حل سوالات امتحان ۱۴۰۱

مسئله اول: تانسور τ^{ab} یک تانسور متقارن است و λ^a یک بردار است. (در هر دو مورد منظور البته مولفه های یک تانسور و یک بردار است.) هرگاه برای همه مولفه ها داشته باشیم:

$$\tau^{ab}\lambda^c + \tau^{bc}\lambda^a + \tau^{ca}\lambda^b = 0 \tag{1}$$

نشان دهید که یا تانسور τ صفر است یا بردار λ.

۱۰ نمره

حل:

Let $a=b=c \rightarrow \tau^{aa}\lambda^a = 0 \quad \forall a.$ ①

let $a=b \rightarrow \tau^{aa}\lambda^c + \tau^{ac}\lambda^a + \tau^{ca}\lambda^a = 0$ Since τ is symmetric

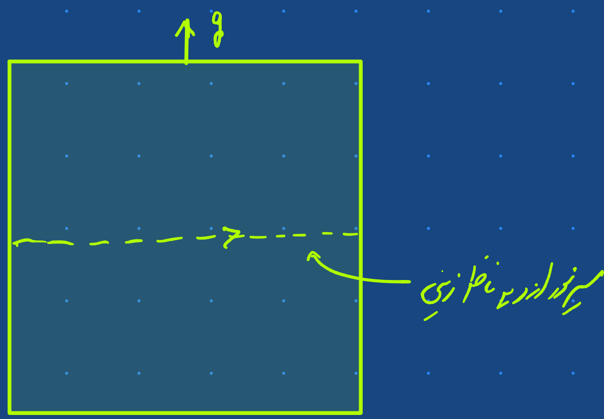
$\rightarrow \tau^{aa}\lambda^c + 2\tau^{ac}\lambda^a = 0 \quad \forall a, c$ ②

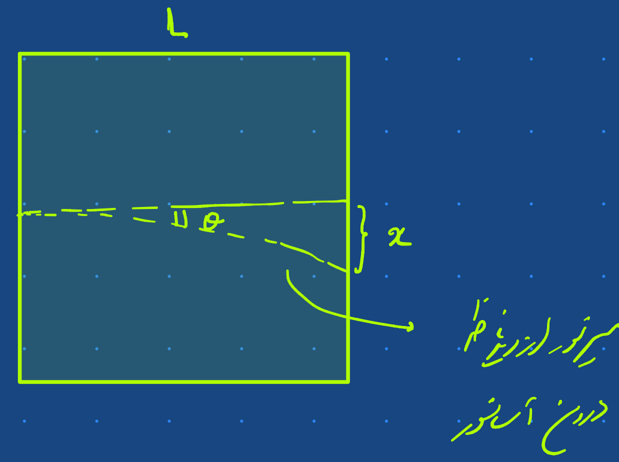
multiply ② by λ^a and use ① $\rightarrow \tau^{ac}\lambda^a\lambda^a = 0 \quad \forall a, c.$ ③

Now look at ① and ③ if a single $\lambda^a \neq 0 \rightarrow \tau^{aa} = 0 \quad \forall a$ and $\tau^{ac} = 0 \quad \forall c$, this means that all $\tau^{ac} = 0 \quad \forall a, c \rightarrow \tau = 0.$ ✓

مسئله دوم: مسیر یک ذره آزاد در یک چارچوب لخت را در نظر بگیرید. مسیر همین ذره را در یک آسانسور که با شتاب ثابت به سوی بالا حرکت می کند مشخص کنید. با استفاده از اصل هم ارزی نشان دهید که نور در میدان گرانش خم می شود. اگر یک شعاع نور مسافت افقی L را روی سطح زمین طی کند، میزان خم شدن آن (نزدیک شدن به سطح زمین را) پس از طی این مسافت پیدا کند.

۵ نمره





$$x = \frac{1}{2} g t^2 \qquad t = \frac{L}{c}$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{1}{2} g \left(\frac{L^2}{c^2}\right).$$

$$\theta \simeq \tan\theta = \frac{x}{L} = \frac{1}{2} g \frac{L}{c^2}.$$

مسئله سوم: فرض کنید که یک قانون فیزیکی در نسبیت خاص با تانسور پادمتقارنی مثل F_{ab} توصیف شود که در معادله زیر صدق کند:

۱۰ نمره

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0. \qquad (۲)$$

ساده ترین تعمیمی که از این معادله می توانید بدست آورید تا در نسبیت عام هم به عنوان یک قانون فیزیکی معتبر شناخته شود چیست؟ نشان دهید که این معادله نیز در نهایت با معادله بالا یکسان می شود. (راهنمایی: به پادمتقارن تانسور توجه کنید.)

