

# مقدمه ای بر پدیده های بحرانی

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۵ مهر ۱۴۰۲

---

## ۱ مقدمه

تا نزدیکی های پایان قرن نوزدهم معلوم شده بود که ترمودینامیک و ساختار اصل موضوعی آن برای توصیف همه فرایندهای ماکروسکوپی مربوط به کار و گرما تواناست. این توانایی ترمودینامیک را به عنوان یک چارچوب کامل و منطقی تثبیت کرده بود. تنها یک نکته به ظاهر کوچک باقی مانده بود و همان نکته کوچک ساختار ترمودینامیک را می توانست از هم بپاشد. نکته این بود که بنابر اصول و قضایای ترمودینامیک، بسیاری از توابع پاسخ مثل ظرفیت گرمایی، تراکم پذیری، نفوذپذیری مغناطیسی و نظایر آن می بایست در نقطه بحرانی واگرا می شدند که البته از نظر تجربی هم چنین اتفاقی می افتاد، اما نحوه واگرایی این توابع پاسخ با آنچه که از ترمودینامیک نتیجه می شد متفاوت بود. علاوه بر آن این واگرایی ها از یک نوع عمومیت و استقلال از نوع پدیده و نوع سیستم ترمودینامیکی برخوردار بودند که به نظر می رسید برخاسته از یک اصل بنیادی است که توسط ترمودینامیک کلاسیک قابل توضیح نیست. این وضعیت تا سال های ۱۹۶۰-۱۹۷۰ ادامه داشت و تنها در این زمان بود که با ابداع نظریه بازهنجاش<sup>۱</sup> گام مهمی در راستای فهم این نکته و کامل کردن ترمودینامیک و البته نظریه مکانیک آماری که مبنای میکروسکوپی آن است برداشته شد. قبل از آنکه پیش تر برویم بهتر است در باره نقطه بحرانی بیشتر بیاموزیم تا بینیم دقیقاً با چه پدیده ای سروکار داریم.

---

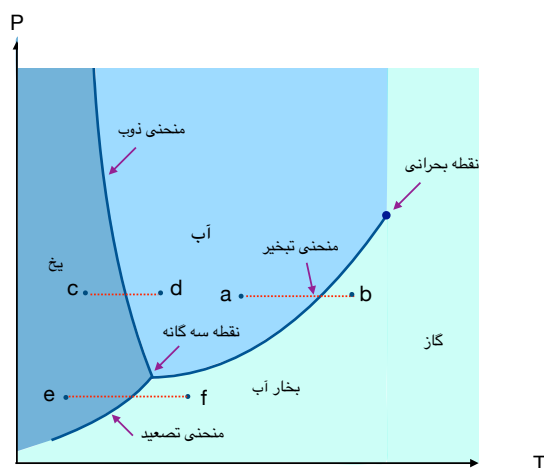
<sup>۱</sup>Renormalization

## ۲ ترمودینامیک در نزدیکی نقطه بحرانی

در درس گذشته به موضوع گذار فاز اشاره کردیم. حال برای مطالعه بیشتر دو مثال مشخص را در نظر می‌گیریم. این دو مثال نقطه بحرانی آب و نقطه بحرانی مغناطش هستند. علاوه بر این دو مثال، مثالهای دیگری از گذار فاز را نیز به صورت مختصر شرح خواهیم داد. اما تأکید ما بر این دو مثال خواهد بود، زیرا همه مفاهیم کلیدی را با این دو مثال می‌توانیم بیان کنیم.

### ۱.۲ نقطه بحرانی آب

برای آب این نقطه در سیمای فاز آن در شکل (۴) نشان داده شده است. برای مغناطیس نیز این نقطه در شکل (۵) مشخص شده. در هر دو مورد نیز ناحیه‌ای که نزدیک این نقطه است، ناحیه بحرانی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود. شکل (۱) برشی از سیمای فاز را در صفحه  $P-T$  نشان می‌دهد. در این

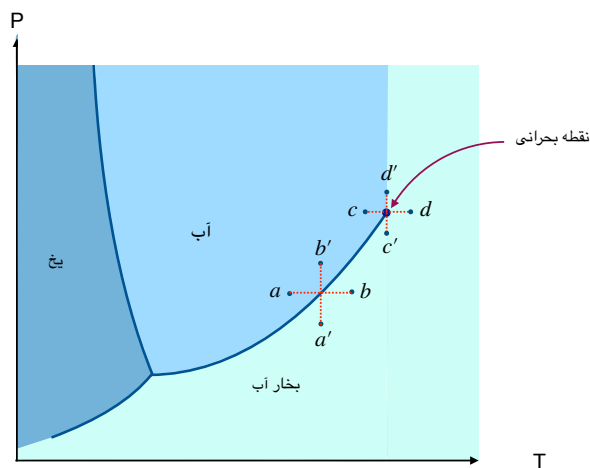


شکل ۱: یک برش از سیمای فاز آب در صفحه  $P-T$ . گذار فازهای  $a \leftrightarrow b$ ,  $c \leftrightarrow d$ ,  $e \leftrightarrow f$  گذار فازهای ناپیوسته هستند. خصوصیتی که ماده در دو طرف این گذار فاز دارد به کلی با هم تفاوت دارند. اصطلاحاً این نوع گذارها را گذار فاز مرتبه یک یا نوع یک می‌نامیم.

شکل سه نوع گذار فاز بین فازهای آب دیده می‌شود. از این سه نوع گذار فاز ذکر شده به گذار فاز بخار-مایع توجه می‌کنیم که در انتهای منحنی همزیستی آن نقطه بحرانی قرار گرفته است. این گذار فاز یک گذار فاز ناپیوسته است، زیرا با تغییر کوچکی در فشار یا دما خصوصیات ماده یعنی

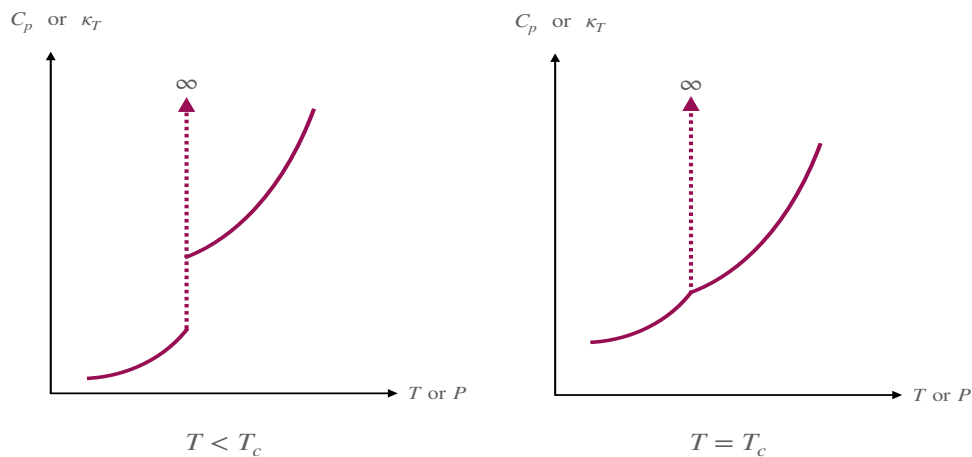
<sup>۲</sup>Critical Region

توابع پاسخ آن از قبیل تراکم پذیری، ضریب انبساط یا ظرفیت گرمایی به طور ناگهانی تغییر می کند. این تغییرات ناگهانی به صورت شهودی نیز واضح است. همه ما در تجربیات روزانه مان می دانیم که گاز بسیار تراکم پذیر است و مایع نیست. شکل (۳) تغییرات ظرفیت گرمایی در فشار ثابت و تراکم پذیری را در این طرف و آن طرف منحنی همزیستی نشان می دهد. به تدریج که در طول منحنی همزیستی به طرف نقطه بحرانی پیش می رویم، تفاوت این توابع پاسخ در دو طرف خط همزیستی کم تر می شود. اما واگرایی این توابع پاسخ در نقطه بحرانی باقی می ماند.



