beta}. \end{aligned} \qquad (۱۰۱)$$

بنابراین از رابطه (۱۰۰) بدست می آوریم:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta Q'^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta R'^{\alpha\beta}. \qquad (۱۰۲)$$

اما ماتریس ها یا تانسوری های Λ معکوس پذیرند، بنابراین می توان رابطه بالا را در معکوس آن ها ضرب کرد و در نتیجه

$$Q'^{\alpha\beta} = R'^{\alpha\beta}. \qquad (۱۰۳)$$

یعنی شکل قانون همان است که در چارچوب لخت اولیه بود.

■ **تمرین:** الف: فرض کنید که یک معادله فیزیک به صورت زیر نوشته شده باشد:

$$A^{\mu\nu} = aX^\mu P^\nu + bK^\mu L^\nu, \qquad (۱۰۴)$$

که در آن a و b دو عدد ثابت هستند. نشان دهید که این معادله در یک چارچوب لخت دیگر هم به همین شکل نوشته می شود.

ب: حال فرض کنید که کسی ادعا کند یک قانون فیزیکی به شکل زیر کشف کرده است:

$$A^{\mu\nu} = aX^{\mu} + bP^{\nu}. \qquad (۱۰۵)$$

در یک چارچوب لخت دیگر شکل این قانون چگونه خواهد بود؟ آیا این قانون می تواند با اصل نسبیت سازگار باشد؟

پس از این اصل راهنما آماده ایم که نیرو را تعریف کنیم.

---

۹ نیرو و تبدیلات آن

می دانیم که معادله حرکت نیوتن به شکل زیر است:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \qquad (۱۰۶)$$

اما اشکال این معادله این است که $\mathbf{P}$ یک چهار بردار نیست. هم چنین زمان هم در دستگاه های مختصات مختلف فرق می کند. برای این که به یک معادله صحیح برسیم، توجه می کنیم که $\mathbf{P}$ بخشی از یک چهاربردار انرژی-تکانه $P^{\mu} = (E, \mathbf{P})$ است، هم چنین بجای زمان t می بایست نسبت به یک زمان ناوردا یعنی زمان ویژه یا τ مشتق بگیریم. بنابراین با توجه به آنچه که بخش قبلی یادگرفتیم، معادله حرکت نیوتن را به شکل زیر تعمیم می دهیم:

$$F^{\mu} = \frac{dP^{\mu}}{d\tau}. \qquad (۱۰۷)$$

به این ترتیب نیروی F^{μ} نیز یک چهاربردار

$$F^{\mu} = (F^{0}, \mathbf{F}) \qquad (۱۰۸)$$

خواهد بود که سه مولفه آخر آن تعمیم همان نیرویی شناخته شده است و می بایست تعبیر مولفه اول را پیدا کنیم. این معادله ساده ترین تعمیم از معادله نیوتن است. مولفه های مختلف این معادله عبارت اند از:

$$F^{0} = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} = c\frac{dm}{d\tau} \qquad (۱۰۹)$$

و

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau}. \qquad (۱۱۰)$$

بنابراین مولفه اول نرخ افزایش انرژی ذره را یا به عبارت دیگر نرخ افزایش جرم ذره را به دست می دهد. به این ترتیب چهاربردار نیرو برابر است با:

$$F^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau}, \frac{dP_x}{d\tau}, \frac{dP_y}{d\tau}, \frac{dP_z}{d\tau}\right). \qquad (۱۱۱)$$

چهاربردار نیرو در دستگاه های لخت به صورت زیر تبدیل می شود.

