

درسنامه نظریه گروه، درس هشتم : نظریه نمایش های گروه های متناهی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۵

۱ مقدمه

هدف این درس معرفی مفاهیم اصلی نظریه نمایش گروه هاست^۱. به زبان ساده منظور از نمایش دادن یک گروه آن است که به هر عضو گروه مثل g یک ماتریس مثل $D(g)$ نسبت بدهیم به نحوی که این ماتریس ها بین خود، همان جدول ضربی را داشته باشند که عناصر گروه دارند. در این درس نخست انگیزه ساختن نمایش گروه را از نظر فیزیکی بررسی می کنیم. سپس خواص اساسی نمایش ها را بررسی می کنیم. بعد از آن توجه خود را معطوف می کنیم به نمایش گروه های متناهی و تقریباً تا پایان درس خود را به این چارچوب محدود می کنیم. برای یک گروه متناهی این سوال های طبیعی وجود دارند که اصولاً چه نمایش هایی و با چه ابعادی وجود دارند؟ و این نمایش ها را به طور سیستماتیک چگونه می سازند؟ به همه این سوال ها پاسخ می دهیم و مثالهای متعددی نیز ارائه می دهیم. در پایان درس به طور اختصار به نمایش گروه های لی اشاره می کنیم. دلیل این اختصار رابطه ی ساده و بنیادینی است که بین ساختار گروه و جبرلی آن وجود دارد، یعنی این که هر عضو گروه مثل g به صورت $g = e^{\theta^i T_i}$ قابل نوشتن است که در آن T_i ها یک جبر لی تشکیل می دهند. این رابطه ساده به ما اجازه می دهد که از طریق مطالعه ساختمان جبر، ساختمان گروه لی را بفهمیم و این کاری است که در درسهای آینده انجام می دهیم. این

^۱Representation Theory of Groups

رابطه ساده هم چنین اجازه می دهد که نمایش های گروه را نیز از طریق نمایش های جبر بدست آوریم. به همین دلیل نمایش جبرهای لی که پایان بخش این درس در نظریه گروه و جبرلی است تنها در درس پایانی ارایه خواهد شد.

۲ چرا در فیزیک به نمایش گروه ها نیاز داریم؟

یک گروه مثل گروه دوره ای $G := \{e, a, a^2, a^3\}$ در نظر بگیرید. این گروه، زیرگروهی از تقارن های شکلی مثل یک گل چهاربرگی است (شکل ۴).

در این گروه a در واقع نشان دهنده یک دوران به اندازه زاویه 90° درجه است و طبیعی است که این دوران شکل را دست نخورده باقی می گذارد.

هرگاه بخواهیم این گل به طور دقیق توصیف کنیم می بایست از مفاهیم مکانیک کوانتومی استفاده کنیم و به این نکته توجه کنیم که حالت این گل توسط یک بردار در یک فضای هیلبرت V نشان داده می شود. بعد این فضای هیلبرت بستگی به درجات آزادی ای دارد که برای توصیف گل بکار می بریم و این به نوبه خود بستگی به این دارد که ما می خواهیم توصیف مان از گل چقدر دقیق باشد. البته ماهیچگاه برای توصیف ماکروسکوپی یک گل از مکانیک کوانتومی استفاده نمی کنیم ولی این مثال به ما کمک می کند که موضوع نمایش گروه را بفهمیم زیرا در طبیعت دنیای اتم ها و ذرات نیز مثل همین گل دارای تقارن هایی هستند و ما برای توصیف آنها مجبوریم از مکانیک کوانتومی استفاده کنیم. فرض کنید که حالت یک گل را در فضای هیلبرت V با $|\psi\rangle$ نشان دهیم. قبل از هر کاری ما باید بتوانیم بگوییم که عمل تقارنی ما حالت گل را به چه حالتی تبدیل می کند. در واقع باید بفهمیم که چه عملگری باید روی حالت گل اثر بدهیم تا حالت گل چرخش یافته بدست آید؟ ما واقعاً نمی دانیم که چرخش یگ گل به اندازه زاویه 90° درجه در فضای سه بعدی ملموس متناظر با چه عملی در فضای هیلبرت مجردی است که حالت کوانتومی گل را توصیف می کند. تنها می دانیم که مناسب است اگر این عمل a را با یک عملگر خطی $U(a) : V \rightarrow V$ نشان دهیم که حالت $|\psi\rangle$ گل را به حالت $U(a)|\psi\rangle$ تبدیل می کند. انتظار داریم که اندازه بردار حالت همچنان یک باقی بماند بنابراین تقاضا می کنیم که $U(a)$ یک عملگر یکانی باشد.

حال از این شهود استفاده می کنیم که اگر گل رایک بار به اندازه 90° درجه و پس از آن به اندازه 90° درجه بچرخانیم مثل آن است که آن را به اندازه 180° درجه چرخانده باشیم. یعنی حاصل عمل a و پس از آن a عمل a^2h است. در نتیجه تقاضا می کنیم که این شرط روی عملگرهایی نیز که نمایش دهنده چرخش حالت گل باشند نمود پیدا کند یعنی اینکه

$$U(a)U(a) = U(a^2). \quad (1)$$

در حالت کلی تر اگر بخواهیم راجع به اثر یک گروه $G = \{e, g, g', g'', \dots\}$ روی حالت یک شیء کوانتومی صحبت کنیم می بایست به هر عضو $g \in G$ عملگری یکانی مثل $U(g) : V \rightarrow V$ نسبت دهیم که روی فضای هیلبرت مربوط به آن شیء کوانتومی عمل می کند و دارای این شرط مهم است که

$$U(g)U(g') = U(gg'). \quad (2)$$

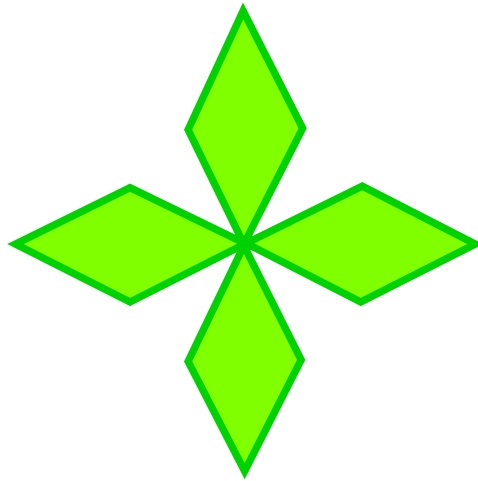
در چنین صورتی می گوئیم که گروه راروی فضای هیلبرت نمایش داده ایم. هرگاه برای فضای هیلبرت V پایه این انتخاب کنیم، عملگر $U(g)$ تبدیل به یک ماتریس یکانی مربعی می شود. بنابراین می توان نمایش دادن یک گروه را به معنای نسبت دادن ماتریس ها به عناصر گروه نیز در نظر گرفت به طوری که ضرب ماتریس ها از همان قاعده ضرب گروه پیروی کند. بعد از این مقدمه به تعریف دقیق نمایش می رسیم. قبل از آن به تعریف یک اصطلاح احتیاج داریم.

■ **تعریف:** هرگاه V یک فضای برداری باشد، مجموعه تمام عملگرهای خطی وارون پذیر از V به V را با $End(V)$ نمایش می دهیم.^۲ این مجموعه یک فضای برداری است زیرا اگر A و B دو عملگر خطی و α یک عدد حقیقی یا مختلط دلخواه باشد، آنگاه $\alpha A + B$ نیز یک عملگر خطی است. هم چنین این مجموعه نسبت به ضرب دو عملگر خطی نیز یک گروه است. ضرب دو عملگر خطی به معنای عمل متوالی آنهاست یعنی $(AB)(x) = A(B(x))$.

■ **تعریف:** هرگاه G یک گروه و V یک فضای برداری باشد، نگاشت $D : G \rightarrow End(V)$ را یک نمایش^۳ می خوانیم هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

^۲ این نماد از کلمه *Endomorphism* به معنای نگاشت خطی وارون پذیر استخراج شده است.

^۳ Representation



شکل ۱: یک گل چهاربرگی که گروه دوره ای G زیرگروهی از تقارن های آن است.

$$D(g)D(g') = D(gg'). \quad (۳)$$

به عبارت دیگر D یک همسانی از G به $End(V)$ است.

■ **تعریف:** بعد فضای برداری V را بعد نمایش ^۴ می خوانیم. هرگاه فضای برداری بعد متناهی داشته باشد، نمایش را متناهی ^۵ و هرگاه فضای برداری بعد نامتناهی داشته باشد نمایش را بی نهایت بعدی ^۶ می خوانیم. هرگاه به ازای هر g ، $D(g)$ یک عملگریکانی باشد، نمایش را یکانی می خوانیم. در این شرایط لازم است که فضای برداری V مجهز به یک ضرب داخلی باشد. برای نمایش یکانی معمولاً از حرف U بجای D استفاده می کنیم. همینجا تذکری دهیم که ممکن است که یک گروه تنها نمایش هایی با بعدهای مشخص داشته باشد.

نتیجه ها: از تعریف بالا نتیجه می شود که

$$D(e) = I$$

Dimension of Representation^۴

Finite Dimensional Representation^۵

Infinite Dimensional Representation^۶

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1}. \quad (4)$$

■ تعریف: نمایش یکانی^۷ نمایشی است که در آن

$$(U(g))^\dagger = (U(g))^{-1}, \quad \rightarrow \quad (U(g))^\dagger = U(g^{-1}). \quad (5)$$

به عبارت بهتر در یک نمایش یکانی عملگرهای $U(g)$ عملگرهای یکانی هستند. در واقع هرگاه فضای V یک ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ داشته باشد، نمایش یکانی نمایشی است که ضرب داخلی را حفظ کند، یعنی

$$\langle U(g)x, U(g)y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall g \in G, \quad x, y \in V. \quad (6)$$

۳ مثال های ساده ای از نمایش

■ مثال ۱: فرض کنید که G گروه دوری $G = \{e, a, a^2\}$ است. D_1 یک نمایش یک بعدی برای این گروه است.

$$D_1(e) = 1, \quad D_1(a) := e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad D_1(a^2) := e^{\frac{4\pi i}{3}}. \quad (7)$$

■ مثال ۲: G راهمان گروه مثال ۱ می گیریم. D_2 یک نمایش سه بعدی از این گروه است:

$$D_2(e) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2(a^2) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

