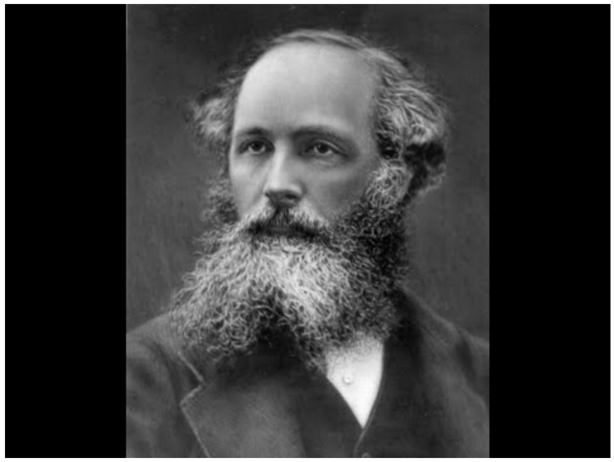
توزیع ماکسول بولتزمن

وحید کریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۲۲ آذر ۱۴۰۲

۱ مقدمه

اگر در یک گاز ایده آل یک مولکول را به طور تصادفی انتخاب کنیم، سرعت اش چقدر است؟ چه مدت از زمان آخرین برخورد این مولکول گذشته است؟ برخورد بعدی را در چه زمانی انجام می دهد؟ چه فاصله ای را طی می کند تا برخورد بعدی را انجام دهد؟ گر یک سوراخ به مساحت مثلا یک سانتی متر در دیواره اتاقی که این گاز را نگهداشته است ایجاد کنیم، پس از چه مدت ظرف از گاز خالی می شود؟ اگر یک گاز متفاوت را به درون یک ظرف که محتوی یک گاز دیگر است تزریق کنیم، چه مدت طول می کشد تا این گاز دوم در فضای ظرف پخش شود؟ در این درس سعی می کنیم که پاسخی برای این سوال ها پیدا کنیم یا لااقل روشی برای پاسخ گویی به آنها پیدا کنیم.



شکل ۱: جیمز کلرک ماکسول (۱۸۳۱ـ۱۸۷۹)

بسیاری جیمز کلرک ماکسول را بزرگترین فیزیکدان قرن نوزدهم می دانند که کشفیاتش راه را برای فیزیک قرن بیستم باز کرده است. ماکسول بعد از نیوتن دومین وحدت بزرگ را در نیروها و جلوه های بنیادی طبیعت یعنی وحدت نیروی مغناطیسی و نیروی الکتریکی و هم چنین نور و امواج الکترومغناطیسی کشف کرد. هم چنین او یکی از پیشگامان و بوجود آورندگان نظریه جنبشی گازهاست. علاوه بر این ها، او نقش مهمی در حوزه های دیگر علم نیز ایفا کرده، از جمله ساخت اولین عکس رنگی با دوام در سال ۱۸۶۱، اولین تجزیه تحلیل دقیق از پایداری ساختارهای فلزی مثل پل ها و ساختمان ها، کشف فوتو الاستیسته، ابداع مبانی علم مهندسی کنترل (۱۸۶۸) و کشفیات متنوع در حوزه های دیگر علوم. به عقیده بسیاری او همتراز نیوتن و اینشتین است. وی در چهل و هشت سالگی بر اثر سرطان در گذشت. در شهر زادگاه او، ادینبورو در کشور اسکاتلند، اکنون موزه ای به نام او برپاست.

۲ توزیع ماکسول-بولتزمن

در آنزامبل کانونیک می توانیم به سوالات خیلی جزئی تری در باره احتمالات پاسخ دهیم. مثلا از خود می پرسیم که احتمال این که یک ذره دارای مکان r_1 و تکانه ی p_1 باشد، چقدر است. این احتمال را با $f(r_1,p_1)$ نشان می دهیم. می دانیم که احتمال اینکه همه ذرات دارای تکانه ها و مکان های خاص باشند از رابطه زیر تعیین می شود:

$$f(\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1;\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_2;\cdots\mathbf{r}_N,\mathbf{p}_N)=\frac{1}{Z}e^{-\beta\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}} \qquad (۱)$$

احتمال $f(r_1,p_1)$ با انتگرال گیری روی بقیه مختصات و تکانه ها بدست می آید:

$$f(\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1)=\int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2\cdots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N P(\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1,\cdots\mathbf{r}_N,\mathbf{p}_N). \qquad (۲)$$

واضح است که حاصل این محاسبه برابر است با:

$$f(\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1)=Ce^{-\beta\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}} \qquad (۳)$$

که در آن C یک ثابت است. این رابطه می گوید که احتمال وجود ذره در نقاط مختلف فضا یکسان است، زیرا طرف راست به $\mathbf{r}$ بستگی ندارد. احتمال آنکه این ذره تکانه $\mathbf{p}$ داشته باشد برابر می شود با:

$$f(\mathbf{p})=C'e^{-\beta\frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \qquad (۴)$$

و ثابت C' از شرط بهنجارش احتمالات بدست می آید:

$$f(\mathbf{p})=\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\beta\frac{\mathbf{p}^2}{2m}}. \qquad (۵)$$

برای آنکه تابع توزیع سرعت را بدست آوریم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$f(\mathbf{v})d\mathbf{v}=P(\mathbf{p})d\mathbf{p} \qquad (۶)$$

و با توجه به این که $\vec{p}=m\vec{v}$، بدست می آوریم:

$$f(\mathbf{v})=m^3f(\mathbf{p}), \qquad (۷)$$

و یا

$$f(\mathbf{v})=\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\beta\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2}. \qquad (۸)$$