$$F^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu F'^\nu \qquad (۱۱۲)$$

دقت کنیم که F^μ نرخ تغییر تکانه P^μ را بر حسب زمان ویژه بدست می دهد، یعنی زمانی که توسط دستگاه همراه ذره ثبت می شود. اما معمولا آزمایشگر به زمان ویژه ذره کاری ندارد و همه چیز را از روی زمان ثبت شده روی ساعت آزمایشگاه خود می خواند. به همین جهت بهتر است که یک نیروی دیگر نیز به شکل زیر تعریف کنیم که نسبت تغییرات تکانه به تغییر زمان در آزمایشگاه است. این نیرو البته یک چهاربردار نسبیتی نیست و تبدیلات لورنتزی آن مثل نیروی F^μ ساده نیست ولی به لحاظ آزمایشگاهی و عملی توجه به آن بسیار اهمیت دارد. این نیرو چنین است:

$$f^\mu := \frac{dP^\mu}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\gamma_u}F^\mu, \qquad (۱۱۳)$$

که در آن $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ و u سرعت لحظه ای ذره است. این کمیت که بازهم تاکید می کنیم چهاربردار نیست به صورت زیر است:

$$f^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \frac{dP_x}{dt}, \frac{dP_y}{dt}, \frac{dP_z}{dt}\right). \qquad (۱۱۴)$$

بنابراین، این کمیت همان تغییرات انرژی و تکانه را ولی نسبت به زمان آزمایشگاه مشخص می کند و چون زمان آزمایشگاه یک کمیت ناوردا نیست، این کمیت نیز یک چهاربردار نیست. در اینجا برای γ اندیس u به کار برده ایم که نشان دهیم برابر است با

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

یعنی این γ_u مربوط به سرعت ذره است. این تفکیک از آنجا لازم است که در آینده وقتی می خواهیم عبارت f^μ را برای دستگاه های مختلف بنویسیم در نوشتن γ های مختلف دقت کنیم. حال سوال این است که تبدیل f^μ ها چگونه است. برای این کار می نویسیم:

$$f^\mu = \frac{1}{\gamma_u}F^\mu = \frac{1}{\gamma_u}\Lambda^\mu{}_\nu F'^\nu \qquad (۱۱۵)$$

اما می بایست طرف راست را بر حسب f'^{ν} بنویسیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$f^{\mu} = \frac{1}{\gamma_u}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma_{u'}f'^{\nu}. \qquad (۱۱۶)$$

حال از رابطه زیر که قبلا آن را ثابت کرده بودیم استفاده می کنیم:

$$\gamma_u = \gamma\gamma_{u'}(1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) \qquad (۱۱۷)$$

و بدست می آوریم:

$$f^{\mu} = \frac{1}{\gamma_u}\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma_{u'}f'^{\nu} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}\Lambda^{\mu}_{\nu}f'^{\nu} \qquad (۱۱۸)$$

در این رابطه v سرعت دستگاه S' نسبت به دستگاه S، و u و u' به ترتیب سرعت ذره در دستگاه S و S' است. برای آنکه رابطه های مشخصی بدست بیاوریم، سرعت دستگاه S' را در راستای محور x می گیریم . در این صورت تبدیل لورنتز شکل ساده ای دارد که قبلا با آن آشنا شده ایم. در این صورت رابطه (۱۱۸) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}(f'_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f'}_{\parallel}) \\ \mathbf{f}_{\parallel} &= \frac{1}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}(\mathbf{f'}_{\parallel} + \mathbf{v}f'_0) \\ \mathbf{f}_{\perp} &= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}\mathbf{f'}_{\perp}. \end{aligned} \qquad (۱۱۹)$$

در این روابط سرعت نور را برابر با $c = 1$ گرفته ایم. مثل همیشه می توانیم با توجه به ابعاد کمیت های مختلف پارامتر c را به طرز مناسبی در طرفین این رابطه قرار دهیم تا تبدیلات صحیح در دستگاه واحدهای متریک بدست آید. با توجه به این که همه مولفه های یک چهاربردار می بایست یک بعد یا دیمانسیون داشته باشند،بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}}(f'_0 + \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{f'}_{\parallel}) \\ \mathbf{f}_{\parallel} &= \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}}(\mathbf{f'}_{\parallel} + \frac{\mathbf{v}}{c}f'_0) \\ \mathbf{f}_{\perp} &= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2}}\mathbf{f'}_{\perp}. \end{aligned} \qquad (۱۲۰)$$