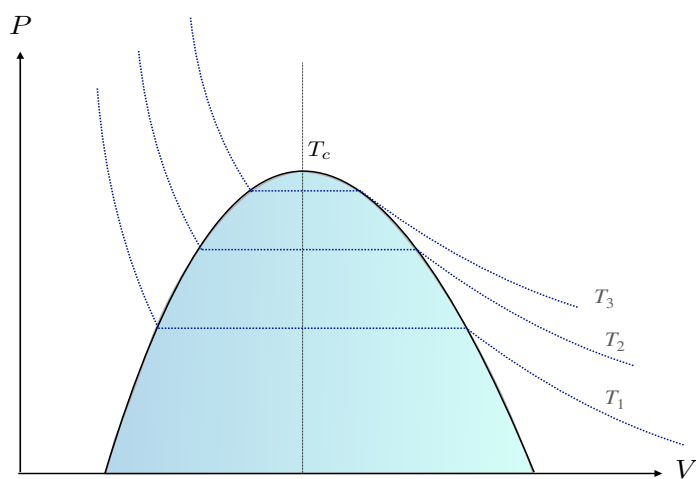
شکل ۲: در خارج از نقطه بحرانی وقتی که با تغییر فشار یا تغییر دما از یک فاز به یک فاز دیگر می رویم، توابع پاسخ به صورت ناپیوسته تغییر می کنند. به همین دلیل این نوع گذار فازها، گذار فاز ناپیوسته یا گذار فاز مرتبه اول خوانده می شوند. وقتی که به نقطه بحرانی نزدیک می شویم، تفاوت این توابع پاسخ در دو طرف خط همزیستی کم تر می شود و در نقطه بحرانی این تفاوت از بین می رود، به همین دلیل این نوع گذار فاز، گذار فاز پیوسته یا مرتبه دوم خوانده می شود، ولی همانطور که در شکل (۳) نشان داده شده واگرایی تابع پاسخ در نقطه بحرانی باقی می ماند.

در خارج از نقطه بحرانی می توانیم بفهمیم چرا توابع پاسخی مثل تراکم پذیری یا ظرفیت گرمایی بی نهایت هستند. برای فهم این نکته می توانیم به شکل (۴) توجه کنیم. در این شکل و در ناحیه همزیستی یک خط همدمما را در نظر بگیرید. روی این خط کاهش حجم باعث تغییر فشار نمی شود. بنابراین در این ناحیه تراکم پذیری که با رابطه  $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$  تعریف می شود، واگراست. هم چنین روی این خط همدمما، دادن گرما به آب باعث تغییر دمای آن نمی شود، بلکه فقط باعث تغییر نسبت بخار به آب می شود. در نتیجه در این ناحیه ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت که با رابطه  $C_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P = \left( \frac{T \partial S}{\partial T} \right)_P$  تعریف می شود، نیز واگرا می شود. این وضعیت در تمام خطوط همدمما و در درون ناحیه همزیستی تا به آخر برقرار است. بنابراین وقتی به نقطه بحرانی نزدیک می شویم، تفاوت بین توابع پاسخ در دو طرف منحنی هم ارزی کوچک می



شکل ۳: ناپیوستگی در توابع پاسخ بین دو فاز بخار و آب. درست در روی منحنی همزیستی، توابع پاسخ واگرا هستند.

شود ولی واگرایی درست در نقطه بحرانی باقی می ماند. این چیزی است که تجربه نیز آن را تایید می کند. تمامی این ها را که از ترمودینامیک می توانیم توصیف کنیم. پس مشکل کجاست؟ چه ایرادی بر ترمودینامیک کلاسیک وارد است؟ مشکل



شکل ۴: یک برش از سیمای فاز آب در صفحه  $P - V$ .

این است که اولاً وقتی به نقطه بحرانی نزدیک می شویم با همین استدلال گفته شده دیگر دلیلی برای واگرایی وجود ندارد، ثانیاً نحوه واگرایی این

توابع پاسخ به صورت کمی و دقیق، آن چیزی نیست که ترمودینامیک پیش بینی می کند و با آن تفاوت دارد. به عنوان مثال از ترمودینامیک می توانیم نتیجه بگیریم که با نزدیک شدن به نقطه بحرانی ظرفیت گرمایی ویژه به صورت

$$C_p \sim (T - T_c)^{-\alpha}$$

واگرا می شود یا تراکم پذیری به صورت

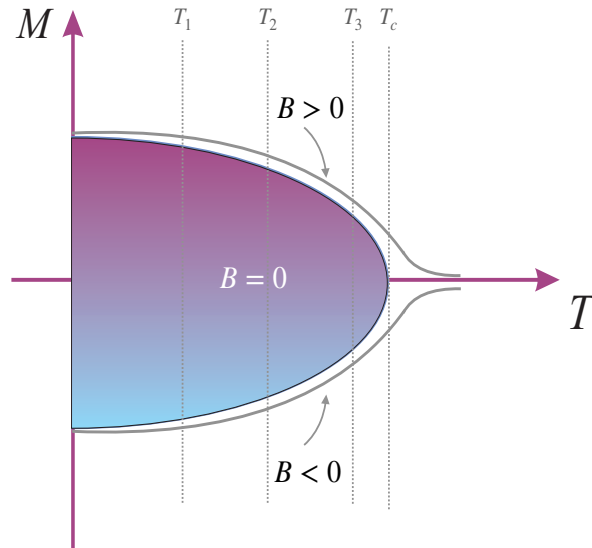
$$\kappa_T \sim (T - T_c)^{-\gamma}$$

به سمت بی نهایت میل می کند. می توانیم این نماهای  $\alpha$  و  $\gamma$  را از ترمودینامیک و نظریه لاندائو محاسبه کنیم، ولی مقداری که برای این نماها حساب می کنیم، با آنچه که در آزمایش می بینیم متفاوت است. تاریخ تکامل فیزیک نیز نشان داده که همواره می بایست تفاوت بین نظریه و تجربه را خیلی جدی گرفت چرا که این تفاوت ها دریچه هایی هستند به سوی قوانین ناشناخته و دنیاهای جدید فیزیک.

## ۲.۲ نقطه بحرانی مغناطیس

برای آن که یک نمونه مشخص دیگر از این پدیده را دیده باشیم، به گذار فاز مغناطیسی توجه می کنیم. شکل (۵) منحنی مغناطش بر حسب دما را در میدان های مغناطیسی متفاوت نشان می دهد. وقتی که میدان مغناطیسی غیر صفر است، با کاهش دما مغناطش موجود در بعضی مواد مثل (کبالت، نیکل و آهن) که هسته های آنها گشتاور مغناطیسی دائمی دارند، به تدریج زیاد می شود. این افزایش ناشی از هم جهت شدن این گشتاورهای مغناطیسی با میدان مغناطیسی خارجی است. در دمای صفر مغناطش کل به حداکثر مقدار خود می رسد. مغناطش پدید آمده هم طبیعتاً در راستای میدان مغناطیسی خارجی است. اما وقتی که میدان مغناطیسی خارجی وجود نداشته باشد، اتفاق خیلی جالبی می افتد و آن اینکه مغناطش تنها پس از این که دما از یک مقدار بحرانی  $T_c$  پایین می آید، ناگهان شروع به پدید آمدن آنهم در یک جهت تصادفی می کند. این اتفاق ناشی از همبستگی گشتاورهای مغناطیسی هسته های مجاور است که سعی می کنند با یکدیگر همراستا شوند. در نزدیکی نقطه بحرانی این همبستگی ها هر چه بیشتر بلند بر د<sup>۳</sup> می شوند و باعث می شوند که گشتاور مغناطیسی مناطق وسیعی از ماده (شامل صدها هزار یا میلیون ها اتم) همگی در یک راستا قرار گیرند، بدون این که از میدان مغناطیسی خارجی تبعیت کرده باشند. به همین دلیل است که مغناطش پدید آمده را مغناطش خود بخود<sup>۴</sup> می نامیم. از این به بعد حالتی را در نظر می گیریم که مغناطش تنها در دو جهت بالا یا پایین (موازی با محور سوم مختصات) ایجاد می شود. در بعضی از جامدات بسته به ساختار کریستالی آنها همسانگری وجود ندارد و چنین چیزی امکان پذیر هست. شکل (۵) ناحیه رنگی ای را نشان می دهد که در آن مغناطش در جهت بالا و پایین همزیستی دارند. این ناحیه درست مثل ناحیه همزیستی آب و بخار در شکل (۴) است. در این جا