این تابع توزیع می گوید که احتمال این که یک ذره سرعت $\mathbf{v}$ داشته باشد تنها به اندازه سرعت بستگی دارد و نه به جهت آن و این همان چیزی است که انتظار داریم (البته در غیاب نیروهای خارجی). اگر تنها به توزیع یکی از مولفه های سرعت علاقمند باشیم از همین رابطه بدست می آوریم:

$$f(v_x)=\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}e^{-\beta\frac{1}{2}m{v_x}^2}. \qquad (۹)$$

از این تابع توزیع بدست می آوریم:

$$\langle|v_x|\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x)|v_x|dv_x = 2\int_0^{\infty} f(v_x)v_x dv_x = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \qquad (۱۰)$$

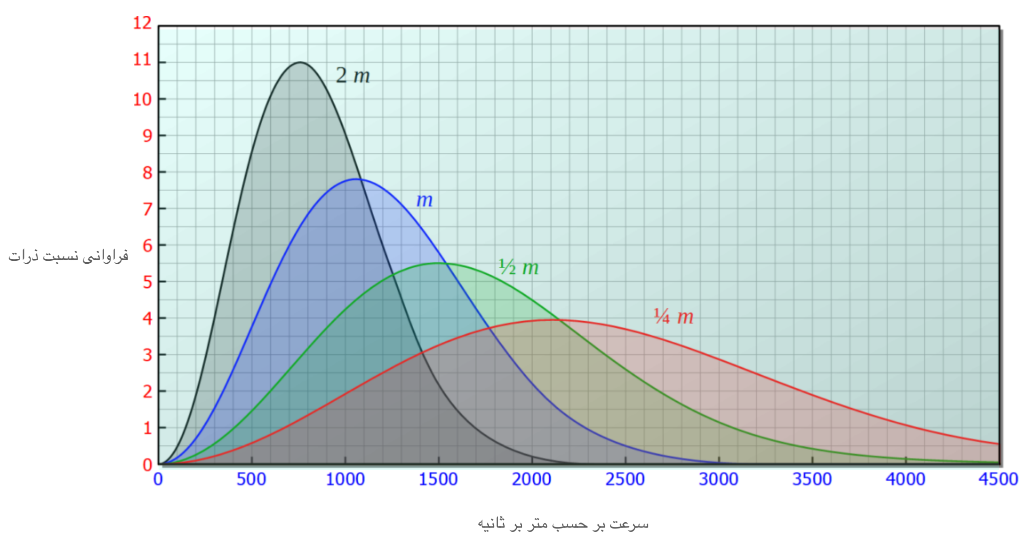
برای آنکه تابع توزیع اندازه سرعت ها را بدست آوریم می بایست روی زوایای مختلف انتگرال بگیریم. با توجه به همسانگرد بودن تابع توزیع $f(\mathbf{v})$ را بدست می آوریم:

$$f(v)dv = 4\pi v^2 dv f(\mathbf{v}) \qquad (۱۱)$$

و یا

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta\frac{1}{2}mv^2}. \qquad (۱۲)$$

شکل (۲)



شکل ۲: تابع توزیع سرعت ذرات در یک گاز ایده آل.

تابع توزیع اندازه سرعت را نشان می دهد. محتمل ترین اندازه سرعت یا v_m جایی است که تابع توزیع بالا ماکزیمم شود. یک محاسبه ساده نشان می دهد که :

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{۱۳}$$

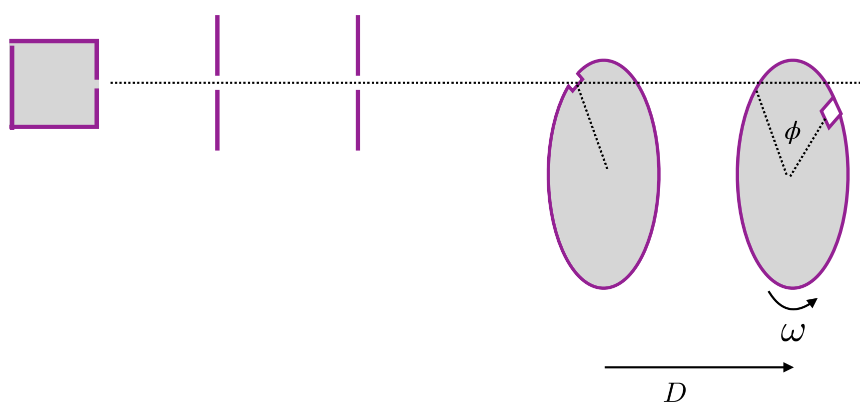
مقدار احتمال در این نقطه برابر است با: $f_m = f(v_m) = e^{-1}\sqrt{\frac{8\pi m}{kT}}$.

- تمرین: مقدار متوسط سرعت یعنی $\overline{v}$ و واریانس آن را بدست آورید.

- تمرین: محتمل ترین مقدار اندازه سرعت، متوسط $\langle v\rangle$ و هم چنین $v_{rms} := \sqrt{\langle v^2\rangle}$ را بدست آورده و مقادیر آنها را با هم مقایسه کنید.

۳ تحقیق تجربی توزیع ماکسول-بولتزمن

برای تحقیق درستی تابع توزیع سرعت ها راه های متفاوتی وجود دارد. یک روش ساده در شکل (۳) توضیح داده شده است. آزمایش هایی از این دست نشان می دهند که تابع توزیع ماکسول بولتزمن به خوبی نشان دهنده توزیع احتمالاتی سرعت ذرات در یک گاز ایده آل است.