این بخش را با رابطه بین مولفه های نیروها در چارچوب همراه و چارچوب آزمایشگاه به پایان می بریم. کمیت های مربوط به این چارچوب را با شاخصِ $\tilde{o}$ نشان می دهیم. در چارچوب همراه می دانیم که سرعت لحظه ای ذره یعنی $\tilde{u}$ برابر با صفر و در نتیجه $\gamma_{\tilde{u}}$ برابر با یک است. در

این چارچوب داریم:

$$\tilde{P}_0 = m_0\gamma_{\tilde{u}} = m_0 \qquad (۱۲۱)$$

و در نتیجه

$$\tilde{F}_0 = \tilde{f}_0 = 0. \qquad (۱۲۲)$$

حال از روابط تبدیل (۱۱۹) استفاده میکنیم تا تبدیل نیروها را بین چارچوب همراه و چارچوب آزمایشگاه به دست آوریم:

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathbf{v}\cdot\tilde{\mathbf{f}}_{\parallel} \\ \mathbf{f}_{\parallel} &= \tilde{\mathbf{f}}_{\parallel} \\ \mathbf{f}_{\perp} &= \frac{1}{\gamma}\tilde{\mathbf{f}}_{\perp}. \end{aligned} \qquad (۱۲۳)$$

اولین معادله، همانطور که انتظار داریم، بیان می کند که مولفه نیروی موازی با سرعت در چارچوب همراه،باعث تغییرات انرژی در چارچوب آزمایشگاه می شود. معادله دوم بیان می کند که مولفه موازی با سرعت تغییر نمی کند اما مولفه عمود بر سرعت با ضریب $\frac{1}{\gamma}$ کوچک می شود.

---

۱۰ نیرو و شتاب

در مکانیک نیوتنی نیرو متناسب با شتاب است. به همین دلیل با در دست داشتن نیرو براحتی شتاب را از رابطه $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ بدست می آوریم. از خود سوال می کنیم که در مکانیک نسبیتی اگر نیرو را داشته باشیم چگونه شتاب ذره را می بایست بدست آوریم. بهر حال انتظار ما از یک نظریه مکانیک این است که به کمک آن بتوانیم از نیروهای وارد بر هر ذره ای، شتاب آن و در نتیجه مسیر حرکت آن را مشخص کنیم. برای پاسخ به این سوال اولین نکته ای که به ذهن مان می رسد این است که این سوال در کدام چارچوب لخت پرسیده شده، چرا که فرق اساسی مکانیک نسبیتی و نیوتنی در این است که شتاب دیگر یک کمیت ناوردا نیست و در هر دستگاهی مقدار مخصوصی دارد. نیرو هم همین طور. بنابراین باید قبل از هر چیز چارچوبی را مشخص کنیم که این سوال در آن پرسیده شده است. نخست به سراغ چارچوب همراه با ذره می رویم. در این چارچوب سرعت

ذره برابر با صفر است ولی می تواند شتابی غیر صفر داشته باشد. در این چارچوب داریم:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m_0\tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{v}}) \qquad (۱۲۴)$$

که در آن علامت $\tilde{o}$ برای توصیف همه کمیت ها در چارچوب همراه به کار رفته است. اما از آنجا که در این چارچوب سرعت لحظه ای ذره صفر است، $\tilde{\gamma}$ برابر با یک است و در نتیجه

$$\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{F}} = m_0\frac{d}{d\tau}(\tilde{\mathbf{v}}). \qquad (۱۲۵)$$

و در نتیجه

$$\tilde{\mathbf{f}} = m_0\tilde{\mathbf{a}}. \qquad (۱۲۶)$$

بنابراین در این چارچوب همان رابطه ساده نیوتنی برقرار است یعنی شتاب متناسب با نیروست و با در دست داشتن نیرو، شتاب با یک تناسب ساده $\tilde{\mathbf{a}} = \frac{\tilde{\mathbf{f}}}{m_0}$ بدست می آید.