■ مثال ۳: G را گروه دوری $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ بگیرید. در این صورت یک نمایش یک بعدی برای این گروه عبارت است از:

$$D_1(a^k) = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

دقت کنید که چون گروه دوری است و تنها شرطی که دارد آن است که $a^n = e$ است تنها می بایست ماتریسی پیدامی کردیم که در شرط $D(a)^n = 1$ صدق می کرد که این شرط با ماتریس یک بعدی $D_1(a) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ برآورده شد. یک نمایش n بعدی از همین گروه به صورت زیرساخته می شود: یک فضای n بعدی با بردارهای پایه $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle\}$ در نظر می گیریم. آنگاه ماتریس S را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S|i\rangle = |i+1\rangle \quad (10)$$

که در آن عمل جمع به سنج n انجام می شود. واضح است که $S^n|i\rangle = |i\rangle$. بنابراین $S^n = I$. در نتیجه یک نمایش n بعدی به شکل زیر داریم:

$$D_2(e) = I, \quad D_2(a) = S, \quad D_2(a^2) = S^2, \dots \quad (11)$$

■ مثال ۴: راه گروه دلخواه و V رانیز فضای اعداد حقیقی بگیرد. در این صورت همواره یک نمایش بدیهی A یک بعدی وجود دارد که در آن

$$D(g) = 1, \quad \forall g \in G. \quad (12)$$

■ مثال ۵: G را گروه جایگشت S_n در نظر بگیرید. در این صورت یک نمایش یک بعدی به صورت زیر است:

$$D(g) = 1, \quad \text{اگر } g \text{ یک جایگشت زوج باشد}$$

$$D(g) = -1, \quad \text{اگر } g \text{ یک جایگشت فرد باشد} \quad (13)$$

■ مثال ۶: ضرب تانسوری نمایش ها^۱: هرگاه $D_1 : G \rightarrow \text{End}(V)$ و $D_2 : G \rightarrow \text{End}(W)$ دو نمایش باشند می توان نمایش $D_1 \otimes D_2$ به صورت زیر ساخت:

$$(D_1 \otimes D_2)(g) := D_1(g) \otimes D_2(g). \quad (14)$$

برخواننده است که نمایش بودن $D_1 \otimes D_2$ را تحقیق کند.

^A Trivial Representation

^۱ Tensor or (direct) product of representations

مثال ۷: هرگاه $D : G \rightarrow \text{End}(V)$ یک نمایش باشد، همواره می توان نمایش یک بعدی $D_0 : G \rightarrow R$ را به صورت زیر ساخت:

$$D_0(g) := \det(D(g)), \quad (15)$$

که در آن $\det(D(g))$ دترمینان ماتریس $D(g)$ است.

■ **قضیه:** هرگاه $D : G \rightarrow \text{End}(V)$ یک نمایش و $S \in \text{End}(V)$ یک تبدیل خطی وارون پذیر باشد آنگاه $D' := SDS^{-1}$ نیز یک نمایش است.

اثبات:

$$D'(g_1)D'(g_2) = (SD(g_1)S^{-1})(SD(g_2)S^{-1}) = S(D(g_1)D(g_2))S^{-1} = SD(g_1g_2)S^{-1} = D'(g_1g_2). \quad (16)$$

■ **تعریف:** هرگاه برای دو نمایش D و D' یک تبدیل $S \in \text{End}(V)$ وجود داشته باشد به قسمی که برای تمام g ها داشته باشیم $D'(g) = SD(g)S^{-1}$ ، آن دو نمایش معادل^۱ خوانده می شوند. دو نمایشی که چنین نباشند نمایش های غیرمعادل خوانده می شوند.

■ **مثال:** برای گروه $Z_2 = \{e, a\}$ می توان دو نمایش دوبعدی زیر را در نظر گرفت:

$$D_1(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

و

^۱Equivalent Representations

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

این دونمایش معادلند. زیرا

$$D_2(g) = SD_1(g)S^{-1}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

■ **تعریف:** هرگاه $D : G \rightarrow \text{End}(V)$ یک نمایش از گروه G روی فضای مختلط V باشد، نمایش مزدوج^{۱۱} آن را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$D^*(g) := D(g^{-1})^\dagger. \quad (20)$$

واضح است که اگر D نمایش باشد، D^* نیزیک نمایش است، زیرا

$$\begin{aligned} D^*(g)D^*(g') &= D(g^{-1})^\dagger D(g'^{-1})^\dagger = (D(g'^{-1})D(g^{-1}))^\dagger \\ &= D(g'^{-1}g^{-1})^\dagger = D((gg')^{-1})^\dagger = D^*(gg') \end{aligned} \quad (21)$$

■ **تعریف:** فرض کنید که V و W دوفضای به ترتیب m بعدی و n بعدی باشند جمع مستقیم^{۱۲} این دوفضا به شکل زیر تعریف می شود.

$$V \oplus W := \left\{ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, | v \in V, w \in W \right\}. \quad (22)$$

جمع دوبردارو ضرب یک برداردریک اسکالر به شکل زیرتعریف می شود:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + v' \\ w + w' \end{pmatrix},$$

^{۱۱} Contragradient Representation

^{۱۲} Direct Sum

$$\alpha \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha w \end{pmatrix}. \quad (23)$$

برخواننده است که تحقیق کند $V \oplus W$ با جمع و ضرب تعریف شده در بالا واقعاً یک فضای برداری $m+n$ بعدی است.

به عنوان مثال خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که $R^3 = R^2 \oplus R$.

حال دسته ای از تبدیلات خطی روی $V \oplus W$ وجود دارند که به شکل زیر هستند:

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (24)$$

این نوع تبدیلات خطی در واقع روی فضای V مثل تبدیل خطی A و روی فضای W مثل تبدیل خطی B عمل می کنند. به همین جهت بهتر است که آنها را با $A \oplus B$ نشان دهیم. رابطه (24) نشان می دهد که اگر برای فضای برداری V و W پایه انتخاب کنیم و تبدیلات روی آنها را با ماتریس نشان دهیم، ماتریس تبدیل T بصورت بلوکه قطری در خواهد آمد. البته همه تبدیلات روی فضای $V \oplus W$ به صورت (24) نیستند.

حال فرض کنید که از یک گروه دو نمایش $D_1 : G \rightarrow \text{End}(V)$ و $D_2 : G \rightarrow \text{End}(W)$ داشته باشیم. آنگاه از این دونمایش همواره می توان یک نمایش با بعد بزرگ تر به ترتیب بدیهی زیر ساخت:

$$(D_1 \oplus D_2) : G \rightarrow \text{End}(V \oplus W), \quad (D_1 \oplus D_2)(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

این نمایش را جمع مستقیم^{۱۳} دو نمایش می خوانند. مسلم است که با این کار همواره می توان از نمایش های با بعد کوچک تر نمایش هایی با بعد بزرگتر ساخت. اما بهتر است که نمایش های این چینی را از نمایش هایی که اصالتاً بعد بزرگتری دارند جدا کرد. به همین دلیل است که نمایش های کاهش ناپذیر را تعریف می کنیم.

^{۱۳} Direct sum of representations

■ **تعریف نمایش های کاهش پذیر و کاهش ناپذیر:** نمایش $D : G \rightarrow V$ کاهش پذیر^{۱۴} است هرگاه بتوان فضای V را به صورت جمع مستقیم دوفضا نوشت ، $V = V_1 \oplus V_2$ به نحوی که به ازای هر g ، $D(g)$ بردارهای V_1 را به V_1 و بردارهای V_2 را به V_2 بنگارد. در چنین حالتی اصطلاحاً می گوییم که فضای برداری V دو زیر فضا دارد که تحت نمایش D از گروه G ناوردا هستند.^{۱۵}

معنای این حرف آن است که در یک پایه مناسب تمام $D(g)$ ها به صورت بلوکه قطری (25) درمی آیند. ممکن است ظاهر اولیه $D(g)$ ها بلوکه قطری نباشد ولی بتوان با انتخاب پایه مناسب یعنی بایک تبدیل تشابهی آنها را بلوکه قطری کرد. بنابراین نمایشی که نتوان در هیچ پایه ای آن را به صورت بلوکه قطری نوشت ، نمایش کاهش ناپذیر^{۱۶} خوانده می شود.

■ **مثال:** برای گروه دوری $Z_2 := \{e, a\}$ دونهمایش یک بعدی می توانیم تعریف کنیم: نمایش

$$D_0(e) = 1, \quad D_0(a) = 1, \quad (26)$$

و نمایش

$$D_1(e) = 1, \quad D_1(a) = -1. \quad (27)$$

هم چنین می توانیم یک نمایش دوبعدی به صورت زیر تعریف کنیم:

$$D_2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

^{۱۴} Reducible

^{۱۵} Invariant Subspace

^{۱۶} Irreducible

اما این نمایش یک نمایش کاهش پذیر است زیرا با تبدیل تشابهی

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$SD_2(e)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad SD_2(a)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

که به این معناست که

$$D_2(g) = D_0(g) \oplus D_1(g) \quad \forall g. \quad (30)$$

۴ کاراکترهای یک نمایش

فرض کنید که D یک نمایش از گروه G است. کلاس های تزویجی این گروه را C_1, C_2, \dots, C_K نمایش می دهیم. کاراکتر i ام نمایش D که آن را با χ_i نمایش می دهیم عبارت است از:

$$\chi_i := tr(D(g)) \quad g \in C_i \quad (31)$$

این که کاراکتر^{۱۷} به یک کلاس و نه به اعضای آن بستگی دارد به این دلیل است که هر دو عضو یک کلاس تزویجی مثل

$x, y \in C_i$ در رابطه $y = g^{-1}xg$ برای یک $g \in G$ صدق می کنند و

$$tr(D(y)) = tr(D(gxg^{-1})) = tr(D(g)D(x)D(g)^{-1}) = tr(D(x)). \quad (32)$$

^{۱۷}Character

در این درس خواهیم دید که کاراکترها نقش مهمی در نظریه نمایش گروه های منتهای بازی می کنند. در این جا به یک قضیه مهم می پردازیم. این قضیه بیان می کند هرگاه فضای V یک ضرب داخلی باشد همواره نمایش یک گروه منتهای یکانی خواهد بود. به عبارت بهتر بایک تغییر پایه مناسب تمام ماتریس های نمایش را می توان تبدیل به ماتریس های یکانی کرد.

■ قضیه: : هر نمایش گروه منتهای با یک نمایش یکانی معادل است.