<sup>۳</sup> Long-Range  
<sup>۴</sup> Spontaneous Magnetization



شکل ۵: مغناطش بر حسب دما در میدان های مغناطیسی متفاوت. نقطه بحرانی برای مغناطش و ناحیه بحرانی نیز نشان داده شده اند. خارج از ناحیه بحرانی گذارهای ناپیوسته ما را از یک سیستم بی نظم یا فازی که در آن مغناطش منفی است به فازی که در آن مغناطش مثبت است می برد. تغییرات توابع پاسخ در این نوع گذار فازها ناپیوسته است. اما یک نوع گذار فاز پیوسته هم هست که با عبور از نقطه بحرانی حاصل می شود. در این نوع گذار فاز توابع پاسخ به صورت پیوسته تغییر می کنند (اگرچه مشتق آنها ناپیوسته است) و درست روی نقطه بحرانی نیز این توابع پاسخ واگرا می شوند. عین همین اتفاق ها در گذار فاز مایع-بخار رخ می دهد.

نیز وقتی به نقطه بحرانی نزدیک می شویم، بعضی از توابع پاسخ واگرا می شوند. باز هم می توانیم بی نهایت شدن توابع پاسخ را در ناحیه همزیستی بفهمیم. برای این کار توجه خود را به یک خط همدم (یک خط عمودی در شکل (۵)) معطوف می کنیم. روی این خط از پایین به بالا حرکت می کنیم. میدان مغناطیسی همچنان صفر است و تغییری نکرده است اما در ناحیه همزیستی مغناطش تغییر می کند. بنابراین نفوذپذیری مغناطیسی

که با رابطه  $\chi_T = \frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial B} \right)_T$  تعریف می شود واگراست و واگرایی آن به شکل زیر است:

$$\chi_B \sim (T - T_c)^{-\gamma}. \quad (1)$$

هم چنین با حرکت روی یک خط همدم، واضح است که آنتروپی تغییر می کند، زیرا نظم مغناطیسی ماده تغییر می کند، بنابراین ظرفیت گرمایی ویژه در میدان ثابت که با رابطه  $C_B = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_B = \left(\frac{T\partial S}{\partial T}\right)_B$  تعریف می شود، بی نهایت است

$$C_B \sim (T - T_c)^{-\alpha}. \quad (2)$$

و نکته مهم این است که این نماها علیرغم تفاوت بارزی که این پدیده با گذار فاز تبخیر دارد با نماهای بحرانی گذار فاز تبخیر یکسان است. این یک نمود از پدیده ای کلی تر به نام عمومیت<sup>۵</sup>.

### ۳.۲ گذار فاز پادفرومغناطیسی

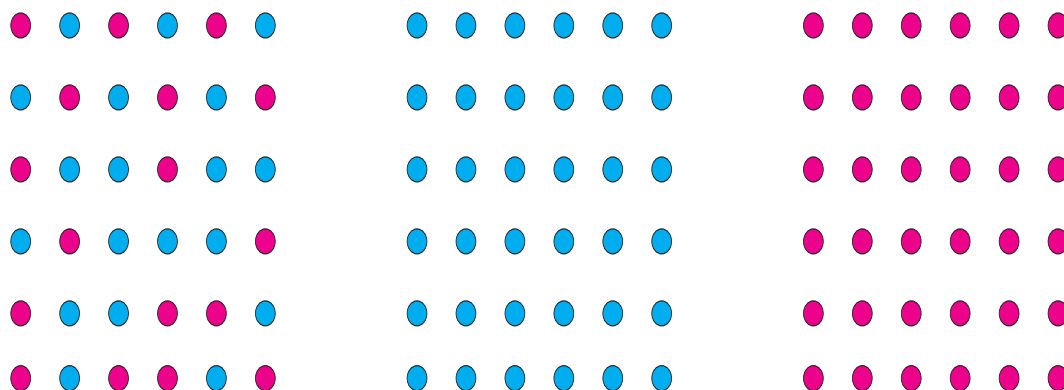
در بعضی از مواد تمایل دوقطبی های مجاور این است که در خلاف جهت هم قرار گیرند. هرگاه شبکه ای که این دوقطبی ها روی آن قرار گرفته اند یک شبکه دوقسمتی<sup>۶</sup> باشد، آنگاه حالت منظم این چنین ماده ای این است که روی یکی از زیرشبکه ها اسپین ها در یک جهت و روی زیرشبکه دیگر اسپین ها در جهت مخالف قرار گرفته باشند. یادآوری می کنیم که یک شبکه دوقسمتی شبکه ای است که از دو زیرشبکه  $A$  و  $B$  تشکیل شده به قسمتی که هر نقطه روی شبکه  $A$  فقط با نقاط شبکه  $B$  همسایه نزدیک است و بالعکس. حالت نامنظم برای این ماده این است که اسپین ها مستقل از این که متعلق به کدام زیر شبکه هستند در جهات مختلف قرار می گیرند. در دماهای بالا سیستم کاملاً بی نظم است ولی وقتی که دما را پایین می آوریم در پایین تر از یک دمای بحرانی، نظم خود بخود پدیدار می شود. برای سادگی بازهم فرض می کنیم که اسپین ها فقط در یک امتداد قرار می گیرند و مقدار آنها را در این امتداد با  $+s$  یا  $-s$  نشان می دهیم. برای چنین سیستمی نمی توان پارامتر نظم را به همان صورت فرومغناطیس ها تعریف کرد. در واقع اگر تعریف کنیم که  $M = \langle \sum_i s_i \rangle$  براحتی معلوم می شود که متوسط  $M$  هم در حالت منظم و هم در حالت بی نظم برابر با 0 است. به این ترتیب این کمیت نمی تواند فاز منظم را از فاز بی نظم تشخیص دهد. اما می توانیم یک کمیت دیگر تشکیل دهیم که به آن مغناطش متناوب<sup>۷</sup> می گوئیم. این کمیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_s := \left\langle \sum_{i \in A} s_i - \sum_{i \in B} s_i \right\rangle. \quad (3)$$

این کمیت در فاز بی نظم برابر با صفر است و در فاز کاملاً منظم بیشینه مقدار خود را پیدا می کند. اگر تعداد نقاط شبکه برابر با  $N$  و اندازه هر اسپین نیز برابر با 1 باشد مقدار بیشینه  $M$  برابر با  $N$  خواهد شد. برای این کمیت می توان هم چنان نماهای  $\beta$  و  $\alpha$  را تعریف کرد ولی نمی توان

---

Universality<sup>۵</sup>  
Bi-Partite<sup>۶</sup>  
Staggered Magnetization<sup>۷</sup>



شکل ۶: فازهای مختلف در یک ماده فرومغناطیس: سمت چپ: فاز بی نظم، وسط فازي که در آن مغناطش مقدار مثبت یک دارد، سمت راست فازي که مغناطش مقدار منفي یک دارد.