■ **تمرین:** ثابت کنید که در چارچوب همراه $\tilde{F}^0 = \tilde{f}^0 = 0$.

حال یک چارچوب دلخواه را در نظر می گیریم و همین سوال را می پرسیم، یعنی می پرسیم رابطه نیرو و شتاب چگونه است. برای این کار از همان رابطه $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$ شروع می کنیم. دقت هم می کنیم که در این چارچوب آزمایشگر علاقمند به نرخ تغییرات تکانه بر حسب زمان ویژه یعنی τ نیست، بلکه علاقمند به نرخ این تغییرات بر حسب زمان t است که خود او در چارچوب آزمایشگاه اندازه می گیرد. به همین دلیل است که ما به $\mathbf{f}$ علاقمند هستیم و نه به $\mathbf{F}$. حال می نویسیم:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma\mathbf{v}) = m_0(\frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}) \qquad (۱۲۷)$$

اما با توجه به تعریف $\gamma = (1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{-1/2}$،

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}.$$

با جایگذاری این عبارت در معادله قبلی خواهیم داشت:

$$\mathbf{f} = m_0\gamma(\gamma^2(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}). \qquad (۱۲۸)$$

این رابطه بیان می کند که واقعا نیرو متناسب با شتاب یعنی $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ نیست. اما برای اینکه رابطه صریح تر و ساده تری بدست آوریم، مولفه های موازی و عمود بر سرعت ذره را جداگانه بررسی می کنیم. برای بدست آوردن مولفه موازی با سرعت، رابطه برداری فوق را بر بردار یکه در جهت سرعت تصویر می کنیم. بنابراین می نویسیم:

$$\mathbf{f}_{\parallel} = (\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}})\mathbf{v}. \qquad (۱۲۹)$$

پس از جایگذاری (۱۲۸) در (۱۲۹) و ساده کردن طرف راست به رابطه زیر می رسیم:

$$\mathbf{f}_{\parallel} = \gamma^3 m_0 (\frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}})\mathbf{v} \qquad (۱۳۰)$$

اما عبارتی که در کنار $\gamma^3 m_0$ قرار گرفته، چیزی نیست جز مولفه ی شتاب که با سرعت موازی است. به عبارت دیگر

$$\mathbf{f}_{\parallel} = \gamma^3 m_0 \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt}. \qquad (۱۳۱)$$

و یا

$$\mathbf{f}_{\parallel} = \gamma^3 m_0 \mathbf{a}_{\parallel}. \qquad (۱۳۲)$$

این رابطه بیان می کند که شتاب موازی با سرعت به اندازه ضریب $\frac{1}{\gamma^3}$ کوچک تر از آنی است که در مکانیک نیوتنی انتظار داریم و در حد سرعت های نزدیک به سرعت نور این شتاب عملاً برابر با صفر می شود. دلیل اش هم روشن است چرا که در این سرعت ها واقعا دیگر نباید سرعت اضافه شود، بنابراین شتاب موازی با سرعت می بایست صفر شود. حال به سراغ مولفه عمود بر سرعتِ نیرو یعنی $\mathbf{f}_{\perp}$ می رویم و رابطه آن را با شتاب عمودی بدست می آوریم. برای یافتن این مولفه کافی است که مولفه $\mathbf{f}_{\parallel}$ را از کل نیرو کم کنیم. بنابراین از رابطه های (۱۲۸) و (۱۳۱) می نویسیم

$$\mathbf{f}_{\perp} \quad = \quad \mathbf{f} - \mathbf{f}_{\parallel} = m_0(\frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}) - \gamma^3 m_0 \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} \qquad (۱۳۳)$$