برای اینکه این معادله تبدیل به یک معادله معتبر در نسبیت عام شود، یعنی فرم خودش را در همه دستگاه‌ها حفظ کند، می بایست به صورت یک معادله تانسوری نوشته شود. اگرچه F_{ab} تانسور است اما $\partial_c F_{ab}$ تانسور نیست

زیرا مشتق ∂_a مشتق معمولی است. بنابراین، ساده‌ترین تعمیم آن است که این مشتق را با مشتق هموردا تبدیل نماییم، یعنی:

$$\nabla_a F_{bc} + \nabla_b F_{ca} + \nabla_c F_{ab} = 0 \quad \textcircled{1} \rightarrow$$

But $\nabla_a F_{bc} = \partial_a F_{bc} - \Gamma^m_{ab} F_{mc} - \Gamma^m_{ac} F_{bm}$ ②

① & ② $\rightarrow$

$$\partial_a F_{bc} - \cancel{\Gamma^m_{ab} F_{mc}} - \cancel{\Gamma^m_{ac} F_{bm}} + \partial_b F_{ca} - \cancel{\Gamma^m_{bc} F_{ma}} - \cancel{\Gamma^m_{ba} F_{cm}} + \partial_c F_{ab} - \cancel{\Gamma^m_{ca} F_{mb}} - \cancel{\Gamma^m_{cb} F_{am}} = 0$$

where we have used the anti-symmetry of F and the symmetry of Γ. Thus $\rightarrow$ $\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \rightarrow$

که همان معادله‌ی ۴ است.

■ **مسئله چهارم:** اصول زیر را به دقت تعریف کنید:

الف: اصل هموردایی،

ب: اصل هم ارزی.

۵ نمره

الف: اصل هموردایی: تمامی قوانین فیزیک باید تحت تبدیل عمومی مختصات شکل خود را حفظ کنند.

ب: اصل هم ارزی: همواره می‌توان به صورت موضعی در فضا و زمان، مختصاتی انتخاب کرد که در آن مختصات، گرانش نمایان نباشد.

مسئله پنجم: یک ستاره وقتی تبدیل به یک سیاهچاله می شود که آنقدر متراکم شود که شعاع آن کمتر از شعاع شوارتزچیلد آن باشد. با این حساب آیا چگالی یک سیاه چاله می تواند از چگالی آب کمتر باشد؟ پاسخ خود را به صورت مشروح بنویسید.

۱۵ نمره

the Schwartzchild of a star of mass M: $R_s = \frac{2GM}{c^2}$

r = the radius of star.

For a black hole $r \leq R_s$ or $r \leq \frac{2GM}{c^2}$

Since $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \rightarrow r = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$ thus we want

$$\left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \leq \frac{2GM}{c^2} \quad \text{or} \quad \frac{3c^6}{32\, G^3\, M^2} \leq \rho$$

این رابطه نشان میدهد که هر چه جرم ستاره اولیه بزرگتر باشد، چگالی آن وقتی تبدیل به سیاهچاله میشود کمتر است. اگر قرار است

چگالی از چگالی آب کمتر باشد یعنی میخواهیم $\rho \leq \rho_{water} \sim 1000\ kg/m^3$ ←

$$\frac{3c^6}{32\, G^3 M^2} \leq 10^3 \rightarrow \left(\frac{3c^6 \times 10^{-3}}{32\, G^3}\right)^{1/2} \leq M$$

$$\text{or} \quad \frac{3\times(3\times10^8)^6 \times 10^{-3}}{32\times(6.67\times10^{-11})^3} \leq M \quad \text{or} \quad 4.8\times10^{38}\ kg \leq M$$

جرم خورشید حدود 2×10^{30} kg است. بنابراین اگر جرم یک سیاهچاله بیشتر از 250 میلیون برابر جرم خورشید باشد

چگالی آن کمتر از چگالی آب خواهد بود. ابر سیاهچاله‌های مرکز کهکشان‌ها جرمشان همین حدود است.

■ **مسئله ششم:** قسمت فضایی متریک شوارتزچیلد را در نظر بگیرید، یعنی قرار دهید $dt = 0$. صفحه استوایی با قید $\theta = \frac{\pi}{2}$ مشخص می شود. آیا این صفحه تخت است؟ اگر تخت نیست، انحنای آن چقدر است؟ آیا می توانید این انحنا را با یک عدد تعیین کنید؟

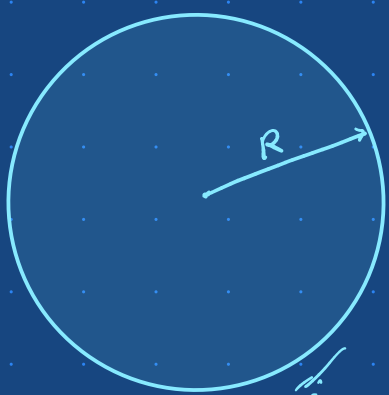
۲۵ نمره

$$ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right) dt - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right).$$