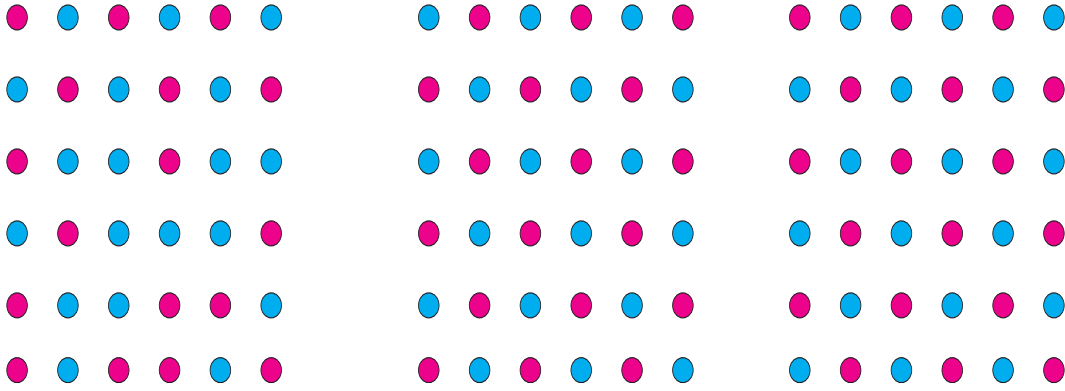
نماهایی مثل  $\delta$  یا  $\gamma$  را برای آن تعریف یا اندازه گیری کرد. دلیل این امر هم این است که نمی توان برای چنین سیستمی یک میدان نظم دهنده مثلا میدان مغناطیسی متناوب تعریف کرد که بتواند اسپین ها را یک در میان به سمت بالا و پایین منظم کند. از آنجا که چنین میدانی وجود ندارد نمی توان به چگونگی تغییر مغناطش متناوب با آن فکر کرد.

## ۴.۲ گذار فاز آلیاژ دوگانه

آلیاژ دوگانه<sup>۸</sup> آلیاژی است که از دو نوع فلز که آن ها را در اینجا  $A$  و  $B$  می نامیم تشکیل شده است. در این جا برای سادگی بحث فرض می کنیم که شبکه ای که این آلیاژ روی آن تشکیل شده است یک شبکه دوقسمتی<sup>۹</sup> است. ساختار چنین شبکه ای به این صورت است که می توان آن را به دو زیر شبکه مجزا که آنها را نوع 1 و نوع 2 می نامیم تقسیم کرد. هر نقطه از زیر شبکه 1 با نقاط زیر شبکه 2 همسایه است و بالعکس. به عنوان مثال شبکه مکعبی یک شبکه دوقسمتی است. در دماهای بالا اتم های  $A$  بین این دو زیر شبکه تقریبا به طور مساوی تقسیم می شوند. اتم های نوع  $B$  نیز به همین نحو تقسیم می شوند. یعنی اگر توجه خود را تنها به یکی از زیر شبکه ها معطوف کنیم به همان اندازه اتم های نوع  $A$  در آن می بینیم که اتم های نوع  $B$ . اما وقتی که دما را پایین می آوریم یک دمای بحرانی فرا می رسد که پایین تر از آن اتم های نوع  $A$  و  $B$  بتدریج شروع به جمع شدن در یکی از این زیر شبکه ها می کنند. این نحوه تجمع نیز کاملا تصادفی است و مثل حالت فرومغناطیس به دو صورت ممکن قابل حصول است. با این توصیف ها براحتی می توان حدس زد که پارامتر نظم را چگونه باید تعریف کرد که مقدار آن نشان دهنده مقدار نظم یا

Binary Alloy<sup>۸</sup>  
Bi-partite<sup>۹</sup>





شکل ۷: فازهای مختلف در یک ماده پادفرومغناطیس. پارامتر نظم در اینجا مغناطش متناوب است. سمت چپ فاز بی نظم را نشان می دهد. وسط فازی که در آن مغناطش متناوب برابر با یک و سمت راست فازی را نشان می دهد که در آن مغناطش متناوب منفی یک است.

بی نظمی موجود در این سیستم باشد. برای این کار تعداد اتم های نوع  $A$  و نوع  $B$  را در یکی از این زیرشبکه ها مثلا زیر شبکه 1 را با  $N_A$  و  $N_B$  نشان می دهیم. در حالت بی نظم داریم

$$N_A - N_B = 0 \quad (۴)$$

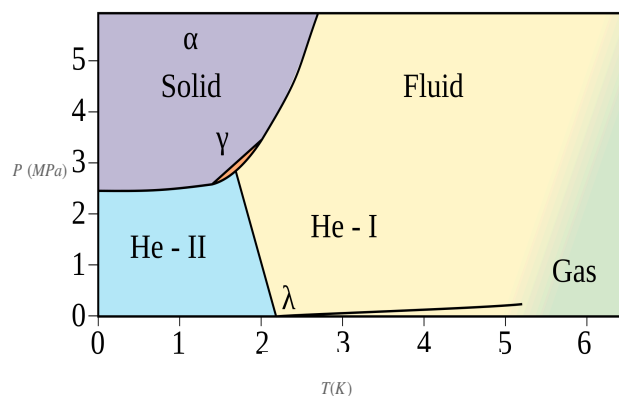
در حالت منظم این تعداد برابر است با

$$N_A - N_B = \pm N \quad (۵)$$

که در آن  $N$  تعداد نقاط زیر شبکه 1 است. می توانیم پارامتر نظم را طوری تعریف کنیم که درست شبیه فرومغناطیس باشد بنابراین قرار می دهیم:

$$m := \frac{N_A - N_B}{N} \quad (۶)$$

که در نتیجه مقدار این پارامتر نظم در فاز بی نظم برابر با صفر و در فاز کاملا منظم مقدار  $\pm 1$  خواهد بود. برای چنین سیستمی نماهای بحرانی درست مثل سیستم فرومغناطیسی تعریف می شوند با این تفاوت که نقش میدان مغناطیسی را در اینجا فشار ایفا می کند.



شکل ۸: دیاگرام فاز در ابرشاره هلیوم

## ۵.۲ گذار فاز هلیوم

در دماهای بالاتر از حدود ۲ درجه کلون هلیوم چهار یک مایع معمولی است که مثل همه مایعات دیگر مقدار معینی ویسکوزیته<sup>۱۰</sup> یا گرانیوی دارد. وقتی که دما به زیر این مقدار می رسد ( که البته مقدار دقیق اش به فشار بستگی دارد) یک فاز دیگر از مایع هلیوم شروع به پیدایش می کند. این فاز دیگر مایعی است که گرانیوی اش صفر است و ابرشاره<sup>۱۱</sup> نامیده می شود. با کاهش بازهم بیشتر دما حجم این مایع نسبت به مایع معمولی افزایش یافته و سرانجام کل مایع ابرشاره می شود. یک ابرشاره بدون هیچ گونه اصطکاک یا گرانیوی جریان می یابد و به هیچ وجه از انرژی جنبشی اش کاسته نمی شود. اگر یک ابرشاره را به هم بزنیم، در آن گردابه هایی پدید می آید که برای مدتی بسیار طولانی (در حالت ایده آل بی نهایت) به چرخش خود ادامه می دهند.

## ۶.۲ گذار فاز ابررسانایی

این گذار فاز نخستین بار توسط فیزیکدان هلندی کامرلینگ اونس<sup>۱۲</sup> و در سال ۱۹۱۱ میلادی کشف شد. وی مشاهده کرد که مقاومت ویژه فلز جیوه وقتی که دما به زیر ۲.۴ کلون می رسد، به ناگهان صفر می شود. اصطلاحاً گفته می شود که یک گذار فاز از فلز به فاز ابررسانا<sup>۱۳</sup> رخ داده است. از آن موقع تا کنون این پدیده در بسیاری دیگر از فلزات نیز مشاهده شده است. یک ابررسانا قادر است یک جریان الکتریکی را بدون نیاز

Viscosity<sup>۱۰</sup>  
 Superfluid<sup>۱۱</sup>  
 Camerlin Onnes<sup>۱۲</sup>  
 Superconducting Phase<sup>۱۳</sup>

به نیروی محرکه الکتریکی برای مدتی بسیار طولانی در خود نگاه دارد. در بعضی موارد دیده شده که میزان کاهش جریان در اثر مقاومت آنقدر ناچیز است که جریان الکتریکی عملاً می تواند به مدت ۱۰۰ هزار سال در یک ابرسانای حلقه ای دوام بیاورد. امروزه فهرست بلندبالایی از مواد مختلف وجود دارد که همگی می توانند در دماهای پایین وارد فاز ابرسانا شوند.

## ۷.۲ پارامتر نظم

در گذار فاز مغناطیسی، مقدار مغناطش کل یا  $M$  کمیتی است که مقدار آن تعیین می کند که آیا ما در فاز بی نظم هستیم یا در فاز منظم. به همین دلیل این کمیت پارامتر نظم<sup>۱۴</sup> خوانده می شود. پارامتر نظم در واقع متوسط یک کمیت افت و خیز کننده است که در یک فاز مقدار متوسط آن صفر و در یک فاز دیگر مقدار آن غیر صفر است. این غیر صفر شدن به معنای این است که سیستم یک نوع نظم پیدا کرده است. در گذار فاز پادفرومغناطیس دیدیم که این پارامتر مطابق با رابطه (۳) و در آلیاژ دوگانه مطابق با رابطه (۶) تعریف می شود. چنانکه خواهیم دید در اغلب گذارهای فاز می توان پارامتر نظم را به راحتی شناسایی کرد. در گذار فاز تبخیر آب، پارامتر نظم را می توان کمیت  $\Delta\rho = \rho_l - \rho_v$  گرفت که تفاضل میان چگالی فاز مایع و فاز بخار است. هم چنین می توان پارامتر نظم را به صورت  $\Delta\nu = \nu_v - \nu_l$  که تفاوت حجم مولی بین فاز بخار و فاز مایع است. جدول (۹) چندین نمونه از گذار فازها و پارامتر نظم وابسته به آنها را نشان می دهد.

## ۳ پایداری حالت ترمودینامیکی و واگرایی توابع پاسخ

چرا در نقطه بحرانی توابع پاسخ واگرا می شوند؟ برای پاسخ می توانیم به شکل (۱۰) نگاه کنیم و به رفتار تابع گیبس توجه کنیم. برای سیستمی که مرکب از مایع و بخار است تابع گیبس به صورت زیر نوشته می شود:

$$G = G(T, P, N_l, N_g), \quad (۷)$$

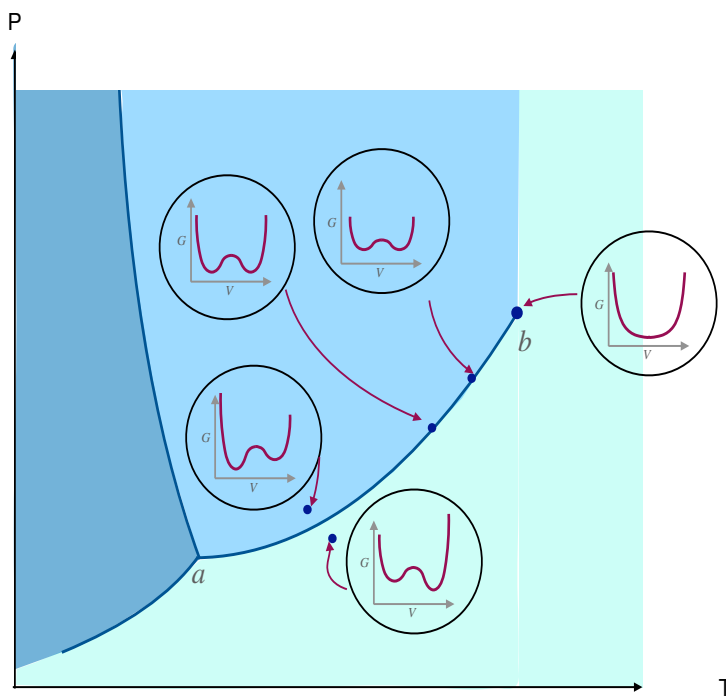
که در آن  $N_l$  و  $N_g$  به ترتیب تعداد مولهای موجود در فاز مایع و فاز بخار هستند. با توجه به اینکه مجموع تعداد مولهای بخار و مایع مقدار ثابتی است، تابع گیبس تنها تابع یکی از این دو ناست. می توان تابع گیبس را بر حسب حجم مولی  $v_l$  یا  $v_g$  یا بهتر از آن بر حسب  $v = v_g - v_l$  هم نوشت. در شکل (۱۰) در چندین دما و فشار در نزدیکی و روی خط همزیستی مایع و بخار شکل تابع گیبس نشان داده شده است. زیر دمای بحرانی تابع گیبس دو می نیمم جداگانه دارد.

<sup>۱۴</sup>Order Parameter

$T_c(K)$	مثال	پارامتر نظم	نقطه بحرانی
647.5	$H_2O$	$\nu_v - \nu_l$	مایع-بخار
1044	$Fe$	$M$	فرومغناطیس
78.26	$FeF_2$	$M_A - M_B$	پادفرومغناطیس
18-21	$^4He$	$\Psi$	ابرشاره
7.19	$Pb$	$\rho_{ee}$	ایرسانا
709	$Cu - Zn$	$N_A - N_B$	آلیاژ دوگانه
322.5	Triglycine - Sulphate	$p$	فرو الکتریک

شکل ۹: چندین نمونه از گذارهای فاز و پارامتر نظم آنها. تعریف دقیق بعضی از این گذار فازها و پارامترهای نظم مربوط به آنها را در درس مکانیک آماری خواهیم دید.

هرگاه از ناحیه همزیستی اندکی به طرف بخار منحرف شویم، می نیمم مربوط به فاز بخار پایین می آید و می نیمم مربوط به فاز مایع بالا می رود و در نتیجه می نیمم مربوط به فاز بخار تبدیل به می نیمم مطلق می شود. در طرف دیگر خط همزیستی نیز عکس این اتفاق می افتد. در هر کدام از این می نیمم ها شرط مقعر بودن تابع گیبس که تضمین کننده پایداری حالت تعادل ترمودینامیکی است برقرار است. این مقعر بودن باعث می شود که افت و خیزهای اطراف نقطه تعادل نتوانند سیستم را از حالت تعادل دور کنند و هر نوع افت و خیزی نهایتاً سیستم را به نقطه تعادل بازگرداند. این همان شرط پایدار بودن نقطه تعادل است. درست روی خط همزیستی چنین تعادلی وجود ندارد و تابع گیبس نیز مقعر نیست. هر چه به طرف نقطه بحرانی پیش می رویم می نیمم ها به هم نزدیک تر شده و عمق آنها نیز کمتر می شود و افت و خیزهای بیشتری بین فاز مایع و فاز بخار صورت می گیرد. سرانجام در نقطه بحرانی یک ناحیه کاملاً تخت ایجاد می شود. این ناحیه تخت باعث می شود که سیستم دیگر نسبت به افت و خیزها حساس نیست و هر نوع افت و خیزی با هر طول موجی در سیستم پدیدار می شود. در این ناحیه تغییر حجم با تغییر فشار همراه نیست. در نتیجه



شکل ۱۰: تابع گیبس در چند نقطه مختلف در نزدیکی و روی خط همزیستی بخار و مایع.

عبارت

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P} \rightarrow \infty. \quad (۸)$$

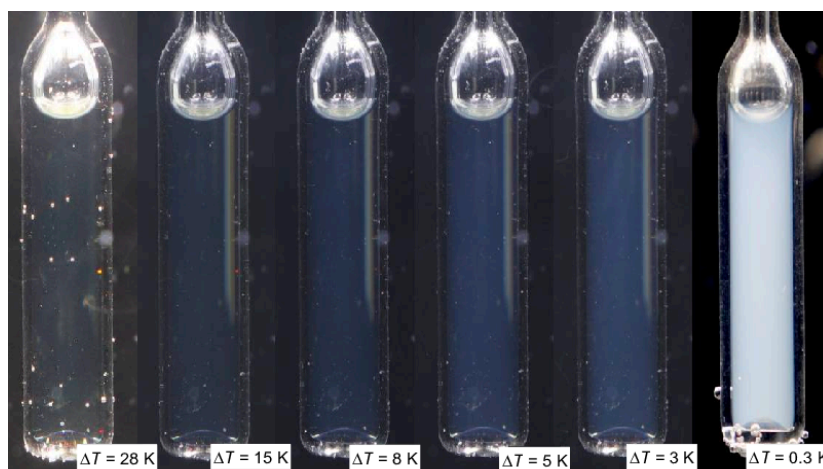
این نکته در شکل (۴) نیز به وضوح دیده می شود، زیرا در این شکل اگر روی یک خط همدمما در ناحیه همزیستی حرکت کنیم، فشار هیچ گونه تغییری نمی کند و حال آنکه حجم تغییر می کند. همین استدلال برای واگرا شدن ظرفیت گرمایی در فشار ثابت یعنی  $C_p$  نیز به کار می رود، زیرا با انتقال گرما به سیستم تنها باعث تبدیل مایع به بخار می شویم و دمای سیستم بالا نمی رود بنابراین

$$C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \rightarrow \infty. \quad (۹)$$

تخت بودن می نیمم تابع گیبس در نقطه بحرانی و افزایش دامنه افت و خیزها موجب پیدایش پدیده دیگری می شود که به آن کدر بودن بحرانی<sup>۱۵</sup> گفته می شود. نخستین بار در سال ۱۸۶۹، پدیده «کدرشدن بحرانی» در مایعات مشاهده شد که نشان می داد در نقطه بحرانی همه مایعات رنگ

<sup>۱۵</sup>Critical Opalescence

شیری پیدا کرده و کدر می شوند. برای آب این اتفاق در دمای  $T_c = 647.29 K$  و فشار  $P_c = 22.09 MPa$  اتفاق می افتد، شکل (۱۱). این اتفاق دقیقا در این نقطه رخ می دهد و کوچکترین انحرافی از این نقطه باعث شفاف شدن آب می شود. این پدیده ناشی از این است که همه طول موج های نور مرئی در اثر افت و خیزهای درون آب منعکس می شوند و آب شیری رنگ دیده می شود. همین پدیده در نفوذ پذیری<sup>۱۶</sup> مواد مغناطیسی نیز مشاهده می شود که ناشی از افت و خیزهای بلند برد در مغناطش ماده است.



شکل ۱۱: کدر شدن بحرانی. برای آب این اتفاق در دمای  $T_c = 647.29 K$  و فشار  $P_c = 22.09 MPa$  رخ می دهد.

## ۴ نماهای بحرانی

در گذار فاز مرتبه دو، پدیده مهمی که رخ می دهد، پیدایش یک نظم خود به خود<sup>۱۷</sup> در اثر کاهش دما و عبور از دمای بحرانی است. این نظم از آن جهت خود به خود خوانده می شود که عامل نظم دهنده بیرونی در پیدایش آن غایب است. به عنوان مثال در مواد مغناطیسی، مغناطش خود بخودی در غیاب میدان مغناطیسی رخ می دهد. دلیل این نظم خود به خود نیز آن است که اسپین هسته ها در اثر برهم کنش های کوتاه برد با یکدیگر

<sup>۱۶</sup>Magnetic Susceptibility  
<sup>۱۷</sup>Spontaneous Order

همبسته می شوند و این همبستگی با رسیدن به نقطه بحرانی رشد می کند و در مناطق وسیعی از ماده مغناطیسی اسپین ها هم جهت می شوند. در حقیقت آنچه که در پدیده های بحرانی اهمیت دارد و منشاء بسیاری از خواص عمومی آن است، همین واگرایی طول همبستگی بین ذرات است. این واگرایی طول همبستگی باعث می شود که ساختار میکروسکوپی سیستم ترمودینامیکی (ساختار شبکه ای، نوع اتم ها، چگونگی برهم کنش اتم ها و عوامل متعدد دیگر) اهمیت خود را از دست بدهند. نتیجه آن است که برای دسته های وسیعی از مواد و حتی پدیده های کاملاً متفاوت، بعضی از خواص بحرانی به یکسان بروز و ظهور پیدا می کنند. مهم ترین این خواص نیز چگونگی رفتار توابع پاسخ در نزدیکی نقطه بحرانی است. این رفتار با پارامترهایی تعیین می شود که آنها را نماهای بحرانی<sup>۱۸</sup> می نامیم. در زیر این نماهای بحرانی را برای نقطه بحرانی تبخیر مایعات تعریف می کنیم. ترتیب تعریف این نماها اهمیت چندانی ندارد. نخست ظرفیت گرمایی ویژه را در نظر می گیریم که دو نمای  $\alpha$  و  $\alpha'$  برای آن تعریف می شود که مربوط به نحوی واگرا شدن ظرفیت گرمایی ویژه در بالا و پایین دمای بحرانی هستند.

$$\begin{aligned} C_P &\sim (T - T_c)^{-\alpha} & T > T_c \\ C_P &\sim (T_c - T)^{-\alpha'} & T < T_c. \end{aligned} \quad (10)$$

در این روابط و همه روابطی که پس از این می آید، معنای علامت  $\sim$  این است که آنچه که در اینجا مهم است نحوه واگرایی نمایی این تابع پاسخ است و جزییات آن اهمیت ندارد. به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$\log C_P = \dots - \alpha \log(T - T_c) \quad (11)$$

که در آن همه علاقه ما تنها پیدا کردن شیب  $\alpha$  در این رابطه لگاریتمی است و بقیه جزییات اهمیت ندارند. دلیل علاقه ما به این نماها هم این است که این نماها هستند که بین پدیده های مختلف عمومیت دارند و نه چیزهای دیگر. ضمناً رابطه (۱۱) نشان می دهد که چرا اندازه گیری نماهای بحرانی بسیار سخت است و معمولاً با دقت کمی بدست می آیند. دلیلش این است که برای محاسبه شیب در هر نمودار تجربی احتیاج به بدست آوردن چندین نقطه متمایز وجود دارد و در یک نمودار لگاریتم-لگاریتم، بدست آوردن چند نقطه متمایز به معنای تغییر دما به اندازه چندین مرتبه بزرگی است.

در بسیاری از موارد مقدار دو نمای  $\alpha$  و  $\alpha'$  با هم مساوی است، اگر چه به دلیل دشواری فوق العاده اندازه گیری نماها نمی توان گفت که این دو نما با دقت خیلی زیاد با هم مساوی هستند. نمای دوم مربوط به ضریب تراکم پذیری است:

$$\kappa_T \sim (T - T_c)^{-\gamma} \quad T > T_c$$

Critical Exponents<sup>۱۸</sup>

$$\kappa \sim (T_c - T)^{-\gamma'} \quad T < T_c. \quad (12)$$

علامت منفی در روابط بالا به این معناست که هر دو این کمیت ها در نقطه بحرانی واگرا می شوند. یک نمای بحرانی مهم بیان می کند که پارامتر نظم با رسیدن به نقطه بحرانی از پایین چگونه از بین می رود و بی نظمی پدیدار می شود.

$$\Delta v \sim (T_c - T)^\beta \quad P = P_c. \quad (13)$$

دقت کنید که برای تعریف این نما، فشار می بایست دقیقاً فشار بحرانی باشد. یک نمای بحرانی دیگر چنین است:

$$\Delta v \sim (P - P_c)^{\frac{1}{5}} \quad T = T_c. \quad (14)$$

این نمای بحرانی درست در دمای بحرانی تعریف می شود و نشان می دهد که چگونه با کاهش عامل نظم دهنده (در اینجا فشار) پارامتر نظم از بین می رود. نماهای همین نماها با اندکی تغییر در روابط برای مغناطش مواد نیز تعریف می شوند. به عنوان مثال به جای چهار رابطه بالا روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} CB &\sim (T - T_c)^{-\alpha} & T > T_c \\ C_B &\sim (T_c - T)^{-\alpha'} & T < T_c. \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن  $C_B$  ظرفیت گرمایی در میدان مغناطیسی ثابت است. هم چنین به جای تراکم پذیری مایعات، ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی  $\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T$  است که واگرا می شود:

$$\begin{aligned} \chi_T &\sim (T - T_c)^{-\gamma} & T > T_c \\ \chi_T &\sim (T_c - T)^{-\gamma'} & T < T_c. \end{aligned} \quad (16)$$

برای گذار فاز مغناطیسی نماهای  $\beta$  و  $\gamma$  نیز به صورت زیر تعریف می شوند:

$$M \sim (T_c - T)^\beta \quad B = 0, \quad (17)$$

$$M \sim B^{\frac{1}{5}} \quad T = T_c. \quad (18)$$



چنانکه گفتیم، در نقطه بحرانی همبستگی های بلند برد  $1^9$  پدیدار می شوند و هر چه به نقطه بحرانی نزدیک می شویم این همبستگی ها بلندبرد تر می شوند. اما همبستگی به چه معناست. برای فهم آن به مثال مغناطیس توجه می کنیم. خواننده می تواند آن را برای هر سیستم دیگری نیز تعریف کند. دو اتم مختلف را در نقاط  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{r}'$  در نظر می گیریم. گشتاور مغناطیسی یا اسپین این دو اتم ها را با  $S(\mathbf{r})$  و  $S(\mathbf{r}')$  نشان می دهیم. مقدار این اسپین ها که برای سادگی فرض می کنیم تنها  $\pm 1$  است، دائما در اثر افت و خیز گرمایی تغییر می کند. در یک دمای معین، مقدار آن را با  $m(\mathbf{r}) = \langle S(\mathbf{r}) \rangle$  نشان می دهیم که در آن علامت  $\langle \cdot \rangle$  به معنای متوسط در یک بازه زمانی مشاهده است.  $m(\mathbf{r})$  در واقع همان پارامتر نظم است که طبیعتا به عوامل خارجی مثل میدان مغناطیسی و دما بستگی دارد. برای یک سیستم همگن و همسانگر طبیعتا  $m(\mathbf{r})$  به  $\mathbf{r}$  بستگی ندارد. اما می توانیم از خود بپرسیم که اسپین ها در دو نقطه جدا از هم چقدر روی هم تاثیر می گذارند و چه قدر به هم وابسته هستند. این همبستگی با تابع زیر تعریف می شود:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') := \langle S(\mathbf{r})S(\mathbf{r}') \rangle - \langle S(\mathbf{r}) \rangle \langle S(\mathbf{r}') \rangle. \quad (19)$$

در نزدیکی نقطه بحرانی این تابع همبستگی به شکل زیر رفتار می کند:

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sim \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\xi}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-2+\eta}} \quad (20)$$

مخرج این رابطه تنها به دلیل تاریخی به این شکل نوشته می شود و یک نمای دیگر به نام  $\eta$  را تعریف می کند. در این رابطه  $\xi$  طول همبستگی نامیده می شود. این طول همبستگی در نقطه بحرانی به سمت بی نهایت میل می کند که به معنای این است که صورت این کسر برابر با یک می شود و در نتیجه پس از آن همبستگی به صورت نمایی (یعنی خیلی تند) کاهش نمی یابد بلکه به صورت توانی (به صورتی که در مخرج نشان داده شده) کاهش می یابد. این کاهش بسیار کمتر از کاهش نمایی است و به همین دلیل است که می گوئیم در نقطه بحرانی همبستگی بلند برد پدیدار می شود. این که طول همبستگی چگونه بی نهایت می شود توسط یک نمای بحرانی دیگر به نام  $\nu$  تعیین می شود.

$$\xi \sim (T - T_c)^{-\nu} \quad \xi \sim (T_c - T)^{-\nu'} \quad (21)$$

به این ترتیب برای این دو سیستم که نام بردیم و هم چنین بسیاری سیستم های دیگر نماهای بحرانی زیر را تعریف کرده ایم:

$$\alpha(\alpha'), \beta, \gamma(\gamma'), \delta, \eta, \nu. \quad (22)$$

## ۵ نظریه لاندائو در ناحیه بحرانی

چگونه برهم کنش های کوتاه برد بین اتم ها موجب ظهور همبستگی های بلند برد و رفتار بحرانی (واگرایی توابع پاسخ) در یک ماده می شود؟ چگونه است که نماهای بحرانی مستقل از جزئیات خواص ماده (مثل نوع اتم ها و برهم کنش آنها) هستند؟ برای پاسخ به این سوالها می بایست تا آموختن مکانیک آماری و پدیده های بحرانی صبر کنیم. اما نظریه لاندائو به ما یاد می دهد که بدون پرداختن به جزئیات و محاسبات طولانی مکانیک آماری رفتار بحرانی را به صورت کیفی بفهمیم. این نظریه کاملاً منطبق بر ترمودینامیک است و علیرغم سادگی اش، رفتار بحرانی سیستم ها را به خوبی، اگرچه نه بطور دقیق و کمی، توصیف می کند. اما نقطه شروع این نظریه چیست؟ می دانیم که همه خواص یک سیستم ترمودینامیکی با دانستن تابع آنتروپی آن یعنی

$$S(U, V, N, \dots),$$

بدست می آید که در آن  $\dots$  به معنای همه پارامترهایی است که سیستم ترمودینامیکی را مشخص می کنند. یک راه دیگر هم این است که انرژی به صورت زیر تعیین شود:

$$U = U(S, V, N, \dots),$$

و سپس با استفاده از روابطی که خوانده ایم بقیه خواص ترمودینامیکی را استخراج کنیم. هم چنین می دانیم که به جای این توابع و بسته به شرایط می توان از تابع هلمهولتز

$$F(T, V, N, \dots)$$

یا تابع گیبس

$$G(T, P, N, \dots)$$

استفاده کرد و همان نتایج ترمودینامیکی را بدست آورد. اما محاسبه این توابع اساسی در حیطه ترمودینامیک امکان پذیر نیست و تنها می توان با اتکای بر خصوصیات میکروسکوپی اتم ها و برهم کنش آنها، آن هم با استفاده از مکانیک آماری این توابع را، البته با تقریب محاسبه کرد. گام اول در نظریه لاندائو این است که یک حدس معقول و منطقی برای این توابع پیشنهاد شود. هم چنین نکته مهم این است که این توابع را به عنوان تابعی از پارامتر نظم در نظر بگیریم. توجه به این نکته مهم است که اصلاً بدیهی نیست که این توابع به متغیری مثل پارامتر نظم بستگی داشته باشند. اگر به طور کلی پارامتر نظم را با  $\phi$  نشان دهیم، در نظریه لاندائو فرض می شود که تابع گیبس تابعی به شکل زیر است:

$$G = G(T, P, \phi). \quad (۲۳)$$

گام سوم این است که حدسی که برای تابع گیبس در نظر گرفته می شود، کلیه تقارن های موجود در سیستم ترمودینامیکی را در نظر بگیرد. به عنوان مثال، اگر با ماده مغناطیسی سروکار داریم که اسپین های آن فقط در یک امتداد قرار می گیرند و مقدار هر اسپین نیز  $\pm 1$  است، و هیچ ارجحیتی هم بین جهت های بالا و پایین وجود ندارد، می توانیم  $\phi$  را یک عدد  $\phi \in (-1, 1)$  و  $G$  را به صورت تابع زوجی از  $\phi$  در نظر بگیریم. هم چنین اگر با ماده مغناطیسی سروکار داریم که اسپین های آن فقط در یک امتداد قرار می گیرند و مقدار هر اسپین نیز  $\pm 1$  است، و هیچ ارجحیتی هم بین جهت های بالا و پایین وجود ندارد، می توانیم  $\phi$  را یک عدد  $\phi \in (-1, 1)$  و  $G$  را به صورت تابع زوجی از  $\phi$  در نظر بگیریم. هم چنین اگر با ماده مغناطیسی سروکار داریم که اسپین های آن بردارهایی هستند که هر جهتی را به صورت همسانگرد اختیار می کنند، می توانیم  $\phi$  را به صورت یک بردار در نظر بگیریم و تابع  $G$  را نیز تابعی از اندازه  $\phi$  در نظر بگیریم. حال با توجه به این که می خواهیم نزدیکی نقطه بحرانی را توصیف کنیم و در این نقطه پارامتر نظم بسیار کوچک است، می توانیم تابع گیبس را حول  $\phi = 0$  در مورد اول و حول  $\phi = 0$  در مورد دوم بسط دهیم. در مورد اول این بسط شکل زیر را خواهد داشت:

$$G(T, P, \phi) = a\phi^2 + b\phi^4 + \dots \quad (24)$$

و در مورد دوم شکل زیر پیدا خواهد کرد:

$$G(T, P, \phi) = a\phi \cdot \phi + b(\phi \cdot \phi)^2 + \dots \quad (25)$$

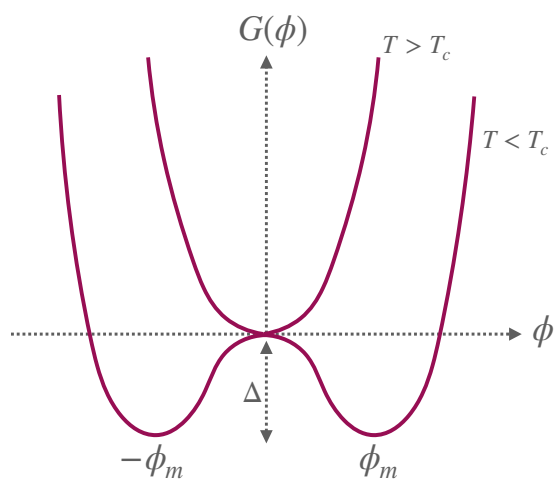
در هر دو مورد از نوشتن جملات مرتبه بالا صرف نظر کرده ایم. دقت کنید که در هر دو مورد تابع گیبس برای موقعیتی نوشته شده که عامل نظم دهنده خارجی (در این جا میدان مغناطیسی) وجود ندارد. در این روابط  $a$  و  $b$  توابعی تحلیلی از  $T - T_c$  هستند. بنابراین می توان آنها را بسط داد. می توان  $a$  را به صورت زیر نوشت:  $a = a_0(T - T_c) + \dots$  که در آن  $\dots$  نشان دهنده جملات مرتبه بالاتر است که طبیعتاً کوچک و قابل صرف نظر کردن هستند. نکته مهم این است که در  $T = T_c$  ثابت  $a$  تغییر علامت می دهد و در نتیجه خصلت تابع گیبس به کلی عوض می شود. همین عوض شدن خصلت یعنی عوض شدن می نیمم تابع گیبس باعث گذار فاز می شود. به عبارت بهتر، وقتی که  $T > T_c$  است، می نیمم تابع گیبس که حالت تعادل سیستم را (در دما و فشار معین) تعیین می کند، همان نقطه  $\phi = 0$  یعنی فاز بی نظم است. اما وقتی که  $T < T_c$  است، تابع گیبس دو می نیمم دور از هم پیدا می کند که برابرند با:

$$\pm\phi_m = \pm\sqrt{\frac{-a}{2b}} = \pm\sqrt{\frac{-a_0(T - T_c)}{2b}}. \quad (26)$$

همین محاسبه ساده نشان می دهد که نظریه لاندائو می تواند تخمینی از نمای بحرانی  $\beta$  بدست دهد:

$$\beta = \frac{1}{2}.$$

شکل (۱۲) تابع گیبس را برای دو حالت بزرگتر و کوچکتر از دمای بحرانی نشان می دهد. با کمی زحمت بیشتر می توان بقیه نماهای بحرانی را نیز بدست آورد اما این کاری است که در اینجا انجام نمی دهیم و آن را به درس های آینده و بخصوص به فصل مربوط به پدیده های بحرانی پس از یادگرفتن مکانیک آماری ماکول می کنیم.



شکل ۱۲: تابع گیبس در دو دمای بالاتر و پایین تر از دمای بحرانی  $T_c$ .

## ۶ نماهای بحرانی برای مایع وندروالس

می دانیم که معادله حالت گاز وندروالس چنین است:

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}. \quad (۲۷)$$

در درس گذشته نقطه بحرانی را پیدا کردیم. مشخصات این نقطه چنین است:

$$v_c = 3b, \quad T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (۲۸)$$

نشان دادیم که اگر این سه مقدار را با هم ترکیب کنیم یک رابطه عددی بین مختصات این سه نقطه بدست می آوریم که مستقل از پارامترهای گاز و اندروالس است و برای همه گازهای و اندروالس برقرار است:

$$\frac{RT_c}{P_c v_c} = \frac{8}{3} = 2.67 \quad (29)$$

هدف ما مطالعه گاز و اندروالس در نزدیکی نقطه بحرانی است. بنابراین بهتر است که فشار، دما و حجم مولی را همگی بر حسب فشار، دما و حجم مولی در نقطه بحرانی پیدا کنیم. به همین دلیل کمیت های بدون بعد زیر را تعریف می کنیم:

$$\pi = \frac{P}{P_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad \nu = \frac{v}{v_c}. \quad (30)$$

همه این کمیت ها در نقطه بحرانی برابر با صفر هستند. می توانیم معادله حالت و اندروالس را بر حسب این کمیت های جدید بنویسیم. بنابراین در معادله و اندروالس قرار می دهیم:

$$P = P_c \pi, \quad T = T_c \tau, \quad v = v_c \nu \quad (31)$$

و از رابطه (29) استفاده می کنیم. پس از کمی محاسبه بدست می آوریم:

$$\pi + \frac{3}{\nu^2} = \frac{8\tau}{3\nu - 1}. \quad (32)$$

از این رابطه می توان بعضی از نماهای بحرانی را بدست آورد.

■ **نمای بحرانی  $\beta$** : این نمای بحرانی تعیین می کند که وقتی عامل نظم دهنده برابر با صفر است، پارامتر نظم چگونه با دما تغییر می کند.

برای گذار فاز مایع بخار، این نما مطابق با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\phi \sim (T_c - T)^\beta \quad P = P_c, \quad (33)$$

یا

$$\phi \sim (-t)^\beta \quad (34)$$

که در آن  $t = \frac{T - T_c}{T_c}$  و  $\phi = \frac{v_g - v_l}{v_l}$  است. معنای این حرف این است که ما می بایست در معادله حالت (32) را برابر با 1 قرار دهیم و هم چنین قرار دهیم

$$\nu =: 1 + \phi \quad \tau =: 1 + t$$

و سپس برای  $t$  های کوچک و  $\phi$  های کوچک، رابطه این دو را با هم پیدا کنیم. از معادله (۳۲) بدست می آوریم:

$$1 + \frac{3}{(1 + \phi)^2} = \frac{8(1 + t)}{2 + 3\phi}. \quad (35)$$

حال از بسط های زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots \quad \frac{1}{(1 + x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \dots \quad (36)$$

و به نتیجه زیر می رسم:

$$\phi^2 = -\frac{4}{3}t + \dots \quad (37)$$

که به معنای این است که  $\beta$  برابر با  $\frac{1}{2}$  است.

■ **نمای بحرانی  $\delta$** : برای این نقطه بحرانی این نما با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\Delta v \sim (P_c - P)^{\frac{1}{\delta}} \quad T = T_c. \quad (38)$$

و یا  $\phi \sim \pi^{\frac{1}{\delta}}$ . بنابراین در رابطه (۳۲) قرار می دهیم،  $\nu = 1 + \phi$  و طرفین را بر حسب  $\phi$  بسط می دهیم. بازهم از بسط های

(۳۶) استفاده می کنیم و بدست می آوریم:

$$\pi = 1 - \frac{15}{2}\phi^3 + \dots \quad (39)$$

که نمای بحرانی  $\delta$  را به مقدار 3 تعیین می کند.

■ **نمای بحرانی  $\gamma$** : این نما با رابطه

$$\kappa_T \sim (T - T_c)^\gamma, \quad P = P_c \quad (40)$$

تعریف می شود که در آن  $\kappa_T = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_T$ . بر حسب کمیت های بدون بعد این رابطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \pi} \sim t^\gamma \quad \pi = 1. \quad (41)$$

با محاسبات مشابه می توان نشان داد که دو نمای بحرانی  $\gamma$  و  $\gamma'$  هر دو برابر با 1 هستند. دیگر نماهای بحرانی را نیز می توان با استفاده از معادله حالت و ندروالس حساب کرد. راهش این است که نخست تابع انرژی آزاد را حساب کنیم و سپس با استفاده از آن انتروپی و از آنجا ظرفیت گرمایی ویژه را حساب کنیم. اما این محاسبه را به درسهای آینده موکول می کنیم.

ادامه دارد.....

---