حال از رابطه ی $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}$ استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\mathbf{f}_{\perp} = m_0(\gamma^3(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} + \gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}) - \gamma^3 m_0 \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} \qquad (۱۳۴)$$

اما کمی که فکر کنیم می فهمیم که

$$(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt}v^2 \qquad (۱۳۵)$$

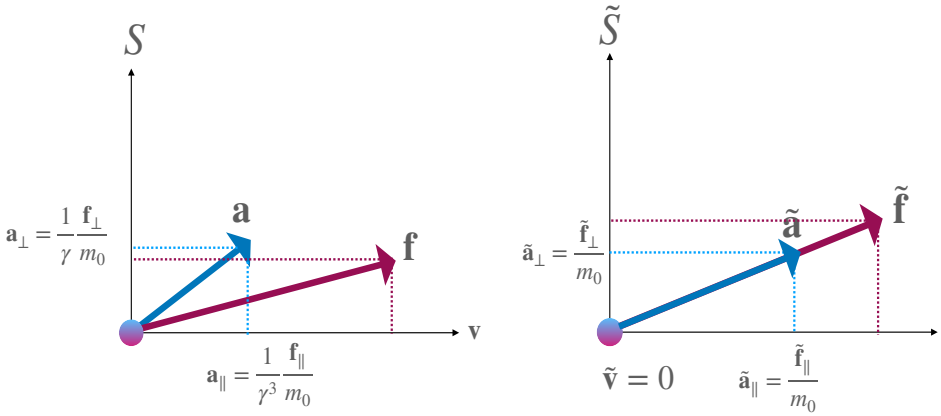
در نتیجه

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_\perp &= m_0\gamma^3\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt}(v^2-1)+m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}\\ &= -m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt}+m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m_0\gamma\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt}.\end{aligned}\qquad(۱۳۶)$$

بنابراین مولفه عمودی شتاب بدست می آید:

$$\mathbf{f}_\perp=\gamma m_0\mathbf{a}_\perp.\qquad(۱۳۷)$$

شکل (۱۶) آنچه را که در این بخش یاد گرفته ایم نشان می دهد.



$$\mathbf{f}_\parallel=\tilde{\mathbf{f}}_\parallel\qquad \mathbf{f}_\perp=\frac{1}{\gamma}\tilde{\mathbf{f}}_\perp$$

$$\mathbf{a}_\parallel=\frac{1}{\gamma^3}\tilde{\mathbf{a}}_\parallel\qquad \mathbf{a}_\perp=\frac{1}{\gamma^2}\tilde{\mathbf{a}}_\perp$$

شکل ۱۶: رابطه نیرو و شتاب در چارچوب همراه و چارچوب آزمایشگاه. نسبت به چارچوب لخت، مولفه افقی نیرو تغییر نمی کند اما مولفه عمودی اش کوچک تر می شود. هم چنین مولفه افقی شتاب با ضریب $\frac{1}{\gamma^3}$ کوچک می شود و حال آنکه مولفه افقی شتاب با ضریب $\frac{1}{\gamma^2}$ کوچک می شود. نتیجه اش این است که در چارچوب آزمایشگاه دیگر شتاب با نیرو همراستا نیست. در حد سرعت های نزدیک به سرعت نور شتاب بر نیرو عمود می شود و دیگر هیچ نیرویی قادر نیست سرعت ذره را افزایش دهد.

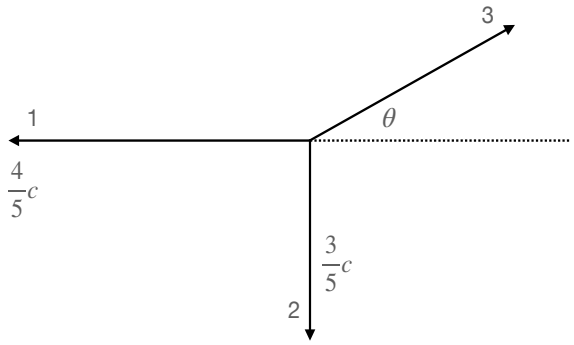
۱۱ مسئله ها:

- **مسئله اول:** ذره ای به جرم سکون m_0 و انرژی جنبشی $2m_0c^2$ به ذره ای ساکن با جرم سکون $2m_0$ برخورد می کند و به آن می چسبد. جرم سکون ذره ای که تولید می شود، یعنی M_0 چقدر است؟ (انرژی جنبشی برابر با تفاضل انرژی کل و انرژی در حال سکون است.)

- **مسئله دوم:** یک ذره به جرم سکون M_0 که در آزمایشگاه ساکن است مطابق شکل به سه ذره یکسان به جرم سکون m_0 واپاشی می کند.

الف: جهت و سرعت ذره سوم را حساب کنید.

ب: نسبت M_0/m_0 را تعیین کنید.



شکل ۱۷: شکل مربوط به مسئله دوم.

- **مسئله سوم :** یک پروتون با انرژی جنبشی $437\ Mev$ به یک پروتون ساکن برخورد می کند و پس از برخورد دو پروتون با انرژی مساوی از هم جدا می شوند. زاویه بین سرعت این دو پروتون را حساب کنید. اگر پروتون تابنده دارای انرژی کل $33\ Gev$ باشد، این زاویه چقدر خواهد بود.

- **مسئله چهارم :** نشان دهید که واکنش های زیر از نظر دینامیکی غیرممکن هستند:

الف: یک پروتون به یک الکترون ساکن برخورد می کند و همه انرژی جنبشی اش را به الکترون می دهد.

ب: یک الکترون و یک پوزیترون به هم برخورد می کنند و تنها یک فوتون تولید می کنند.

پ: یک ذره که تنها به دو فوتون تجزیه می شود.

- **مسئله پنجم :** یک پوزیترون با انرژی جنبشی $0.51\ Mev$ به یک الکترون ثابت برخورد می کند و یک اتم پوزیترونیوم تشکیل می دهد که با سرعتی معین حرکت می کند. سپس این اتم پوزیترونیوم به دو فوتون واپاشیده می شود.

الف: سرعت اتم پوزیترونیوم را حساب کنید.

ب: ماکزیمم انرژی یک فوتون را که در اثر واپاشی تولید می شود تعیین کنید.

- **مسئله ششم :** فرض کنید که یک فوتون با انرژی $h\nu$ با یک الکترون برخورد شاخ به شاخ انجام می دهد. سرعت حرکت الکترون اولیه چه مقدار باشد تا فوتون با همان انرژی اولیه اش در جهت مخالف برگردد؟

- **مسئله هفتم:** الف: یک فوتون با انرژی $h\nu$ به صورت الاستیک به یک الکترون ساکن برخورد می کند. بعد از برخورد انرژی فوتون برابر با $\frac{h\nu}{2}$ است و در جهتی حرکت می کند که با جهت اولیه اش زاویه ۶۰ درجه می سازد. مقدار ν چقدر است؟

ب: یک فوتون با انرژی $h\nu$ با یک اتم که در یک حالت تحریک شده قرار دارد برخورد می کند. بعد از برخورد فوتون هنوز همان انرژی

قبلی را دارد ولی جهت اش به اندازه ۱۸۰ درجه عوض شده است. اگر بعد از برخورد اتم در حالت پایه اش باشد، انرژی حالت تحریکی اتم را پیدا کنید.

- **مسئله هشتم :** فرض کنید که یک شتابگر می تواند به پروتون ها انرژی جنبشی ای معادل $200\ Gev$ بدهد. انرژی سکون یک پروتون برابر است با $0.98\ Gev$. تعیین کنید که بزرگترین جرم در حال سکون ذره X که در واکنش زیر می تواند تولید شود چقدر است؟ در ابتدا یکی از پروتون ها ساکن است.

$$p + p \longrightarrow p + p + X. \qquad (۱۳۸)$$

- **مسئله نهم :** یک ذره با جرم سکون M به صورت الاستیک به ذره ای ساکن و با جرم سکون $m << M$ برخورد می کند. اگر سرعت اولیه M چنان باشد که $\gamma = \frac{M}{m}$، نشان دهید که بزرگترین زاویه ای که با آن ذره M می تواند پراکنده شود تقریبا برابر است با $\frac{m}{M\sqrt{3}}$. هم چنین نشان دهید که بزرگترین زاویه پس زنی برای ذره m ۹۰ درجه است.

- **مسئله دهم:** ذره ای با سرعت ثابت $\frac{c}{3}$ در جهت $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ نسبت به آزمایشگاه در حرکت است. در دستگاه خود ذره نیروی f در جهت محور $\hat{n} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ بر آن وارد می شود. جهت و اندازه این نیرو را در دستگاه آزمایشگاه تعیین کنید. همین کار را برای نیروی F نیز انجام دهید. یادآوری می کنیم که $f^\mu = \frac{dP^\mu}{dt}$ و $F^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}$.

- **مسئله یازدهم:** فوتونی را در نظر بگیرید که با انرژی $200\ Mev$ در راستای محور x حرکت می کند. فوتون دیگری را نیز در نظر بگیرید که با انرژی $100\ Mev$ در راستای محور y حرکت می کند. انرژی کل و تکانه کل این سیستم را حساب کنید. اگر یک ذره بخواهد چنین انرژی و چنین تکانه ای داشته باشد، جرم آن چقدر خواهد بود؟ جهت حرکت آن و سرعت آن چقدر خواهد بود؟

- **مسئله دوازدهم :** در یک ذره ای دارای انرژی $5\ Gev$ و تکانه ی $3\ Gev/c$ است.

الف: انرژی این ذره در ی که تکانه آن $4\ Gev/c$ است، چقدر است؟

ب: جرم سکون این ذره چقدر است؟

پ: سرعت نسبی این دو چقدر است؟

■ **مسئله سیزدهم:** یک موشک فوتونی موشکی است که تنها از تابش به عنوان سوخت استفاده می کند. در زمین، این موشک از سرعت صفر شروع به حرکت می کند و به سرعت نهایی v می رسد. اگر جرم سکون اولیه و نهایی موشک برابر با M_i و M_f باشد، نشان دهید که در دستگاهی که

$$\frac{M_i}{M_f} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \qquad (۱۳۹)$$

■ **مسئله چهاردهم :** یک چشمه نور لیزر که در فضای آزاد قرار دارد جرم سکونی برابر با $10\ Kg$ دارد. اشعه این چشمه لیزر به سوی زمین نشانه رفته است. این چشمه لیزر به طور پیوسته تعداد 10^{20} تا فوتون در هر ثانیه به سوی زمین می تاباند. در خود چشمه لیزر طول موج فوتون ها برابر با $6000\ A^\circ$ است. در زمان $t = 0$ لیزر نسبت به زمین در حال سکون است.

الف: در ابتدا چه مقدار انرژی در هر ثانیه توسط زمین دریافت می شود؟

ب: تابش نور به سوی زمین باعث پس زدن چشمه لیزر به سمت مخالف می شود. حساب کنید پس از آن که ده سال زمان (در چشمه لیزر) گذشت، سرعت لیزر چقدر خواهد بود؟

پ: پس از این زمان یعنی پس از گذشت ده سال (در دستگاه چشمه لیزر) میزان انرژی ای که زمین در هر ثانیه دریافت می کند چقدر است؟

ت: نشان دهید که یک ناظر که روی زمین است چگونه می تواند کاهش انرژی دریافتی را با استفاده از قانون بقای انرژی توضیح دهد؟

■ **مسئله پانزدهم :** یک اتم در یک حالت برانگیخته با انرژی Q_0 است و با سرعت v به طرف یک شمارنده حرکت می کند. وقتی که اتم جذبِ شمارنده می شود، به حالت پایه اش سقوط می کند و به سکون کامل می رسد و یک فوتون باانرژی Q تابش می کند. اگر جرم در حال سکون اتم برابر با m باشد، نشان دهید که

$$Q = Q_0[1 + (Q_0/2mc^2)].$$

■ **مسئله شانزدهم :** یک مزون خنثی π° با جرم سکون $135\ Mev$ با انرژی جنبشی $1\ Gev$ به دو فوتون γ واپاشیده می شود.
الف: اگر فوتون ها در همان امتداد حرکت مزون حرکت کنند، انرژی آنها چقدر خواهد بود؟

ب: اگر نسبت به امتداد اولیه با زاویه های مساوی θ حرکت کنند، این زاویه چقدر خواهد بود؟

■ **مسئله هفدهم:** یک فوتون پر انرژی به یک پروتون ساکن برخورد می کند. در اثر برخورد پروتون در زاویه $\phi = 30^\circ$ و با انرژی $100\ Mev$ منحرف می شود.

الف: انرژی فوتون اولیه چقدر بوده است؟

ب: فوتون در چه جهتی و با چه انرژی ای پراکنده می شود؟

■ **مسئله هجدهم:** یک فوتون با انرژی $h\nu$ به یک اتم برانگیخته که ساکن است برخورد می کند. بعد از برخورد انرژی فوتون هنوز $h\nu$ است، اما جهت حرکت آن ۱۸۰ درجه فرق کرده است. اگر اتم پس از برخورد در حالت پایه اش باشد، انرژی حالت برانگیخته اتم را در ابتدا پیدا کنید.

■ **مسئله نوزدهم:** یک مزون K به دو مزون π واپاشیده می شود. یکی از مزون های π ساکن باقی می ماند.

الف:انرژی مزون دوم π چقدر است؟

ب: انرژی مزون K چقدر بوده است؟

■ **مسئله بیستم:** یک فوتون γ وقتی به یک الکترون برخورد می کند می تواند یک زوج الکترون پوزیترون مطابق با واکنش زیر خلق کند:

$$\gamma + e^- \longrightarrow e^- + e^+ + e^-. \qquad (۱۴۰)$$

می نیمم انرژی فوتونِ γ چقدر باید باشد تا چنین واکنشی انجام شود؟ یک زوج الکترون ـ پوزیترون

■ **مسئله بیست و یکم:** در دستگاه آزمایشگاه، یک ذره با جرم سکونِ m و سرعت v به صورت الاستیک به یک ذره ساکن با جرم در حال سکون M برخورد می کند. در دستگاه صفرـتکانه (دستگاهی که تکانه کل برابر با صفر است) سرعت ذرات ورودی را در راستای x

بگیرید. این دو ذره در یک زاویه θ نسبت به محور x پراکنده می شوند.

الف: زاویه های پراکندگی ذرات را در آزمایشگاه محاسبه کنید.

ب: نشان دهید که وقتی $v << c$ است، نتایج شما به نتایج غیر نسبیتی میل می کند.

- **مسئله بیست و دوم:** در مکانیک غیرنسبیتی انرژی جنبشی کل یک سیستم یعنی K با انرژی جنبشی آن در دستگاه مرکز جرم یعنی K^* رابطه $K = K^* + \frac{MV^2}{2}$ را دارد که در آن M جرم کل و V سرعت مرکز جرم است.

الف: مشابه نسبیتی این رابطه را پیدا کنید.

ب: نشان دهید که وقتی همه سرعت ها از سرعت نور خیلی کمتر باشند، این رابطه به همان رابطه غیرنسبیِ بالا میل می کند.