شکل ۳: تحقیق تجربی توزیع سرعت ها. برای توضیح به متن مراجعه کنید.

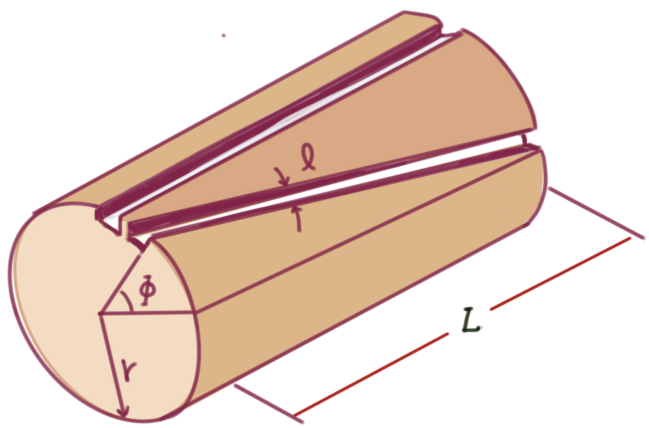
مولکول های گاز از درون محفظه ای در دمای T به بیرون فرار می کنند. دو صفحه موازی به عنوان یک سو کننده عمل می کنند و باریکه از مولکولها به سمت چرخ های گردان حرکت می کنند. چرخ اول ثابت است اما چرخ دوم با سرعت زاویه ای ω می چرخد. هر دو چرخ یک شیار دارند و فاصله زاویه ای انها برابر با ϕ است. یک ذره وقتی از هر دو شکاف عبور می کند و به دستگاه آشکارساز می رسد که در فاصله زمانی ای که ذره اول از شکاف چرخ اول عبور می کند، شکاف چرخ دوم درست روبروی آن قرار گرفته باشد. اگر زمان عبور برابر با t باشد، این شرط وقتی برقرار می شود که داشته باشیم:

$$\phi = \omega t. \tag{۱۴}$$

از طرفی می دانیم که $D = vt$. ازترکیب این رابطه می توان سرعت ذرات را بدست آورد:

$$v = \frac{D}{t} = \frac{D\omega}{\phi}. \tag{۱۵}$$

با تغییر فاصله بین دو چرخ و ثبت تعداد ذرات برای سرعت های مختلف می توان تابع توزیع سرعت ذرات را بدست آورد. با الهام از همین ایده چیدمان دیگری از آزمایش به صورت نشان داده شده در شکل (۴) مورد استفاده قرار می گیرد.



شکل ۴: مولکولهای گاز پس از عبور از یکسو کننده سرعت، از شیار ایجاد شده روی یک استوانه چرخان عبور می کنند. زاویه ابتدا و انتهای شیار برابر با ϕ است. استوانه با سرعت زاویه ای ω می چرخد. بنابراین مدت زمان $t = \frac{\phi}{\omega}$ طول می کشد تا انتهای شیار درست در مقابل جایی که اکنون ابتدای شیار قرار است، قرار بگیرد. یک مولکول تنها در صورتی از شیار عبور می کند که در این فاصله زمانی خود را به انتهای شیار برساند. این مولکولها سرعت شان برابر است با: $v = \frac{L}{t} = \frac{L\omega}{\phi}$. در واقع برای این مولکولها شیار اریب نیست بلکه در مسیر مستقیم قرار دارد. با تغییر فرکانس چرخش استوانه (به طریق الکترونیک) می توان تعداد مولکولها با سرعت های مختلف را ثبت کرد.

نتیجه این آزمایش ها نشان می دهد که تابع توزیع سرعت به جای آنکه مثل تابع توزیع ماکسول_بولتزمن متناسب با $v^2 e^{-\beta\frac{mv^2}{2}}$ باشد متناسب با $v^4 e^{-\beta\frac{mv^2}{2}}$ است. این عدم تطابق ناشی از دو چیز است. نخست این که مولکولهایی که از محفظه حاوی گاز در دمای T به بیرون فرار می کنند نماینده همه مولکوهای درون ظرف نیستند بلکه نماینده مولکولهایی هستند که سرعت آنها یا به عبارت بهتر مولفه سرعت آنها در جهت x از بقیه بیشتر است و به همین دلیل موفق به فرار می شوند، به همان معنایی که سرعت دویدن یک فوج از کودکان از کلاس درس (در هنگام زنگ تفریح) نماینده سرعت متوسط کودکان نیست بلکه نشان دهنده سرعت شیطان ترین کودکان است. در آینده نشان خواهیم داد که این تابع توزیع نسبت به تابع توزیع ماکسول یک فاکتور سرعت اضافه v به صورت ضربی دارد. به عبارت دیگر اگر تابع توزیع ماکسول را با $P(v)$ نمایش بدهیم، در بخش های بعدی نشان خواهیم داد که تابع توزیع ذراتی که از ظرف فرار می کنند چنین است:

$$P_1 dv \propto vP(v)dv. \tag{۱۶}$$

دوم این که شیاری که روی استوانه تعبیه شده است شیاری با پهنای صفر نیست بلکه یک پهنای محدود دارد و این پهنای محدود اجازه می دهد که ذراتی با سرعت های متفاوت از شیار عبور کنند. برای درک این نکته فرض کنید که پهنای شیار برابر با l باشد. در این صورت زاویه بین دو انتهای شیار بین یک مقدار $\phi_- := \phi - \frac{l}{2r}$ و $\phi_+ := \phi + \frac{l}{2r}$ قرار دارد. در این صورت ذراتی که سرعت آنها بین $v_- := \frac{L\omega}{\phi_+}$ و $v_+ := \frac{L\omega}{\phi_-}$ قرار دارد از شکاف عبور می کنند. تفاوت این دو سرعت برابر است با:

$$v_+ - v_- = \frac{L\omega}{\phi_-} - \frac{L\omega}{\phi_+} \approx \frac{L\omega}{\phi^2}\frac{l}{r} = v\frac{l}{\phi r} \tag{۱۷}$$

در نتیجه تابع توزیع ذراتی که از شکاف عبور می کنند برابر است با:

$$P_2(v)dv = \int_{v_-}^{v_+} P_1 dv = P_1(v)(v_+ - v_-) \propto P_1(v)vdv \approx P(v)v^2 dv. \tag{۱۸}$$

به این دلیل است که تابع توزیع $P_2 \sim v^4 e^{-\beta\frac{1}{2}mv^2}$ دلیلی برای درستی تابع توزیع ماکسول_بولتزمن است.

۱.۳ پهن شدگی دوپلر

مولکولهای یک گاز با سرعت های گوناگون در جهات مختلف حرکت می کنند. این سرعت باعث پهن شدگی خطوط طیفی می شود که به آن پهن شدگی دوپلری [۱] می گویند. می توان تخمینی از پهن شدگی دوپلری خطوط طیفی بدست آورد و از آن برای تخمین سرعت متوسط مولکولها و در

[۱] Doppler Broadening

نتیجه دمای گازی که از این مولکول ها تشکیل شده استفاده کرد. از این روش می توان در کنار دیگر روش ها برای تخمین دمای گازهای میان ستاره ای یا دمای اتمسفر سیارات استفاده کرد. مولکولی را در نظر بگیرید که با سرعت v به طرف شما می آید. در این صورت اگر فرکانس نوری که تابش می کند برابر با ω_0 باشد، در اثر پدیده دوپلر، فرکانس آن به صورت

$$\omega = \omega_0(1 + \frac{v}{c})$$

دیده خواهد شد که در آن c سرعت نور است. اما همه مولکول ها مستقیما به طرف ما نمی آیند یا مستقیما از ما دور نمی شوند. اگر ما در راستای محور x ایستاده باشیم، مولفه سرعتی که در روابط بالا می بایست وارد شود برابر است با v_x. بنابراین اگر چگالی احتمال اینکه فرکانس ω را مشاهده کنیم را با $P_f(\omega)$ نشان دهیم و تابع توزیع ماکسول_بولتزمن را برای سرعت ها در راستای x با P_x نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P_f(\omega)d\omega = P(v_x)dv_x \tag{۱۹}$$

و از آنجا

$$P_f(\omega) = \frac{\omega_0}{c}P_x(\frac{c}{\omega_0}(\omega - \omega_0)) = \frac{\omega_0}{c}Ae^{-\frac{mc^2}{2kT}\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}. \tag{۲۰}$$

از آنجا که شدت خطوط طیفی در هر فرکانسی متناسب با تابع توزیع در آن فرکانس است، خواهیم داشت

$$I(\omega) \propto e^{\left(-\frac{mc^2(\omega_0-\omega)^2}{2kT\omega_0^2}\right)} \tag{۲۱}$$

می دانیم که یک تابع توزیع گاووسی همواره به این صورت است:

$$P(x) = Ae^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{۲۲}$$

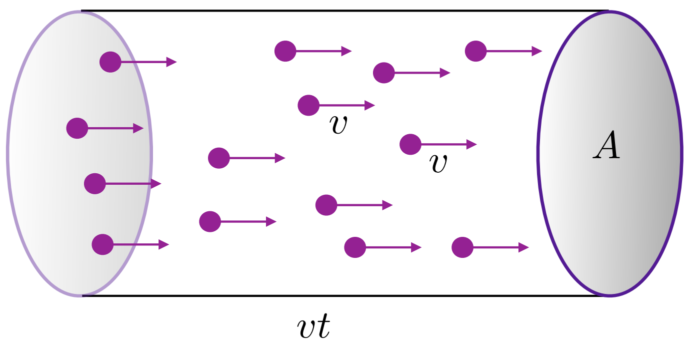
که در آن x_0 مقدار متوسط و σ مقدار واریانس است. بنابراین نشان داده ایم که دما باعث پهن شدگی خطوط طیفی مطابق با رابطه زیر می شود:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} \tag{۲۳}$$

۴ فشار و معادله حالت

مولکولهایی در ظرف گاز حرکت می کنند به دیواره ها برخورد می کنند و منعکس می شوند. در هر برخورد مقداری تکانه به دیواره ها منتقل می کنند که باعث فشار به دیواره ظرف می شود. این فشار همان فشار گاز است. چگونه می توان این فشار را حساب کرد. اولین کار و بهترین کار این

است که یک حساب سرانگشتی انجام دهیم. همیشه این حساب های سرانگشتی مقدم بر هر نوع محاسبه پیچیده ای هستند چرا که بدون زحمت خیلی زیاد اغلب اوقات جوابی بدست می دهند که خصوصیات اصلی جواب دقیق نهایی را در خود دارند و فقط ممکن است از نظر ضرایب عددی کمی با جواب دقیق تفاوت داشته باشند.



شکل ۵: در یک زمان t تمام مولکولهای نشان داده شده در استوانه به دیواره برخورد می کنند و به آن فشار وارد می کنند. تعداد این مولکولها $1/6$ تعداد کل مولکولهای درون استوانه هستند. اندازه سرعت همه مولکولهای گاز مساوی است.

پس از این محاسبه سرانگشتی، می توانیم یک محاسبه دقیق انجام دهیم. برای این محاسبه یک قسمت از دیواره را به مساحت A در راستای عمود با محور z در نظر می گیریم. فرض می کنیم که همه ذرات با سرعت متوسطی که آن را v می نامیم حرکت می کنند. به طور سرانگشتی فرض می کنیم که $1/6$ این ذرات در جهت مثبت z حرکت می کنند و بقیه هم در جهات دیگر. حال اگر زمان t صبر کنیم تمام مولکولهایی که در استوانه نشان داده شده در شکل (۵) قرار دارند و به سمت دیواره حرکت می کنند به این دیواره برخورد می کنند. تعداد این ذرات برابر است با:

$$\frac{1}{6}n \times vt \times A \qquad (۲۴)$$

که در آن n چگالی تعداد ذرات است. میزان کل تکانه ای که این ذرات به دیواره وارد می کنند برابر است با:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{6}n \times vt \times A \times 2mv \qquad (۲۵)$$

بنابراین فشار وارد شده به سطح را می توان حساب کرد. داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\mathcal{P}}{tA} = \frac{1}{3}nmv^2 \qquad (۲۶)$$

اما می دانیم که انرژی متوسط مولکولها برابر است با:

$$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \qquad (۲۷)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$P = \frac{2}{3}U \qquad (۲۸)$$

که در آن $U = N\epsilon$ انرژی داخلی گاز است و یا

$$PV = NkT. \qquad (۲۹)$$

به این ترتیب با حساب سرانگشتی ساده معادله حالت گاز را بدست آوردیم.

پس از این محاسبه سرانگشتی یک محاسبه دقیق انجام می دهیم. می دانیم که چگالی ذراتی که با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می کنند برابر است با

$$n(\mathbf{v}) = nP(\mathbf{v})$$

که در آن n چگالی ذرات و $P(\mathbf{v})$ تابع توزیع ماکسول ـ بولتزمن است. این تابع توزیع احتمال این را به دست می دهد که ذره ای سرعت $\mathbf{v}$ را داشته باشد. برای این دسته از ذرات چگالی جریان برابر است با:

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = nP(\mathbf{v})\mathbf{v}. \qquad (۳۰)$$

هرگاه یک المان سطح $\Delta\mathbf{A}$ داشته باشیم که سطح آن برابر با A و جهت عمود برآن با بردار یکه $\hat{\mathbf{z}}$ مشخص شود، آنگاه

$$\mathbf{J}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{A} = nP(\mathbf{v})\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} = nP(\mathbf{v})v_zA$$

تعداد ذراتی است که در واحد زمان به این سطح برخورد می کنند و دارای سرعت $\mathbf{v}$ هستند. هر کدام از این ذرات تکانه ی $2mv_z$ را به سطح منتقل می کنند. بنابراین کل تکانه وارد شده به این سطح در جهت عمود بر آن و در واحد زمان (یعنی نیروی وارد بر این سطح) در جهت عمود بر

آن برابر است با:

$$F = \int_+ d^3\mathbf{v}\ nP(\mathbf{v})v_z A \times 2mv_z = n\ A\ 2m \int_+ d^3\mathbf{v} P(\mathbf{v})v_z^2 \tag{۳۱}$$

از آنجا که انتگرال را فقط روی v_z های مثبت محاسبه کرده ایم عبارت بالا برابر می شود با:

$$F = n\ A\langle mv_z^2\rangle \tag{۳۲}$$

در نتیجه با تقسیم این نیرو برو سطح میزان فشار محاسبه می شود:

$$P = n\ \langle mv_z^2\rangle \tag{۳۳}$$

اما می دانیم که به دلیل همسانگردی $\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle$ و در نتیجه

$$P = n\ \frac{1}{3}\langle mv^2\rangle = n\ \frac{2}{3}\langle\frac{1}{2}mv^2\rangle = n\ \frac{2}{3}\frac{3}{2}kT = nkT \tag{۳۴}$$

و یا

$$PV = NkT. \tag{۳۵}$$

۵ فرار مولکول ها

همان محاسبه ای که برای تعیین فشار یک گاز انجام دادیم با کمی تغییر برای محاسبه یک کمیت مهم دیگر نیز به کار می رود، البته با اندکی تغییر. این پدیده مربوط به فرار یا نشت [۲] یک گاز است. فرض کنید که در دیواره ظرف یک سوراخ کوچک به مساحت A ایجاد شده باشد. سوال این است که نرخ فرار مولکولهای گاز از این ظرف چقدر است؟ برای این کار کافی است از همان رابطه (۳۱) استفاده کنیم، بدون اینکه تکانه وارد شده به سطح را وارد کنیم. در نتیجه تعداد ذراتی که در زمان Δt از سوراخ به مساحت A می گریزند عبارت است از:

$$\Delta\mathcal{N} = \int dv_x \int dv_y \int_+ dv_z\ \ nP(\mathbf{v})v_z A\Delta t \tag{۳۶}$$

در نتیجه تعداد مولکولهایی که از واحد سطح در واحد زمان عبور می کنند برابر است با:

[۲] Efusion

$$\varepsilon = n\int_{v_z>0} P(\mathbf{v})v_z = n\frac{1}{2}\langle |v_z|\rangle. \quad (۳۷)$$

با جایگذاری $\langle |v_z|\rangle$ از رابطه (۱۰) بدست می آوریم:

$$\varepsilon = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \quad (۳۸)$$

اگر تمرین های این درس را تا اینجا حل کرده باشید متوجه شده اید که

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

با در نظر گرفتن این رابطه می توان نرخ گریز مولکولها را به شکل ساده زیر نوشت:

$$\varepsilon = \frac{1}{4}n\langle v\rangle. \quad (۳۹)$$

۶ پویش آزاد میانگین

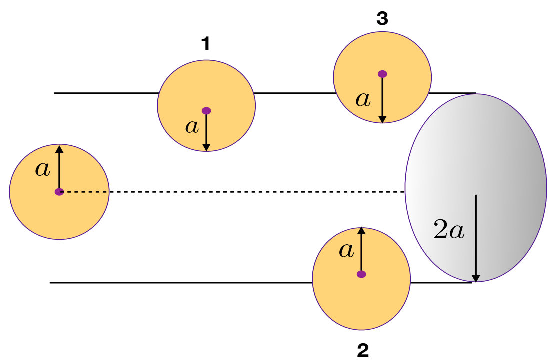
در این بخش می خواهیم به این سوال ها پاسخ دهیم که متوسط زمان بین دو برخورد برای یک ذره چقدر است؟ در این فاصله زمانی یک ذره چه مسافتی را طی می کند؟ برای پاسخ به این سوالات نخست احتیاج به مفهوم سطح مقطع پراکندگی [۳] داریم.

۱.۶ سطح مقطع پراکندگی

گازی را در نظر بگیرید که مولکولهای آن کره هایی سخت [۴] با شعاع a هستند. مولکول های دیگری که بر سر راه این مولکول قرار می گیرند آن را به شکل یک دایره به شعاع πa^2 می بینند. سطع مقطع این مولکول بنابراین πa^2 است. اما سطح مقطع پراکندگی از این بزرگتر است چرا که خود مولکولهایی که بر سر راه این مولکول قرار گرفته اند نیز حجم و سطح دارند. در واقع همانطور که شکل (۶) نشان می دهد سطح مقطع پراکندگی برای این مولکول ها برابر است با $\sigma = \pi(2a)^2$. اگر دقیق تر بخواهیم سطح مقطع پراکندگی کمی از این مقدار هم بزرگ تر است زیرا مولکول ها نیازی به تماس فیزیکی با یکدیگر ندارند تا بتوانند بر هم نیرو وارد کنند و یک دیگر را از مسیر راست منحرف کنند. محاسبه دقیق

[۳] Scattering Cross Section
[۴] Hard Spheres

سطح مقطع پراکندگی می بایست با توجه به پتانسیل بین دو مولکول و با استفاده از مکانیک کوانتومی صورت پذیرد ولی هر چه که هست همواره عبارت نهایی ضریبی از πa^2 است که در آن a شعاع موثر یک مولکول است.



شکل ۶: برای مولکوهایی که شعاع آنها برابر با a است، سطح مقطع پراکندگی برابر است با $\sigma = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2$.

۲.۶ پویش آزاد میانگین و زمان آزاد میانگین

مولکول های گاز دایما با هم برخورد می کنند و مسیرشان عوض می شود. بین برخوردها هر مولکولی یک مسیر راست را طی می کند. می خواهیم ببینیم زمان متوسط بین برخوردها چقدر است؟ این زمان را زمان آزاد میانگین [۵] می نامیم. در این فاصله زمانی نیز یک ذره مسافتی را طی می کند بدون اینکه با ذره دیگری برخورد کند و مسیرش عوض شود. این مسافت را پویش آزاد میانگین [۶] می نامیم. این کمیت ها چه ربطی به دما و چگالی دارند. این ها سوالاتی هستند که در این بخش در جستجوی پاسخ آنها هستیم. نخست یک محاسبه سرانگشتی و ساده انجام می دهیم. مثل هر مسئله دیگری، جواب هایی که بدست می آوریم خصلت های کلی جواب دقیق نهایی را به ما نشان خواهند داد. نخست پویش آزاد میانگین را محاسبه می کنیم. این مسافت را با $\bar{l}$ را نشان دهید. ذره ای که با داشتن سطح مقطع پراکندگی σ این مسافت را طی می کند، یک استوانه ای با حجم $\sigma\bar{l}$ را جاروب می کند. اگر ذره در این فاصله به طور متوسط یک برخورد انجام دهد و مسیرش عوض شود، باید داشته باشیم:

$$n\sigma\bar{l} \approx 1 \qquad (۴۰)$$

---

۵ Mean Free Time

۶ Mean Free Path

و در نتیجه

$$\bar{l} \approx \frac{1}{n\sigma}. \tag{۴۱}$$

این رابطه نشان می دهد که هر چه چگالی بیشتر باشد، پویش آزاد میانگین هم کمتر می شود. نکته جالب این است که این فاصله به دما بستگی ندارد و تنها تابع چگالی است. این نتیجه هم قابل فهم است. از این نتیجه می توان زمان آزاد میانگین را هم بدست آورد. رابطه بین مسافت و زمان طی شده بین دو برخورد طبیعتا برابر است با $\tau\overline{v} = \bar{l}$ که در آن τ همان زمان آزاد میانگین و $\overline{v}$ سرعت میانگین مولکولهاست. بنابراین خواهیم داشت:

$$\tau \approx \frac{1}{n\sigma\overline{v}} \propto \sqrt{\frac{m}{kT}}\frac{1}{n\sigma}. \tag{۴۲}$$

این نتیجه هم از نظر فیزیکی مورد انتظار است: دمای زیاد باعث سرعت زیادتر ذرات می شود و در آن شلوغی که ناشی از چگالی بالاست، فاصله زمانی بین برخوردها کوتاه تر می شود. اما مسافت بین برخوردها فقط به میزان شلوغی بستگی دارد و نه به سرعت ذرات و در نتیجه به دما. پس از این استدلال سرانگشتی می توانیم به یک استدلال دقیق بپردازم و خواهیم دید که به همان نتایج می رسیم.

سطح مقطع پراکندگی یک مولکول را با σ نشان می دهیم. در این صورت در فاصله زمانی dt این مولکول یک حجم $\sigma v dt$ را جاروب می کند. احتمال اینکه در این فاصله زمانی مولکول یک برخورد انجام دهد برابر است با احتمال اینکه یک مولکول بر سر راهش قرار گیرد یعنی احتمال اینکه یک مولکول در این حجم جاروب شده قرار بگیرد. احتمال این که یک مولکول خاص مثلا مولکول شماره یک در این حجم قرار بگیرد برابر است با این احتمال برابر است با: $\frac{\sigma v dt}{V}$ یعنی نسبت حجم جاروب شده به حجم کل فضا. اما هر مولکولی می تواند در این حجم جاروب شده قرار بگیرد، بنابراین احتمال این که مولکولی در این حجم جاروب شده قرار بگیرد برابر است با :

$$N \times \frac{\sigma v dt}{V}$$

که در آن N تعداد کل مولکول هاست. در این جا فرض شده است که مولکول ها رفتار مستقل از هم دارند که فرض درستی است. بنابراین احتمال برخورد در این فاصله زمانی برابر است با $\sigma n v dt$ و احتمال برخورد نگردن نیز برابر است با $1 - n v \sigma dt$.

حال احتمال اینکه از زمان اخرین برخورد یک مولکول زمان t گذشته باشد را با $P(t)$ نشان می دهیم. مثل هر تابع دیگری این تابع نیز در بسط زیر صدق می کند:

$$P(t+dt) = P(t) + \frac{dP}{dt}dt \tag{۴۳}$$

از طرفی احتمال اینکه مولکول تا زمان $t+dt$ برخورد نکرده باشد برابر است با احتمال اینکه تا زمان t برخوردی نداشته و در فاصله کوتاه dt نیز بدون برخورد مانده باشد، یعنی

$$P(t+dt) = P(t)(1-n\sigma v dt). \tag{۴۴}$$

بنابراین بدست می آوریم

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = -n\sigma v \tag{۴۵}$$

اما بنابر تعریف می دانیم که $P(0)=1$ زیرا احتمال اینکه از زمان اخرین برخورد ذره صفر ثانیه گذشته باشد همواره برابر است با یک. در نتیجه حل معادله بالا عبارت است از:

$$P(t) = e^{-nv\sigma t}. \tag{۴۶}$$

این عبارت احتمال این است که ذره پس از گذشت زمان t از اخرین برخوردش هنوز بدون برخورد مانده باشد. این عبارت چیزی در باره بعد از این لحظه نمی گوید. حالا می پرسیم احتمال اینکه ذره فاصله زمانی بین دو برخوردش برابر با t باشد چقدر است؟ این احتمال برابر است با احتمال اینکه ذره تا زمان t بدون برخورد مانده باشد و در فاصله زمانی $(t, t+dt)$ یک برخورد انجام دهد. بنابراین اگر این تابع توزیع را با $P_{coll}(t)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P_{col}(t)dt = P(t)\times nv\sigma dt = nv\sigma e^{-nv\sigma t}dt \tag{۴۷}$$

با استفاده از این رابطه می توانیم زمان متوسط بین برخوردها را حساب کنیم:

$$\tau = \int_0^\infty t e^{-n\sigma v t} n\sigma v dt \tag{۴۸}$$

و یا

$$\tau = \frac{1}{n\sigma v}. \tag{۴۹}$$

۷ قدردانی

از آقای سپهر سلمانی یگانه، دانشجوی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف که در نیمسال اول ۱۴۰۲ با دقت این درسنامه را خواندند و اشکالات متعدد آن را یادآوری کردند سپاسگزاری می کنم.

---

۸ مسئله ها:

- انرژی متوسط مولکولهای هوا را در فشار یک اتمسفر حساب کنید.

- یک ابر میان ستاره ای از اتم های هیدروژن خنثی دمایی حدود ۵۰ درجه کلوین دارد. جرم این ابر ۱۰۰ برابر جرم خورشید است. فشار این ابر میان ستاره ای چقدر است؟ حجم این ابر را نیز بر حسب مکعب سال نوری حساب کنید. سرعت متوسط اتم ها را نیز بدست آورید.

- یک گاز در نظر بگیرید که تابع توزیع اندازه سرعت مولکولهایش $f(v)$ باشد. یعنی درصد مولکول هایی که با سرعت بین v و $v+dv$ حرکت می کنند برابر با $f(v)dv$ باشد.

الف: نشان دهید که در صد مولکولهایی که با سرعت بین v و $v+dv$ و زاویه بین θ و $\theta+d\theta$ نسبت به یک محور معین حرکت می کنند برابر است با

$$\frac{1}{2}f(v)dv\sin\theta d\theta. \qquad (۵۰)$$

ب: نشان دهید که تعداد مولکولهایی که با سرعت بین v و $v+dv$ و زاویه بین θ و $\theta+d\theta$ در واحد زمان به واحد سطح از دیواره ظرف برخورد می کنند برابر است با

$$\frac{1}{2}nvf(v)dv\sin\theta\cos\theta d\theta, \qquad (۵۱)$$

که در آن n چگالی مولکول های در هر نقطه از فضاست. فرض کرده ایم که چگالی در تمام ظرف یکسان است. حال برای گازی که تابع توزیع سرعت مولکولهایش از نوع ماکسول-بولتزمن است،

ج: با استفاده از این رابطه فشار وارد شده بر دیواره های ظرف را حساب کنید.

د: نشان دهید که متوسط انرژی جنبشی مولکولهایی که به دیواره برخورد می کنند برابر با $2kT$ و متوسط انرژی جنبشی تمام مولکول ها برابر با $\frac{3}{2}kT$ است.

ه: هم چنین نشان دهید که $\langle\cos\theta\rangle = \frac{2}{3}$.

- با استفاده از تابع توزیع ماکسول ـ بولتزمن ، تابع توزیع بردار سرعت نسبی بین دو ذره را بدست آورید. منظور این است که اگر سرعت دو ذره را با $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نشان دهیم، تابع توزیع بردار سرعت $\mathbf{v}_r := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ را محاسبه کنید. هم چنین تابع توزیع اندازه سرعت نسبی را بدست آورید. سپس کمیت های زیر را تعیین کنید:

$$\langle v_r\rangle, \qquad \langle v_r^2\rangle. \tag{۵۲}$$

- یک ظرف محتوی گاز مولکول دواتمی نیتروژن N_2 است. فشار درون ظرف برابر با یک اتمسفر و دمای آن برابر صفر درجه سانتی گراد است. اگر در دیواره این ظرف یک سوراخ به شعاع پنج میلی متر درست شده باشد، چه مدت طول می کشد که گاز دورن ظرف خالی شود.

- ظرف گازی را در نظر بگیرید که حاوی یک گاز در دما و فشار معین است. مولکولهایی که از یک سوراخ ایجاد شده دردیواره این ظرف به بیرون فرار می کنند قاعدتا سرعت متوسط بالاتری نسبت به بقیه مولکول ها دارند. اگر تابع توزیع مولکولها $f(v)$ باشد، تابع توزیع مولکولهایی که فرار می کنند برابر است با

$$vf(v). \tag{۵۳}$$

اگر تابع توزیع مولکولها از نوع ماکسول_بولتزمن باشد، انرژی جنبشی متوسط مولکولهایی که از ظرف فرار می کنند، چقدر است؟ این انرژی متوسط چند برابر انرژی متوسط مولکولهای گاز است؟

- یک گاز هیدروژنی بین ستاره ای دارای دمای داخلی ۵۰ درجه کلوین است. زمان پویش آزاد میانگین و هم چنین فاصله پویش آزاد میانگین در این گاز چقدر است؟

- نشان دهید که در توزیع ماکسول بولتزمن همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\langle v\rangle\langle\frac{1}{v}\rangle = \frac{4}{\pi}. \tag{۵۴}$$

■ الف: نشان دهید که مقدار پهن شدگی خطوط طیفی یک گاز در یک دمای T برابر است:

$$\Delta\lambda = 7.16 \times 10^{-7}\lambda_0\sqrt{\frac{T}{m}}, \quad (۵۵)$$

که در آن m جرم مولکولهای گاز و λ_0 طول موج میانی خط طیفی است.

ب: میزان پهن شدگی خط طیفی ۲۱ سانتی متر هیدروژن را در یک گاز میان ستاره ای که دمای آن ۱۰۰ درجه کلوین است حساب کنید.

پ: سرعت متوسط v_{rms} را برای اتم های سدیم در اتمسفر خورشید که دمای آن حدود ۶۰۰۰ درجه کلوین است حساب کنید. هم چنین میزان پهن شدگی دوپلری خط طیفی سدیم را که طول موج آن ۵۷۰۰ آنگستروم است حساب کنید.

■ گازی از مولکولهای به جرم m را در دمای T در نظر بگیرید. در دیواره ظرف سوراخ کوچکی وجود دارد که مولکول ها از آن فرار می کنند. سرعت متوسط و محتمل ترین سرعت این مولکولها را حساب کنید.

■ ظرفی را در نظر بگیرید که مقداری مایع جیوه در آن ریخته شده است. مایع جیوه البته ظرف را پر نکرده است. سوراخ کوچکی به مساحت $10^{-7}m^2$ در بالای ظرف قرار دارد. ظرف جیوه را در یک محیط تقریبا خلاء و در دمای ۲۷۳ درجه کلوین نگهداری می کنیم. پس از ۳۰ روز متوجه می شویم که وزن ظرف به اندازه $2.4 \times 10^{-5}\ kg$ سبک شده است. فشار بخار جیوه ی درون ظرف را تخمین بزنید.

■ یک فضانورد برای پیاده روی در فضا از سفینه اش خارج می شود. فشار درون لباس فضانوردی او به مقدار یک اتمسفر تنظیم شده است. اما در اثر برخورد با یک دانه کوچک سرگردان در فضا در این لباس سوراخی به شعاع $1\ \mu\ m$ ایجاد می شود. حساب کنید که در اثر خروج گاز از لباس این فضانورد، چه نیرویی را حس خواهد کرد.

■ نشان دهید که در یک ظرف به حجم V که روزنه کوچکی به مساحت A در دیواره آن قرار دارد، فشار به صورت زیر با زمان تغییر می کند:

$$P(t) = P(0)e^{-t/\tau}, \quad (۵۶)$$

که در آن

$$\tau = \frac{V}{A}\sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}. \quad (۵۷)$$