اثبات: فرض کنید که فضای V که نمایش روی آن تعریف شده است دارای ضرب داخلی $(,)$ باشد. نخست یک ضرب داخلی جدید تعریف می کنیم با نماد زیر:

$$\{x, y\} := \sum_g (D(g)x, D(g)y)$$

با این ضرب داخلی جدید خاصیت زیر برقرار است :

$$\{D(g)x, D(g)y\} = \{x, y\}$$

حال فرض کنید که e_i ها پایه متعامد نسبت به ضرب داخلی $(,)$ و f_i ها پایه متعامد نسبت به ضرب داخلی $\{, \}$ باشند. عملگر خطی S را چنان تعریف می کنیم که پایه $\{e_i\}$ را به پایه $\{f_i\}$ بنگارد:

$$Se_i = f_i$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\{Sx, Sy\} = \{S(x_i e_i), S(y_j e_j)\} = x_i y_j \{f_i, f_j\} = x_i y_i = (x, y)$$

بنابراین یافتیم که برای هر x, y رابطه زیر برقرار است:

$$(x, y) = \{Sx, Sy\} \quad \{x, y\} = (S^{-1}x, S^{-1}y)$$

حال کافی است که قرار دهیم $\hat{D}(g) := S^{-1}D(g)S$:
 با این تعریف خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} (\hat{D}(g)x, \hat{D}(g)y) &= (S^{-1}D(g)Sx, S^{-1}D(g)Sy) \\ &= \{D(g)Sx, D(g)Sy\} = \{Sx, Sy\} = (x, y) \end{aligned}$$

بنا براین نشان دادیم که نمایش \hat{D} یکانی است.

■ یک قضیه ساده در مورد ماتریس ها: اگر ماتریس M با ماتریس یکانی U جابجا شود آنگاه ماتریس های هرمیتی

$$M_+ := M + M^\dagger, \quad M_- := i(M - M^\dagger) \quad (۳۳)$$

نیز با U جابجایی شود. اثبات این قضیه به عهده خواننده است.

۵ لم های شور

تقریباً تمام نظریه نمایش گروه های منتهای بر مبنای دو قضیه یا لم از شور^{۱۸} بنا شده است که اکنون به بیان و اثبات آنها می پردازیم:

■ لم اول شور: اگر D نمایش کاهش ناپذیر یک گروه منتهای G باشد و یک ماتریس M با همه $D(g)$ ها جابجا شود آنگاه M حتماً مضربی از ماتریس واحد است.

^{۱۸}Schur's Lemma

اثبات: از قضیه (؟؟) می دانیم که نمایش D یکانی است. هم چنین از قضیه قبلی می دانیم که ماتریس هرمیتی M_+ با همه $D(g)$ ها جابجا می شود:

$$[D(g), M_+] = 0 \quad \forall g \in G. \quad (34)$$

از آنجا که ماتریس M_+ هرمیتی است ویژه بردارهای آن یک پایه برای فضای نمایش می سازند. داریم:

$$M_+ |v_n^{(i)}\rangle = \lambda_n |v_n^{(i)}\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, q_n \quad (35)$$

که در آن i شاخصی است که واگنی ویژه مقدار را می شمارد و از یک تا q_n طی می شود. حال از رابطه (34) نتیجه می گیریم که

$$M_+(D(g)|v_n^{(i)}\rangle) = D(g)(M_+|v_n^{(i)}\rangle) = D(g)(\lambda_n |v_n^{(i)}\rangle) = \lambda_n (D(g)|v_n^{(i)}\rangle) \quad i = 1, 2, \dots, q_n \quad (36)$$

این رابطه به این معناست که بردارهای $D(g)|v_n^{(i)}\rangle$ نیز در زیر فضای مربوط به ویژه مقدار λ_n قرار دارند و بنابراین بسط آنها تنها شامل بردارهای پایه $|v_n^{(i)}\rangle$ است. در نتیجه هر کدام از ماتریس های $D(g)$ شکلی مثل زیر دارند:

$$D(g) = \begin{bmatrix} D_1(g) & & & \\ & D_2(g) & & \\ & & D_3(g) & \\ & & & \dots \end{bmatrix} \quad (37)$$

که در آن $D_1(g)$ یک ماتریس q_1 بعدی، $D_2(g)$ یک ماتریس q_2 بعدی است والی آخر. باید دقت کنیم که این وضعیت برای همه $D(g)$ ها و نه فقط یکی از آنها برقرار است. از طرفی فرض کرده ایم که نمایش D کاهش ناپذیر است که به این معناست که ماتریس های $D(g)$ تنها یک بلوک قطری دارند و نه چند تا. اما این امر به این معناست که ماتریس M_+ تنها یک ویژه مقدار دارد که درجه واگنی آن با بعد کل فضا برابر است و این چیزی نیست جز اینکه ماتریس M_+ متناسب با ماتریس واحد است. این استدلال را برای M_- نیز می توان تکرار کرد و از آنجا نتیجه می گیریم که M متناسب با ماتریس واحد است.

■ **لم دوم شور:** اگر D و D' دو نمایش کاهش پذیر به ترتیب با ابعاد d و d' باشند و یک ماتریس $d \times d'$ بعدی M وجود داشته باشد که در رابطه

$$D(g) M = M D'(g) \quad \forall g \in G \quad (38)$$

صدق کند، در این صورت اگر بعد های d و d' با هم متفاوت باشند، M برابر با صفر و اگر با هم مساوی باشند، M ماتریسی وارون پذیر است. به زبان دیگر این قضیه بیان می کند که رابطه ی ۳۸ برای دو نمایش کاهش ناپذیر غیر هم بعد نمی تواند وجود داشته باشد (مگر اینکه M را برابر با صفر قرار دهیم که در این صورت به طور بدیهی این رابطه برقرار است. هم چنین اگر برای دو نمایش کاهش ناپذیر هم بعد این رابطه برقرار بود، آنگاه حتماً این دو نمایش معادلند. دقت کنید که این رابطه نمی گوید که در یک بعد نمی توانیم دو یا چند نمایش کاهش ناپذیر متفاوت داشته باشیم. در واقع برای بسیاری از گروه ها در یک بعد معین می توانیم نمایش های متعددی داشته باشیم که همه با هم غیر معادل باشند. لم دوم شور می گوید که برای چنین نمایش هایی هرگز یک ماتریس مثل M پیدا نخواهیم کرد که رابطه بالا برقرار باشد.

اثبات: فضای برداری نمایش D را با V و بردارهای پایه V را با $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_d\rangle\}$ نشان می دهیم.

می دانیم که

$$D(g)|v_j\rangle = \sum_{k=1}^d (D(g))_{kj} |v_k\rangle. \quad (39)$$

حال بردارهای زیر را در همان فضا تشکیل می دهیم:

$$|\psi_k\rangle = \sum_{j=1}^d M_{jk} |v_j\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, d', \quad (40)$$

و S رازیرفضایی از V می گیریم که توسط این بردارها جاروب می شود.

روی هر بردار $|\psi_k\rangle$ $D(g)$ را اثر می دهیم :

$$\begin{aligned}
D(g)|\psi_k\rangle &= \sum_{j=1}^d M_{jk}D(g)|v_j\rangle = \sum_{j,l=1}^d M_{jk}(D(g))_{lj}|v_l\rangle \\
&= \sum_{l=1}^d (D(g)M)_{lk}|v_l\rangle = \sum_{l=1}^d (MD'(g))_{lk}|v_l\rangle \\
&= \sum_{l,i=1}^d M_{li}D'(g)_{ik}|v_l\rangle = \sum_{i=1}^d D'(g)_{ik}|\psi_i\rangle
\end{aligned} \tag{41}$$

این رابطه نشان می دهد که اثر $D(g)$ روی هر کدام از بردارهای زیرفضای S بازهم ترکیب خطی از بردارهای زیرفضای S است. بنابراین S یک زیرفضای ناورد تحت نمایش D است. اما چون D یک نمایش کاهش ناپذیر است، این زیرفضا یا تهی است یا تمام V است. اگر S تهی باشد خواهیم داشت $|\psi_k\rangle = 0 \quad \forall k$ که نتیجه اش آن است که $M = 0$. اما اگر S تمام V باشد دو حالت وجود دارد. یا بردارهای $\{\psi_k\}$ مستقل خطی اند که در نتیجه آن $d = d'$ و $\det(M) \neq 0$. یا اینکه بردارهای $\{\psi_k\}$ مستقل خطی نیستند. این حالت فقط در صورتی ممکن است که $d' > d$.

پس تاکنون بدست آوردیم که

$$M = 0 \quad \text{or} \quad (d' = d \quad \text{or} \quad \det(M) \neq 0) \quad \text{or} \quad d' > d. \tag{42}$$

اما می توانیم رابطه (38) را به شکل زیربازنویسی می کنیم:

$$\tilde{D}'(g)M^t = M^t\tilde{D}(g), \tag{43}$$

که در آن $\tilde{D}(g) = ((D(g))^t)^{-1}$ و علامت t به معنای ترانپوز است. اگر نمایش های D و D' کاهش ناپذیر باشند، نمایش های \tilde{D} و \tilde{D}' نیز کاهش ناپذیرند. حال استدلال بالا را تکرار می کنیم و نتیجه می گیریم که

$$M = 0 \quad \text{یا} \quad (d = d' \quad \text{و} \quad \det(M) \neq 0) \quad \text{یا} \quad d > d'. \tag{44}$$

وجه مشترک نتایج (44) و (42) که بدست آورده ایم آن است که

$$M = 0 \quad \text{یا} \quad (d = d', \quad \text{و} \quad \det(M) \neq 0). \tag{45}$$

اثبات لم دوم شور در اینجا کامل می شود.

۶ استفاده از لم های شور

در اینجا بهتراست برای تمامی این درس نمادگذاری خود را مشخص کنیم. تامل بر سر این نامگذاری در اینجا فهم مطالب آینده درس را آسان خواهد کرد. این نامگذاری در جدول زیر آمده است.

تعداد نمایش های کاهش ناپذیر	N
تعداد کلاس های تزویجی	K
نمایش کاهش ناپذیر μ	D^μ
بعد نمایش کاهش ناپذیر μ	n^μ
کلاس تزویجی i	C_i
تعداد اعضای کلاس تزویجی i	$ C_i $
کاراکتریک نمایش در کلاس i	χ_i
کاراکتر نمایش کاهش ناپذیر μ برای کلاس i	χ_i^μ

(۴۶)

حال از لم اول شور استفاده می کنیم و ماتریس زیر را تعریف می کنیم.

$$M_i^\nu := \sum_{x \in C_i} D^\nu(x) \quad (۴۷)$$

براحتی ثابت می شود که این ماتریس دارای خاصیت زیر است:

$$M_i^\nu D^\nu(g) = D^\nu(g) M_i^\nu \quad (۴۸)$$

اثبات این رابطه چنین است:

$$\begin{aligned} M_i^\nu D^\nu(g) &= \sum_{x \in C_i} D^\nu(x) D^\nu(g) = \sum_{x \in C_i} D^\nu(xg) = \sum_{x \in C_i} D^\nu(g) D^\nu(g^{-1}xg) \\ &= D^\nu(g) \sum_{x' \in C_i} D^\nu(x') = D^\nu(g) M_i^\nu. \end{aligned} \quad (49)$$

بنابراین بنابراین اول شور این ماتریس متناسب با ماتریس واحد است. یعنی

$$M_i^\nu = A_i^\nu I \quad (50)$$

که در آن A_i^ν یک عدد ثابت است که باید محاسبه شود. برای محاسبه آن رد دوطرف را محاسبه می کنیم. نخست توجه می کنیم که

$$\text{tr}(M_i^\nu) = |C_i| \chi_i^\nu \quad (51)$$

باتوجه به این که در رابطه بالا $\text{tr}(I) = n^\nu$ بدست می آوریم که $A_i^\nu = \frac{|C_i| \chi_i^\nu}{n^\nu}$. در نتیجه خواهیم داشت :

$$\sum_{x \in C_i} D^\nu(x) = \frac{|C_i| \chi_i^\nu}{n^\nu} I \quad (52)$$

این رابطه یکی از روابط اساسی است که در آینده از آن استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید که D^ν و D^μ دو نمایش کاهش ناپذیر و X یک ماتریس دلخواه باشد تنها با این شرط که ضرب ماتریسی زیر قابل تعریف باشد. ماتریس زیرادرنظرمی گیریم:

$$M := \sum_{g \in G} D^\nu(g) X D^\mu(g^{-1}), \quad (53)$$

براحتی ثابت می شود که این ماتریس در رابطه زیر صدق می کند:

$$M D^\mu(h) = D^\nu(h) M. \quad (54)$$

هرگاه $\mu = \nu$ ، بنابراین اول شور بدست می آوریم که M متناسب با ماتریس واحد است و هرگاه که $\mu \neq \nu$ با توجه به آنکه این شاخص ها برای نمایش های کاهش ناپذیر غیر معادل بکار می بریم نتیجه می گیریم که $M = 0$. بنابراین نتیجه می گیریم که

$$\sum_{g \in G} D^\nu(g) X D^\mu(g^{-1}) = \delta^{\mu\nu} C_\mu(X) I, \quad (55)$$

که در آن I ماتریس واحد و $C_\mu(X)$ عددی است که به ماتریس X بستگی دارد. برای اینکه ثابت $C_\mu(X)$ را به دست آوریم قرار می دهیم $\mu = \nu$ و از طرفین ردّ می گیریم:

$$|G| \text{tr}(X) = C_\mu(X) n^\mu, \quad \rightarrow \quad C_\mu(X) = \frac{|G| \text{tr}(X)}{n^\mu}. \quad (56)$$

حال ماتریس X را برابر با E_{ij} می گیریم. در نتیجه رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$\sum_{g \in G} D^\nu(g) E_{ij} D^\mu(g^{-1}) = \delta^{\mu\nu} \frac{|G|}{n^\mu} \delta_{ij} I, \quad (57)$$

و یا پس از محاسبه درایه mn از طرفین

$$\sum_{g \in G} D_{mi}^\nu(g) D_{nj}^{\mu*}(g) = \frac{|G|}{n_\nu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{mn}. \quad (58)$$

روابط (58) و (52) روابط اساسی ای هستند که نتایج مهم و جالبی از آنها استخراج خواهد شد و نظریه نمایش بر مبنای این نتایج ساخته خواهد شد.

■ نتیجه ۱: به ازای هر سه شاخص m, i, ν یک بردار $|G|$ بعدی به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$|D_{mi}^\nu\rangle := \sqrt{\frac{n_\nu}{|G|}} \begin{pmatrix} D_{mi}^\nu(g_1), \\ D_{mi}^\nu(g_2), \\ \dots \\ D_{mi}^\nu(g_{|G|}) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

می توان از نمادگذاری دیراک استفاده کرد و به ازای هر عضو g گروه یک بردار برا به شکل $|g\rangle$ تعریف کرد. در این صورت خواهیم داشت:

$$D_{ij}^\mu(g) = \langle g | D_{ij}^\mu \rangle. \quad (60)$$

رابطه (58) در واقع بیان می کند که تمام بردارهای از نوع فوق برهم عمودند یعنی

$$\langle D_{nj}^\mu | D_{mi}^\nu \rangle = \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{mn}. \quad (61)$$

از آنجا که در یک فضای برداری تعداد بردارهای متعامد نمی تواند از بعد فضا بیشتر باشد نتیجه می گیریم که

$$\sum_{\nu} n_{\nu}^2 \leq |G|. \quad (62)$$

بنابراین یک قید مهم روی تعداد وهم چنین بعد نمایش های کاهش ناپذیر یک گروه متناهی بدست می آوریم.

■ نتیجه ۲: در رابطه (58) قرار می دهیم $i = m$ و $j = n$ و روی هر دو شاخص i, j جمع می بندیم. بدست می آوریم:

$$\sum_{g \in G} \text{tr}(D^\nu(g)) \text{tr}(D^\mu(g))^* = |G| \delta^{\mu\nu}, \quad (63)$$

یا

$$\sum_{i=1}^K |C_i| \chi_i^\nu \chi_i^{\mu*} = |G| \delta^{\mu\nu}. \quad (64)$$

حال اگر به ازای هر μ یک بردار K بعدی به شکل زیر تعریف کنیم

$$|\chi^\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|C_1|} \chi_1^\nu \\ \sqrt{|C_2|} \chi_2^\nu \\ \dots \\ \sqrt{|C_K|} \chi_K^\nu \end{pmatrix}, \quad (65)$$

رابطه (??) بیان می کند که این بردارها نیز برهم عمودند یعنی

$$\langle \chi^\mu | \chi^\nu \rangle = \delta^{\mu,\nu}. \quad (66)$$

می توان بازهم از نمادگذاری دیراک استفاده کرد و به ازای هر کلاس C_i گروه یک بردار برا به شکل $|i\rangle$ تعریف کرد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\chi_i^\mu = \langle i | \chi^\mu \rangle. \quad (67)$$

از آنجا که در یک فضای برداری تعداد بردارهای متعامد نمی تواند از بعد فضا بیشتر باشد، رابطه تعامد بالا لازم می دارد که تعداد نمایش های کاهش ناپذیر از تعداد کلاس های تزویجی کمتری مساوی با آن باشد یعنی

$$N \leq K. \quad (68)$$

■ نتیجه ۳ (طرز تجزیه یک نمایش به نمایش های کاهش ناپذیر): فرض کنید که نمایش کاهش پذیر D داده شده است.

می خواهیم این نمایش را به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه کنیم. می نویسیم

$$D(g) = \bigoplus_{\mu=1}^N a_\mu D^\mu(g) \quad \forall g \in G. \quad (69)$$

عبارت فوق بیان می کند که در یک پایه مناسب هر ماتریس $D(g)$ به صورت بلوکه قطری درآمده است و a_μ نسخه از هر ماتریس $D^\mu(g)$ روی بلوک های قطری خود دارد. اگر ردّ چنین ماتریسی را برای یک $g \in C_i$ حساب کنیم بدست می

آوریم:

$$\chi_i = \sum_{\mu=1}^N a_{\mu} \chi_i^{\mu} \quad (70)$$

و یا با ضرب کردن هر دو طرف در $\sqrt{\frac{|C_i|}{|G|}}$ و نوشتن همه مولفه ها به صورت برداری از نوع (65)،

$$|\chi\rangle = \sum_{\mu} a_{\mu} |\chi^{\mu}\rangle. \quad (71)$$

حال از رابطه تعامد بردارهای کاراکتر استفاده می کنیم و بدست می آوریم :

$$a_{\mu} = \langle \chi^{\mu} | \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_i |C_i| \chi_i \chi_i^{\mu*}. \quad (72)$$

بنابراین ضرایب بسط هر نمایش بر حسب نمایش های کاهش ناپذیر از رابطه بالا بدست می آید.

این رابطه درعین حال ملاک مهمی برای کاهش ناپذیر بودن یک نمایش به ما ارایه می دهد. اگر نمایش داده شده خودیکی

از نمایش های کاهش ناپذیر مثلاً نمایش D^{μ} باشد خواهیم داشت $a^{\mu} = 1$ و $a_{\nu \neq \mu} = 0$. بنابراین نتیجه زیر می رسم :

■ نتیجه ۴: یک نمایش کاهش ناپذیر است اگر فقط اگر داشته باشیم:

$$\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = |G|. \quad (73)$$

■ تمرین: نمایش زیر را از گروه $Z_4 = \{e, a, a^2, a^3 \mid a^4 = e\}$ در نظر بگیرید:

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

آیا این نمایش کاهش ناپذیر است؟

برای ساختن بقیه نظریه نمایش می بایست به یک نمایش ویژه موسوم به نمایش منظم پردازیم.

۷ نمایش منظم

برای هرگروه متناهی G یک نمایش یکتا که آن را با D^R نشان می دهیم و بعد آن بامرتبه G یعنی $|G|$ برابر است، به شکل زیر تعریف می شود. V را فضای برداری ای می گیریم که بردارهای پایه متعامد آن متناظر با عناصر گروه هستند. این بردارهای پایه را با

$$\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, \dots, |g_{|G|}\rangle\}, \quad \langle g_i | g_j \rangle := \delta_{g_i, g_j} \quad (74)$$

نشان می دهیم. حال به ازای هر $g \in G$ روی بردارهای پایه این فضا به شکل زیر اثر می کند:

$$D^R(g)|g'\rangle := |gg'\rangle, \quad \forall g, g' \in G. \quad (75)$$

براحتی معلوم می شود که D^R یک نمایش است زیرا:

$$D^R(g)D^R(h)|k\rangle = D^R(g)|hk\rangle = |g(hk)\rangle = |(gh)k\rangle = D^R(gh)|k\rangle. \quad (76)$$

کاراکترهای این نمایش براحتی قابل محاسبه اند. در واقع داریم

$$\begin{aligned} \text{tr}(D^R(h)) &= \sum_{g \in G} \langle g | D^R(h) | g \rangle = \sum_{g \in G} \langle g | hg \rangle = \sum_{g \in G} \delta_{g, hg} \\ &= \sum_{g \in G} \delta_{e, h} = |G| \delta_{e, h}. \end{aligned} \quad (77)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $\chi^R(e) = |G|$ و $\chi^R(g \neq e) = 0 \quad \forall g \in G$.

این نمایش عموماً کاهش پذیر است و می توان آن را به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه کرد

$$D^R(g) = \bigoplus_{\mu=1}^N a_{\mu}^R D^{\mu}(g) \quad \forall g \in G. \quad (78)$$

برای بدست آوردن ضرایب بسط کافی است از رابطه (72) استفاده کنیم. بدست می آوریم:

$$a_{\mu}^R = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi^R(g) \chi^{\mu}(g)^* = \frac{1}{|G|} |G| \chi^{\mu}(e)^* = n_{\mu}. \quad (79)$$

بنابراین درنمایش منظم یک گروه هرنمایش کاهش ناپذیر به تعداد بعد خود وارد می شود و رابطه (78) را می توان به صورت زیرنوشت:

$$D^R(g) = \bigoplus_{\mu=1}^N n_{\mu} D^{\mu}(g) \quad \forall g \in G, \quad (80)$$

و

$$\chi^R(g) = \sum_{\mu=1}^N n_{\mu} \chi^{\mu}(g). \quad (81)$$

نتیجه ۵:

هرگاه طرفین رابطه بالا را برای $g = e$ حساب کنیم بدست می آوریم:

$$|G| = \sum_{\mu=1}^N n_{\mu}^2. \quad (82)$$

بنابراین رابطه (62) دقیقاً به صورت یک تساوی برقراری شود. این امر به این معناست که بردارهای $|D_{ij}^{\mu}\rangle$ که در (59) تعریف شدند نه تنها متعامدند بلکه بدلیل آن که تعداد آنها با بعدشان برابر است کامل نیز هستند. یعنی

$$\sum_{ij;\mu} |D_{ij}^{\mu}\rangle \langle D_{ij}^{\mu}| = I \quad (83)$$

و یا با ضرب طرفین در $|g\rangle$ و $\langle g'|$:

و یا

$$\sum_{ij;\mu} \langle g | D_{ij}^{\mu} \rangle \langle D_{ij}^{\mu} | g' \rangle = \delta_{g,g'}. \quad (84)$$

ازاین رابطه می توانیم یک رابطه کامل بودن برای کاراکترها نیز بدست آوریم. برای این کار طرفین این رابطه را روی

$g \in C_i$ و $g' \in C_{i'}$ جمع می کنیم. بدست می آوریم:

$$\sum_{ij;\mu} \frac{n_{\mu}}{|G|} \left(\sum_{g \in C_i} D_{ij}^{\mu}(g) \right) \left(\sum_{g' \in C_{i'}} D_{ij}^{\mu}(g')^* \right) = \sum_{g \in C_i} \sum_{g' \in C_{i'}} \delta_{g,g'} \quad (85)$$

در اینجا می توانیم از رابطه (52) استفاده کنیم و رابطه بالا را تبدیل کنیم به

$$\sum_{ij;\mu} \frac{n^\mu}{|G|} \frac{|C_l|}{n_\mu} \chi_l^\mu \delta_{ij} \frac{|C_{l'}|}{n_\mu} \chi_{l'}^{\mu*} \delta_{ij} = \delta_{l,l'} |C_l|. \quad (86)$$

پس از ساده کردن این رابطه به شکل نهایی زیردرمی آید:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^N \chi_l^\nu \chi_{l'}^{\nu*} = \delta_{l,l'} \frac{|G|}{|C_l|}.} \quad (87)$$

این رابطه به این معناست که بردارهای $|\chi^\mu\rangle$ که قبلاً تعریف کردیم نه تنها برهم عمودند بلکه یک پایه کامل نیز تشکیل می دهند، یعنی رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_{\mu=1}^N |\chi^\mu\rangle \langle \chi^\mu| = I. \quad (88)$$

. بنابراین رابطه $N \leq K$ که قبلاً بدست آورده بودیم به صورت یک تساوی برقرار است یعنی

$$N = K. \quad (89)$$

یعنی تعداد نمایش های کاهش ناپذیر یک گروه متناهی دقیقاً با تعداد کلاس های تزویجی آن گروه برابر است.

۸ خلاصه

در این بخش روابطی را که بدست آورده ایم برای راحتی استفاده های بعدی یکجا گردآوری می کنیم:

$$N = K \quad (90)$$

$$\sum_{\mu=1}^N (n^\mu)^2 = |G| \quad (91)$$

$$\sum_{\mu=1}^N |\chi^\mu\rangle\langle\chi^\mu| = I \quad (92)$$

$$\langle\chi^\mu|\chi^\nu\rangle = \delta^{\mu,\nu} \quad (93)$$

$$\sum_{ij;\mu} |D_{ij}^\mu\rangle\langle D_{ij}^\mu| = I \quad (94)$$

$$\langle D_{ij}^\mu|D_{kl}^\nu\rangle = \delta^{\mu\nu}\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (95)$$

که در آن ها

$$|\chi^\nu\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|C_1|}\chi_1^\nu \\ \sqrt{|C_2|}\chi_2^\nu \\ \dots \\ \sqrt{|C_K|}\chi_K^\nu \end{pmatrix}, \quad |D_{mi}^\nu\rangle := \sqrt{\frac{n_\nu}{|G|}} \begin{pmatrix} D_{mi}^\nu(g_1), \\ D_{mi}^\nu(g_2), \\ \dots \\ D_{mi}^\nu(g_{|G|}) \end{pmatrix}. \quad (96)$$

و

۹ کاربردها و مثال ها

در این بخش از روابط کلی ای که بدست آوردیم استفاده می کنیم و روش بدست آوردن نمایش های گروه های منتهای را با ذکر چند مثال شرح می دهیم. در حالت کلی بدست آوردن نمایش یک گروه اگرچه سراسر است ولی کار طولانی و وقت گیری است و می بایست محاسبات آن را با حوصله و صرف وقت انجام داد.

■ مثال ۱: فرض کنید که G یک گروه آبلی باشد. در این صورت می دانیم که همه کلاس های تزویجی آن یک عضوی هستند، بنابراین $K = |G|$. باتوجه به رابطه اول و دوم از (90) بدست می آوریم که $N = |G|$ و برای همه μ ها $n^\mu = 1$. یعنی یک گروه آبلی تمام نمایش های کاهش ناپذیرش یک بعدی هستند.

■ مثال ۲: فرض کنید که G یک گروه دوری $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ است. کافی است که نمایش مولد آن یعنی a را بدست آوریم. از مثال قبل می دانیم که تمام نمایش ها یک بعدی هستند. یک نمایش D در نظر بگیرید. می بایست شرط

$$(D(a))^n = 1 \quad (97)$$

برقرار باشد. این معادله n تا حل دارد که هر کدام یک نمایش را تعریف می کند

$$D^\mu(a) = e^{\frac{2\pi i \mu}{n}} \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (98)$$

بنابراین

$$D^\mu(a^k) = e^{\frac{2\pi i \mu k}{n}} \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (99)$$

■ مثال ۳: گروه S_3 : گروه جایگشت های سه شیء یا S_3 دارای دو مولد است که آنها را σ_1 و σ_2 نشان می دهیم. داریم:

$$S_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}. \quad (100)$$

با استفاده از روابطی که بین مولد ها برقرار است کلاس های تزویجی S_3 به شکل زیر خواهند بود:

$$C_0 = \{e\}, \quad C_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\}, \quad C_2 = \{\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\}. \quad (101)$$

بنابراین برای این گروه داریم $N = K = 3$. یعنی سه نمایش کاهش ناپذیر داریم. یک نمایش یک بعدی همان نمایش بدیهی است:

$$D^0(g) = 1 \quad \forall g \in S_3. \quad (102)$$

نمایش یک بعدی دیگر آن است که به جایگشت های زوج عدد $1+$ و به جایگشت های فرد عدد $1-$ نسبت می دهد:

$$D^1(e) = D^1(\sigma_1\sigma_2) = D^1(\sigma_2\sigma_1) = 1$$

$$D^1(\sigma_1) = D^1(\sigma_2) = D^1(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = -1. \quad (103)$$

از رابطه $(n^0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 = 6$ نتیجه می شود که تنها یک نمایش دوبعدی دیگر وجود دارد. در این نمایش کافی است که بتوانیم به مولدهای σ_1 و σ_2 ماتریس های دوبعدی نسبت دهیم که در روابط ضرب گروه صدق کنند. می دانیم که

$$D^2(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (104)$$

نایه ای انتخاب می کنیم که در آن نمایش σ_1 قطری باشد. از آنجا که $\sigma_1^2 = e$ ، ویژه مقادیرهای $D^2(\sigma_1)$ یک و منهای یک خواهند بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$D^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

حال باقی می ماند نمایش σ_2 . ماتریس $D^2(\sigma_2)$ می بایست یکانی باشد. ویژه مقادیرهای آن نیز ± 1 است، پس درمیان آن -1 است. یک چنین ماتریسی شکل استاندارد زیر را دارد:

$$D^2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a^* \end{pmatrix} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (106)$$

شرط $(D^2(\sigma_2))^2 = I$ منجر به حقیقی بودن a می شود.

حال از رابطه بین مولدها استفاده می کنیم. می دانیم که $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$. در نتیجه می بایست داشته باشیم

$$D^2(\sigma_1)D^2(\sigma_2)D^2(\sigma_1) = D^2(\sigma_2)D^2(\sigma_1)D^2(\sigma_2). \quad (107)$$

این شرط منجر به مقادیر زیر می شود: $a = \frac{-1}{2}$ و $|b|^2 = \frac{3}{4}$. بنابراین خواهیم داشت

$$D^2(\sigma_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3}e^{i\phi} \\ \sqrt{3}e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}, \quad (108)$$

که در آن ϕ یک پارامتر آزاد است. این پارامتر را همواره می توان با تبدیل تشابهی مناسب حذف کرد. یافتن این تبدیل را به عهده خواننده می گذاریم. نهایتاً نمایش D^2 به شکل زیر است:

$$D^2(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D^2(\sigma_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \quad (109)$$

در روشی که برای بدست آوردن نمایش های گروه S_3 به کار بردیم از روابط تعامد استفاده نکردیم. در تمرین زیر این روش را قدم به قدم به کار می بریم.

■ تمرین: هدف این تمرین بدست آوردن نمایش های گروه S_3 به طور سیستماتیک است. این روش را می توان برای هر گروه دیگری به کار برد. البته طبیعی است که برای گروه های بزرگ تر محاسبات طولانی تر می شود.

الف: کلاس های تزویجی گروه S_3 را بدست آورید. گروه S_3 را نیز مثل همیشه به صورت زیر بنویسید:

$$S_3 = \{e, \alpha, \beta, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\beta\alpha\}. \quad (110)$$

ب: تعداد نمایش های این گروه را مشخص کنید.

با استفاده از رابطه $\sum_{\mu=1}^N (n^\mu)^2 = |G|$ بعد نمایش ها را تعیین کنید.

پ: بردارهای کاراکتر مربوط به نمایش ها را بدست آورید. اگر قسمت های الف و ب را درست حل کرده باشید، به این نتیجه رسیده اید که این بردارها سه بعدی هستند و تعداد آن ها نیز ۳ تاست.

با توجه به این که دو تا از نمایش های گروه S_3 یک بعدی هستند و آنها را می شناسیم، می توانید تعدادی از درایه های این بردارهای کاراکتر را مشخص کنید. این کار را انجام دهید و سپس بقیه درایه ها را با استفاده از روابط تعامد کاراکتر

ها مشخص کنید.

ت: اگر تمرین های قبلی را به درستی انجام داده باشید می دانیم که گروه S_3 دو نمایش یک بعدی و یک نمایش دوبعدی دارد. دقت کنید که کافی است ما نمایش عناصر α و β را بدست آوریم. برای این کار از رابطه

$$\sum_{ij;\mu} \frac{n^\mu}{|G|} D_{ij}^\mu(g) D_{ij}^\mu(g')^* = \delta_{g,g'}. \quad (111)$$

استفاده کنید و نمایش دو بعدی این دو عنصر و در نتیجه کل گروه را بدست آورید.

■ تمرین: نمایش منظم را برای گروه Z_n بدست آورید.

■ تمرین: گروه $Z_2 \times Z_2$ را در نظر بگیرید و نمایش منظم را برای آن بدست آورید.

■ تمرین: گروه $Z_2 \times S_3$ را در نظر بگیرید و نمایش منظم را برای آن بدست آورید. چهار نمایش یک بعدی غیرمعادل برای این گروه بدست آورید.

■ تمرین: گروه پاولی را که از عناصر زیر تشکیل شده در نظر بگیرید:

$$P = \{\pm I, \pm i I, \pm \sigma_1, \pm i \sigma_1, \pm \sigma_2, \pm i \sigma_2, \pm \sigma_3, \pm i \sigma_3\}$$

تعداد نمایش های کاهش ناپذیر این گروه چند تاست. بعد این نمایش ها را بدست آورید.

۱۰ نمایش روی فضای توابع

فرض کنید که گروه G روی یک مجموعه M عمل کند. (برای یادآوری عمل گروه روی یک مجموعه به درس چهارم رجوع کنید.) می توانیم به ازای هر نقطه از M یک بردار $|x\rangle$ تعریف کنیم. و فضای برداری V فضایی می گیریم که توسط مجموعه

بردارهای $\{|x\rangle, x \in M\}$ جاروب می شود. درحالتی که M یک مجموعه گسسته باشد این بردارها را با رابطه $\langle x|x'\rangle = \delta_{x,x'}$ م و درحالتی که M یک مجموعه پیوسته باشد این بردارها را با رابطه $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ بهنجار می کنیم. حال می توانیم یک نمایش روی فضای V به شکل زیرتعریف کنیم:

$$U(g)|x\rangle := |gx\rangle. \quad (112)$$

واضح است که U یک نمایش است. هر بردار روی فضای برداری V را می توان به صورت زیربسط داد:

$$|\psi\rangle = \sum_{x \in M} \psi(x)|x\rangle, \quad (113)$$

برای حالت گسسته و

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x)|x\rangle \quad (114)$$

که درحالت اخیر فرض کرده ایم که dx یک اندازه مناسب برای انتگرال گیری روی M است. $\psi : M \rightarrow C$ تابعی روی M خواهد که مقادیر خود را درحوزه اعداد مختلط می گیرد. از شرط تعامد و کامل بودن پایه بدست می آوریم که

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle. \quad (115)$$

حال از رابطه (112) بدست می آوریم

$$\langle x|U(g)^\dagger = \langle gx|, \quad (116)$$

که باتوجه به یکانی بودن نمایش خواهد شد:

$$\langle x|U(g^{-1}) = \langle gx|, \quad (117)$$

و با

$$\langle x|U(g) = \langle g^{-1}x|. \quad (118)$$

هرگاه عملگر $U(g)$ را روی یک بردار دلخواه $|\psi\rangle$ در فضای V اثر دهیم بردار جدیدی مثل $|\psi'\rangle$ بدست خواهد آمد:

$$|\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle, \quad (119)$$

واز آنجا

$$\langle x|\psi'\rangle = \langle x|U(g)|\psi\rangle. \quad (120)$$

اماباتوجه به رابطه (118) این امر به این معناست که

$$\psi'(x) = \psi(g^{-1}x). \quad (121)$$

بنابراین عملگر U یک نمایش روی توابع مختلط تعریف شده روی M که آن را با $F(M)$ نشان می دهیم، تعریف می کند. این نمایش به شکل زیر عمل می کند:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) := \psi(g^{-1}x). \quad (122)$$

می توانیم ψ' را با $U(g)\psi$ نشان دهیم که در این صورت عبارت بالا به شکل زیر درمی آید:

$$(U(g)\psi)(x) := \psi(g^{-1}(x)). \quad (123)$$

می توان از ابتدا نمایش روی توابع را به این شکل تعریف کرد و این کاری است که در بعضی از متون انجام می شود.

در حالت کلی نمایشی که به این صورت روی V یا روی فضای توابع تعریف شده روی M بوجود می آید یک نمایش کاهش ناپذیر است، اما می توان فضای V را به زیرفضاهای ناورد تجزیه کرد که به این معناست که نمایش U به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه می شود.

■ مثال ۱: گروه $Z_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ را در نظر بگیریم. این گروه روی صفحه مختلط C به شکل زیر عمل می کند:

$$a : z \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{n}} z, \quad (124)$$

که از نظر شهودی به این معناست که هر نقطه را به اندازه زاویه $\frac{2\pi}{n}$ می چرخاند. با توجه به آنچه که گفتیم، نمایش این گروه روی فضای توابع صفحه مختلط به شکل زیر تعریف می شود:

$$(U(a)\psi)(z) = \psi(a^{-1}z) = \psi(e^{-\frac{2\pi i}{n}} z). \quad (125)$$

این نمایش یک نمایش بی نهایت بعدی است. از طرفی می دانیم که Z_n ، n تا نمایش کاهش ناپذیر دارد که همه یک بعدی هستند. هر نمایش بایک عدد $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ مشخص می شود و در نمایش r عنصر a با عدد $e^{\frac{2\pi i r}{n}}$ نمایش داده می شود. این امر به این معناست که فضای تمام توابع مختلط یعنی $F(C)$ می بایست به فضاهای یک بعدی تجزیه شود که هر کدام یک نمایش یک بعدی r از گروه Z_n را حمل کند:

$$F(C) = \bigoplus_r a_r F^r(C) \quad (126)$$

که در آن a_r چندگانگی نمایش کاهش ناپذیر D^r است که روی فضای $F^r(C)$ تعریف شده است. دقت کنید که هر کدام از فضاهای F^r یک بعدی است و تنها توسط یک تابع که آن را با ψ_r نشان می دهیم جابجایی می شود. این تابع بنا بر رابطه (125) در شرط زیر صدق می کند:

$$\psi_r(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = e^{\frac{2\pi i r}{n}} \psi_r(z), \quad (127)$$

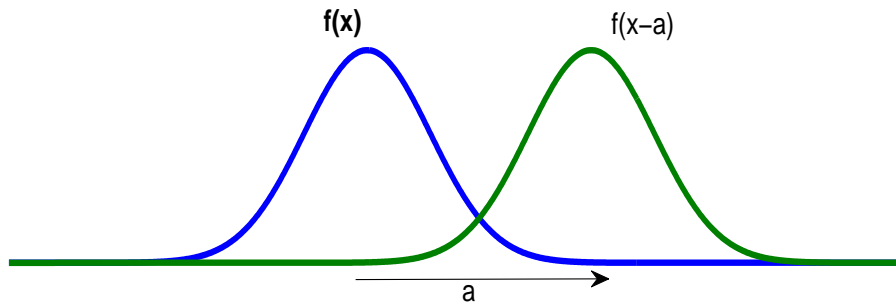
که از آن بدست می آوریم:

$$\psi_r(z) = z^{-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (128)$$

دقت کنید که در حالت کلی داریم $\psi_r(z) = z^{kn-r}$ که در آن k یک عدد صحیح دلخواه است. این آزادی در واقع بیان می کند که چندگانگی هر نمایش کاهش ناپذیر در تجزیه نمایش U روی فضای توابع مختلط بی نهایت است و عدد صحیح k این چندگانگی را مشخص می کند.

■ مثال ۲: گروه $S_2 = \{I, \sigma\}$ و عمل آن روی R را که به شکل زیر تعریف می شود در نظر بگیرید:

$$I x = x, \quad \sigma x = -x. \quad (129)$$



شکل ۲: تابع $f(x)$ و اثر نمایش انتقال $D(T_a)$ روی آن.

بنابراین روی $F(R)$ یک نمایش برای S_2 به شکل زیر تعریف می شود:

$$(U(I)f)(x) = f(x), \quad (U(\sigma)f)(x) = f(-x). \quad (130)$$

این نمایش یک نمایش بی نهایت بعدی است. از طرفی S_2 تنها دونمایش کاهش ناپذیر دارد که هر دو یک بعدی اند.

$$D^0(I) = D^0(\sigma) = 1, \quad D^1(I) = 1, \quad D^1(\sigma) = -1. \quad (131)$$

پس فضای بی نهایت بعدی $F(R)$ می بایست به زیرفضاهای یک بعدی که این دونمایش را حمل می کنند تجزیه شود یعنی

$$U = a_0 D^0 \oplus a_1 D^1, \quad (132)$$

که در آن a_0 و a_1 چندگانگی این نمایش ها هستند. از آنجا که این نمایش ها هر دو یک بعدی اند، باتوجه به رابطه (136) می بایست به دنبال توابعی باشیم که تحت عمل $U(\sigma)$ به ضربی از خودشان تبدیل شوند. این امر به معنای آن است که F^0 شامل توابع زوج و F^1 شامل توابع فرد است. مجموعه توابع زوج یا فرد زیرفضاهای بی نهایت بعدی از $F(R)$ هستند. بنابراین بامعرفی فضای تک جمله ای های درجه n به صورت

$$F_n(R) := \{f : R \rightarrow R \mid f(x) = \alpha x^n\} \quad (133)$$

درمی یابیم که $F(R)$ به صورت زیرتجزیه می شود:

$$F(R) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} F_n(R), \quad (134)$$

که در آن F_n برای n های زوج نمایش D^0 و برای n های فرد نمایش D^1 را حمل می کنند.

■ مثال ۳: گروه S_3 با مولدهای σ_1 و σ_2 روی مجموعه $R \times R \times R$ به شکل زیرعمل می کند:

$$\sigma_1(x, y, z) = (y, x, z) \quad \sigma_2(x, y, z) = (x, z, y). \quad (135)$$

بنابراین روی $F(R \times R \times R)$ یعنی روی فضای توابع سه متغیره یک نمایش برای S_3 به شکل زیرتعریف می شود:

$$(U(\sigma_1)f)(x, y, z) = f(y, x, z), \quad (U(\sigma_2)f)(x, y, z) = f(x, z, y). \quad (136)$$

این نمایش یک نمایش بی نهایت بعدی است. از طرفی S_3 تنها سه نمایش کاهش ناپذیر دارد که دو تایک بعدی و سومی دوبعدی است که آن ها را با D^1 ، $D^{1'}$ و D^2 نشان می دهیم. در نتیجه می بایست داشته باشیم

$$F(R \times R \times R) = \bigoplus (F^1(R \times R \times R) \oplus F^{1'}(R \times R \times R) \oplus F^2(R \times R \times R)) \quad (137)$$

در نتیجه با توجه به شناختی که از نمایش های کاهش ناپذیر داریم، برای $f \in F^1(R \times R \times R)$ می بایست داشته باشیم:

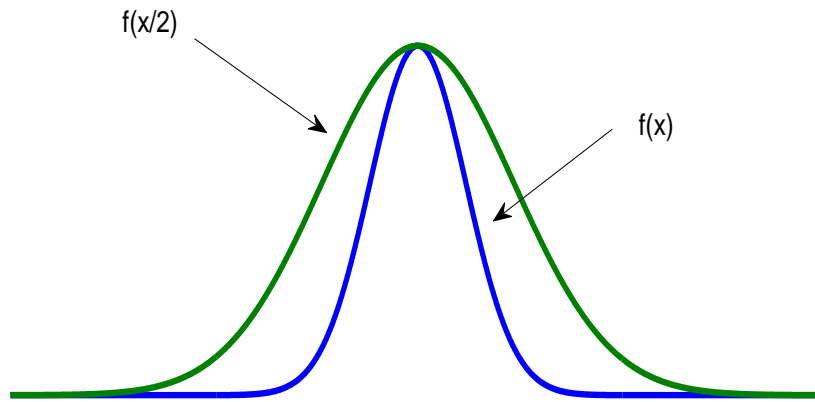
$$f(y, x, z) = f(x, y, z), \quad f(x, z, y) = f(x, y, z). \quad (138)$$

هم چنین برای هر $g \in F^{1'}(R \times R \times R)$ داریم:

$$g(y, x, z) = -g(x, y, z), \quad g(x, z, y) = -g(x, y, z). \quad (139)$$

وبالاخره از آنجا که هر کدام از زیرفضاهای $F^2(R \times R \times R)$ یک زیرفضای دوبعدی است در هر کدام می بایست دو تابع ϕ_1 و ϕ_2 داشته باشیم که با توجه به روابط () و () مطابق روابط زیر به هم تبدیل شوند:

$$\phi_1(y, x, z) = \phi_1(x, y, z)$$



شکل ۳: تابع $f(x)$ و اثر نمایش تغییر مقیاس $D(S_{1/2})$ روی آن.

$$\phi_2(x, z, y) = -\phi_2(x, y, z), \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x, z, y) &= \frac{-1}{2}\phi_1(x, y, z) + \frac{\sqrt{3}}{2}\phi_2(x, y, z) \\ \phi_2(x, z, y) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\phi_1(x, y, z) + \frac{1}{2}\phi_2(x, y, z). \end{aligned} \quad (141)$$

در این جا هدف ما آن نیست که این تجزیه را به صورت کامل انجام دهیم. اما بد نیست که مثال هایی از توابع فوق یعنی توابعی که تحت نمایش های مشخص به یکدیگر تبدیل می شوند ارائه دهیم. این مثال ها با سعی و خطا یافته شده اند. خواننده را تشویق می کنیم که سعی کند با استفاده از این مثال ها تجزیه فضای توابع $F(R \times R \times R)$ را به طور کامل انجام دهد. این مثال ها به ترتیب زیر هستند:

الف: مثال هایی برای تابع f که تحت نمایش D^1 تبدیل می شود:

الف - ۱:

$$f(x, y, z) = u(x)u(y)u(z), \quad (142)$$

که در آن u یک تابع یک متغیره دلخواه است.

الف - ۲:

$$f(x, y, z) = u(x) + u(y) + u(z). \quad (143)$$

الف - ۳:

$$f(x, y, z) = u(x)v(y)w(z) + u(y)v(x)w(z) + u(x)v(z)w(y) + u(z)v(y)w(x) + u(y)v(z)w(x) + u(z)v(x)w(y) \quad (144)$$

که در آن u, v, w توابع دلخواه یک متغیره هستند.

دقت کنید که مثال های الف - ۱ و الف - ۲، حالت های خاصی از مثال ۲ هستند.

ب: مثالهایی برای تابع g که تحت نمایش D^1 تبدیل می شود:

ب-۱:

$$g(x, y, z) = (u(x) - u(y))(u(y) - u(z))(u(x) - u(z)), \quad (145)$$

که در آن u یک تابع یک متغیره دلخواه است.

ب - ۲:

$$f(x, y, z) = u(x)v(y)w(z) - u(y)v(x)w(z) - u(x)v(z)w(y) - u(z)v(y)w(x) + u(y)v(z)w(x) + u(z)v(x)w(y) \quad (146)$$

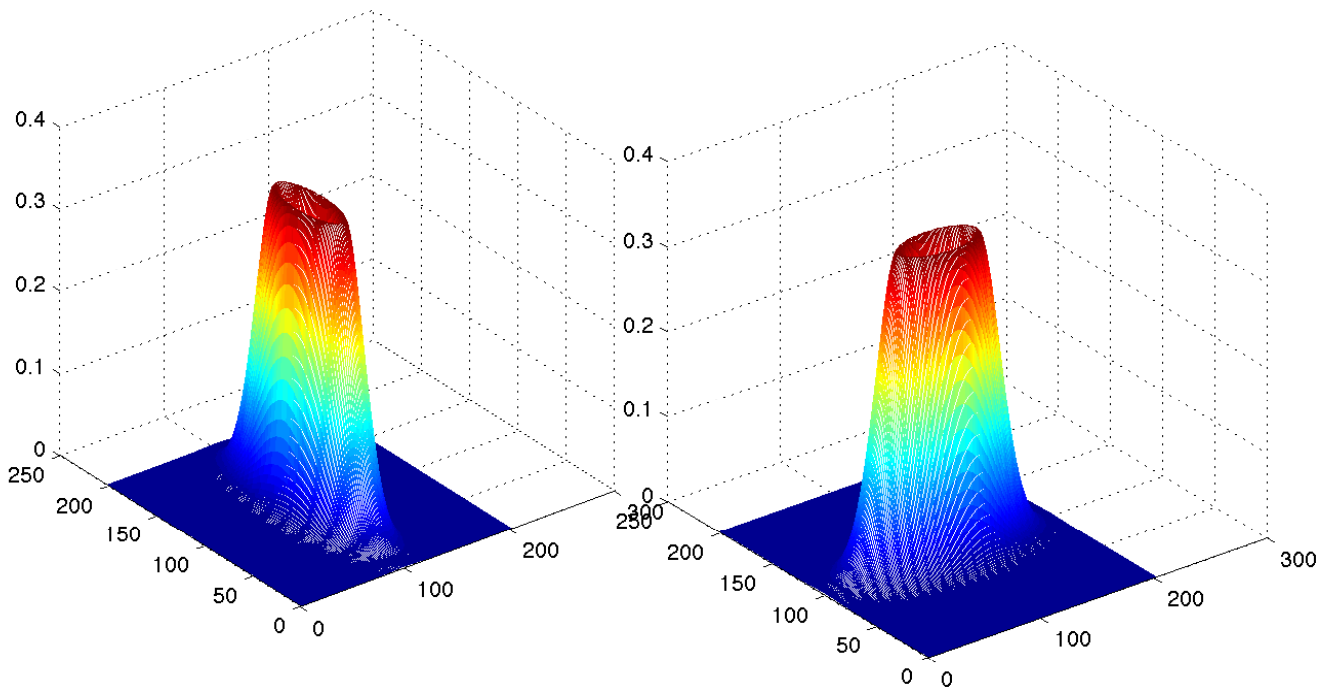
که در آن u, v, w توابع دلخواه یک متغیره هستند.

دقت کنید که مثال ب-۱ حالت خاصی از مثال ب-۲ نیست.

ج: مثالی از دو تابع سه متغیره که تحت نمایش کاهش ناپذیرگروه S_3 تبدیل می شود.

$$\phi_1(x, y, z) = u(x) + u(y) - 2u(z)$$

$$\phi_2(x, y, z) = \sqrt{3}(u(x) - u(y)), \quad (147)$$



شکل ۴: یک تابع $f(x, y)$ و اثر نمایش دوران $R_z(\pi/2)$ روی آن.

که در آن u یک تابع یک متغیره دلخواه است. اگر قرار دهیم $u(x) = x$ خواهیم داشت:

$$\phi_1(x, y, z) = x + y - 2z, \phi_2(x, y, z) = \sqrt{3}(x - y). \quad (148)$$

۱۱ نمایش گروه های لی

تا کنون بحث خود را به گروه های متناهی محدود کرده ایم. در یکی از مثال ها یعنی مثال مربوط به گروه جایگشت های سه تایی یا S_3 دیدیم که تنها کافی است که نمایش دو عنصر σ_1 و σ_2 را پیدا کنیم زیرا نمایش بقیه عناصر از روی نمایش این مولد ها بدست می آید. این امر در مورد هرگروهی صادق است. زیرا اگر به عنوان مثال $\{g_1, g_2, \dots, g_K\}$ مولد های یک گروه G باشند، آنگاه نمایش عنصری مثل $g_1^{s_1} g_2^{s_2} \dots g_K^{s_K}$ که در آن s_i ها اعداد صحیح مثبت یا منفی هستند برآحتی از روی نمایش مولدها بدست می آید:

$$D(g) = D(g_1^{s_1} g_2^{s_2} \dots g_K^{s_K}) = D(g_1)^{s_1} D(g_2)^{s_2} \dots D(g_K)^{s_K}. \quad (149)$$

اکنون می توانیم به اختصار شرح دهیم که نمایش گروه های لی چگونه از روی نمایش مولدها بدست می آید. همینطور می توانیم نشان دهیم که چگونه از روی نمایش گروه می توان نمایش جبر را بدست آورد.

می دانیم که عناصر یک گروه لی G را همواره می توان به صورت نمای عناصر جبرلی آن نوشت به این معنا که به ازای هر $g \in G$ داریم

$$g = g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K) = e^{\theta^i T_i} \quad (150)$$

که در نوشتن آن از قرارداد جمع روی شاخص های تکراری استفاده کرده ایم. در این رابطه $g \in G$ عنصر گروه لی و T_i ها بردارهای پایه جبرلی یا به اصطلاح مولدهای جبرلی هستند. θ^i ها نیز پارامترهای موضعی گروه هستند که مقدارشان یک عنصر گروه مثل g را مشخص می کنند. نکته مهم در این رابطه آن است که T_i ها یک فضای خطی را می سازند و این خطی بودن باعث سادگی بسیار زیاد جبرلی نسبت به گروه لی می شود. در عین حال این رابطه ما را قادر می سازد که ساختمان گروه و هم چنین نمایش های آن را از روی ساختمان جبر و نمایش های آن بدست آوریم. رابطه ای که مولدها در آن صدق می کنند به صورت زیر است

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k, \quad (151)$$

و در این رابطه هیچ نوع اشاره ای به پارامترهای θ^i وجود ندارد. حال نمایش پیدا کردن برای یک جبر به این معناست که ماتریس هایی پیدا کنیم که در همین رابطه جابجایی صدق کنند. به عبارت دیگر منظور از نمایش آن است که به هر عنصری از جبر مثل T_i یک ماتریس یا عملگر نسبت بدهیم مثل $D(T_i)$ به قسمی که

$$[D(T_i), D(T_j)] = D([T_i, T_j]) \quad (152)$$

که در آن منظور از $[D(T_i), D(T_j)] = D(T_i)D(T_j) - D(T_j)D(T_i)$ است. هرگاه یک نمایش مثل D برای جبر بسازیم، می توانیم با استفاده از آن یک نمایش برای گروه به شکل زیر بسازیم:

$$D(g) = D(g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)) = e^{\theta^i D(T_i)}. \quad (153)$$

بعد نمایش گروه و جبر نیز یکسان خواهد بود. هرگاه نمایش D برای گروه یکانی باشد برای جبر پاد هرمیتی است. یعنی $D(T)^\dagger = -D(T)$. بالعکس هرگاه یک نمایش برای گروه بسازیم می توانیم یک نمایش برای مولدها بدست آوریم. برای این کار کافی است که به بسط تابع نمایی توجه کنیم که بر مبنای آن

$$D(g) = I + \theta^i D(T_i) + \dots, \quad (154)$$

و در نتیجه

$$D(T_i) = \frac{\partial}{\partial \theta^i} D(g(\theta_1, \dots, \theta_K)) |_{\theta=0} . \quad (155)$$

در بعضی از موارد ممکن است که خود جبر لی به صورت یک جبر ماتریسی تعریف شده باشد. در این صورت ممکن است سوال کنید که اگر T_i خود ماتریس هستند چه نیازی به یافتن نمایش ماتریسی برای آنهاست؟ پاسخ این است که ممکن است ماتریس های دیگری بایندهای متفاوت وجود داشته باشد به قسمی که همان رابطه جابجایی را بین ماتریس های اولیه داشته باشند. در این صورت تمام این ماتریس های جدید نمایش های متفاوتی برای مولدها خواهند بود.

۱.۱۱ نمایش های گروه دوران

با توجه به اهمیتی که گروه دوران به عنوان یک گروه تقارن در فیزیک دارد، در این جا نمایش های گروه دوران را به اختصار بررسی می کنیم. در این بررسی از آنچه که در درس مکانیک کوانتومی آموخته ایم استفاده می کنیم. می دانیم که یک عضو گروه دوران به صورت زیر نوشته می شود:

$$R_{\mathbf{n}}(\theta) = e^{-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}} \quad (156)$$

که در آن \mathbf{n} محور دوران، θ زاویه دوران و $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ مولد های دوران هستند که در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= iJ_z, \\ [J_y, J_z] &= iJ_x, \\ [J_z, J_x] &= iJ_y. \end{aligned} \quad (157)$$

خواننده در درس مکانیک کوانتومی دیده است که برای جبر فوق بی نهایت نمایش کاهش ناپذیر وجود دارد که هر کدام با یک عدد صحیح یا نیمه صحیح j مشخص می شوند. هر نمایش j با برجسب j ، یک نمایش اسپین j خوانده می شود و بعد

$2j + 1$ دارد. این نمایش را با D_j نشان می دهیم. بردارهای پایه فضای چنین نمایشی عبارتند از $\{|j, m\rangle, -j \leq m \leq j\}$ و اثر عملگرهای $D_j(J_z), D_j(J_y), D_j(J_x) \pm iD_j(J_y), D_j(J_\pm) := D_j(J_x) \pm iD_j(J_y)$ روی این بردارها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} D_j(J_z)|j, m\rangle &= m|j, m\rangle \\ D_j(J_+)|j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j, m+1\rangle \\ D_j(J_-)|j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (158)$$

به ازای هر نمایش اسپین j از جبر یک نمایش کاهش ناپذیر اسپین j برای گروه وجود دارد که عبارت است از

$$D_j(R_{\mathbf{n}}(\theta)) = e^{-i\theta \mathbf{n} \cdot D_j(\mathbf{J})} \quad (159)$$

به این ترتیب نمایش اسپین j برای عنصر گروه دوران بدست می آید. این نمایش $2j + 1$ بعدی است.

حال جهت عکس را طی می کنیم و از یک نمایش برای گروه یک نمایش برای جبر بدست می آوریم. نمایشی که برای گروه در نظر می گیریم نمایش بی نهایت بعدی روی فضای توابع روی کره است. یک عنصر گروه دوران مثل $R_{\mathbf{n}}(\theta)$ را در نظر می گیریم. می دانیم که گروه دوران روی کره دوبعدی عمل می کند و هر بردار \mathbf{r} را تبدیل می کند به یک بردار دیگر روی کره مثل \mathbf{r}' :

$$\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}' = R_{\mathbf{n}}(\theta)(\mathbf{r}). \quad (160)$$

بنابراین مطابق با آنچه که در این درس دیدیم می توانیم گروه دوران را روی فضای توابع روی کره یعنی $C(S^2)$ نشان دهیم. این نمایش به این صورت است که

$$[D(R_{\mathbf{n}}(\theta))f](\mathbf{r}) = f(R_{\mathbf{n}}(-\theta)\mathbf{r}). \quad (161)$$

برای آنکه نمایش بی نهایت بعدی برای عناصر جبر بدست بیاوریم می بایست طرفین را نسبت به پارامترهای θ^i بسط دهیم و سپس نمایش عناصر جبر را با مقایسه دو طرف بدست آوریم. بنابراین می نویسیم

$$[D(e^{-i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}})f](\mathbf{r}) = f(R_{\mathbf{n}}(-\theta)\mathbf{r}) \quad (162)$$

برای θ های کوچک می دانیم که طرف راست عبارت است از: $f(\mathbf{r} - \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r})$ و طرف چپ برابر است با $[D(I - i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J})f](\mathbf{r})$. بنابراین رابطه ۱۶۲ پس از کمی دستکاری به شکل زیر در می آید:

$$[D(I - i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J})f](\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) \quad (163)$$

و یا

$$f(\mathbf{r}) - i\theta \mathbf{n} \cdot [D(\mathbf{J})f](\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - \theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r}) \quad (164)$$

از آنجا که این رابطه برای همه پارامترهای θ و \mathbf{n} و به ازای همه توابع f صادق است، پس از کمی ساده کردن نتیجه می گیریم که

$$D(\mathbf{J}) = -i\mathbf{r} \times \nabla \quad (165)$$

و یا

$$\begin{aligned} D(J_x) &= -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ D(J_y) &= -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ D(J_z) &= -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (166)$$

به این ترتیب وقتی که نمایش گروه را روی فضای توابع روی کره در نظر می گیریم، یک نمایش به صورت عملگرهای دیفرانسیلی برای بردارهای پایه جبر روی این توابع بدست می آید.

نمایش های فوق چه برای جبر چه برای گروه بی نهایت بعدی اند. این در حالی است که ما در درس مکانیک کوانتومی دیده ایم و در این درس هم ثابت خواهیم کرد که نمایش های کاهش ناپذیر برای جبر تکانه زاویه ای همگی بعد محدود دارند. این نمایش ها همان نمایش های اسپین z هستند که در بالا به آن اشاره کردیم. با توجه به این مشاهده، پس می بایست نمایش های بی نهایت بعدی ای که روی فضای توابع بدست آورده ایم نمایش های کاهش پذیری باشند که به این نمایش های بنیادی کاهش ناپذیر تجزیه می شوند. آیا این انتظار درست است؟ پاسخ این سوال مثبت است. در واقع بازهم در درس مکانیک کوانتومی پاسخ این سوال داده شده است. هر گاه برای فضای توابع روی کره پایه مناسبی اختیار کنیم نمایش روی فضای توابع

به نمایش های اسپین صحیح یعنی نمایش های D_l که در آن l یک عدد صحیح است تجزیه می شود. این پایه مناسب همان توابع هارمونیک کروی $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ هستند. به عبارت دیگر در این پایه عملگرهای دیفرانسیلی $D(J_x)$ ، $D(J_y)$ و $D(J_z)$ به صورت بلوکه قطری در می آیند. در نتیجه عملگرهای بی نهایت بعدی $D(R_n(\theta))$ نیز بلوکه قطری می شود. تفصیل این امر در درس مکانیک کوانتومی داده شده است و در آنجا نشان داده ایم که چگونه عملگرهای $D(J_i)$ وقتی که روی $Y_{l,m}$ ها اثر می کنند، تنها شاخص m را تغییر می دهند و شاخص l را دست نخورده باقی می گذارند. این امر به این معناست که عملگرهای دیفرانسیل $D(J_i)$ زیر فضای جاروب شده توسط توابع $\{Y_{l,m} \mid -l \leq m \leq l\}$ را ناوردا باقی می گذارند و این امر به معنای تجزیه نمایش بی نهایت بعدی روی فضای توابع به نمایش های کاهش ناپذیر اسپین صحیح است. برای کامل بودن این بحث یادآوری می کنیم که اثر عملگرهای دیفرانسیلی $D(J_i)$ روی $Y_{l,m}$ به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} D(J_z)Y_{l,m} &= mY_{l,m} \\ D(J_+)Y_{l,m} &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}Y_{l,m+1} \\ D(J_-)Y_{l,m} &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}Y_{l,m-1}. \end{aligned} \quad (167)$$

بحث ما در باره نمایش گروه ها در این جا به پایان می رسد. مطالعه سیستماتیک نمایش های جبرهای لی موضوعی است که در آخرین درس این درسنامه به آن خواهیم پرداخت. برای این کار نخست می بایست ساختمان جبرهای لی را مطالعه کنیم و این موضوع چند درس آینده است.