For the equatorial plane at fixed time: $ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$

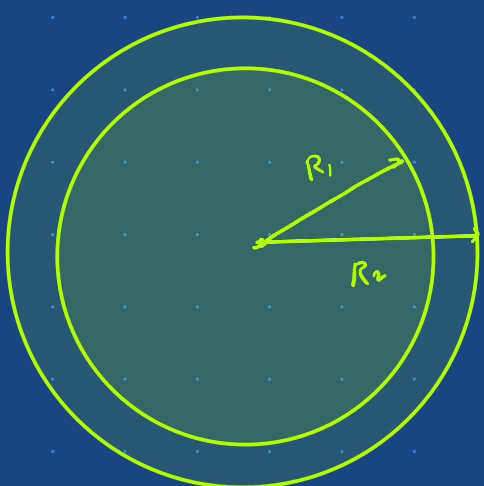
We draw a circle on this plane and calculate its perimeter. : راه حل اول ①

R = Coordinate radius.



$$L = \text{Radius of the sphere} = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} dr$$

برای اینکه این انتگرال را بتوانیم به صورت تقریبی حساب کنیم، بجای محیط یک دایره، تفاوت محیط در دایره (بزرگ) را در نظر میگیریم. یعنی شکل زیر:



$$L = \underset{\text{دو دایره}}{\text{تفاوت شعاع}} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{1/2}}$$

Where we assume that $R_1, R_2 \gg 2m$

$$\rightarrow L \cong \int_{R_1}^{R_2} dr\left(1+\frac{m}{r}\right) = (R_1 - R_2) + m \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$P_1 = \int_0^{2\pi} R_1 \, d\theta = 2\pi R_1$$

از طرفی تناسب محیط دو دایره را هم حساب کنیم.

$$P_2 = \int_0^{2\pi} R_2 \, d\theta = 2\pi R_2 \longrightarrow P_2 - P_1 = 2\pi (R_2 - R_1) \neq 2\pi L$$

این صفحه تخت نیست. ← البته این راه میزان انحنا را به ما نمی‌دهد.

① راه اول که طولانی است: محاسبه تانسور ریمان

we first find $\Gamma^a{}_{rr}$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{-m}{(r-2m)^2} \dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}$$

Euler-Lagrange Equations:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \rightarrow -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \frac{2m}{r^2} \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \ddot{r} = \frac{-m}{(r-2m)^2} \dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \longrightarrow 0 = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} \qquad ②$$

Rewriting ① & ② $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \ddot{r} = \dfrac{m}{r(r-2m)} \dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{cases} \longrightarrow \boxed{\Gamma^r{}_{rr} = \frac{-m}{r(r-2m)} \quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r \quad \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r}}$$

✓ all the other Christoffel symbols $= 0$

we have:

$$R^d{}_{abc} = \partial_b \Gamma^d{}_{ac} - \partial_c \Gamma^d{}_{ab} + \Gamma^e{}_{ac} \Gamma^d{}_{eb} - \Gamma^e{}_{ab} \Gamma^d{}_{ec}$$

the Riemann Tensor in 2D has only one Component $R^1{}_{212}$.

$$R^1{}_{212} = \partial_1 \Gamma^1{}_{22} - \partial_2 \Gamma^1{}_{21} + \Gamma^e{}_{22}\Gamma^1{}_{e1} - \Gamma^e{}_{21}\Gamma^1{}_{e2}$$

$$= \partial_1 \Gamma^1{}_{22} - \partial_2 \Gamma^1{}_{21} + \Gamma^1{}_{22}\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{22}\Gamma^1{}_{21} - \Gamma^1{}_{21}\Gamma^1{}_{12} - \Gamma^2{}_{21}\Gamma^1{}_{22}$$

$$= \partial_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} - \cancel{\partial_\theta \Gamma^r{}_{\theta r}} - \Gamma^r{}_{\theta\theta}\Gamma^r{}_{rr} + \cancel{\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}}\,\Gamma^r{}_{\theta r} - \cancel{\Gamma^r{}_{\theta r}}\,\Gamma^r{}_{r\theta} - \Gamma^\theta{}_{\theta r}\,\cancel{\Gamma^r{}_{\theta\theta}}$$

Since

$$\Gamma^r{}_{rr} = \frac{-m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma^\theta{}_{\theta r} = \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r$$

$$= \partial_r(-r) - (-r)\left(-\frac{m}{r(r-2m)}\right)$$

$$= -1 - \frac{m}{r(r-2m)}$$

$$= -\frac{r^2 - 2mr + m}{r(r-2m)}$$

$$\rightarrow R^1{}_{212} = -\frac{r^2 - 2mr + m}{r(r-2m)}$$

Since $R^1{}_{212}$ is non-zero, → this plane is curved. Moreover:
