درسنامه نظریه گروه، درس سوم: همسانی و یکسانی بین گروه ها

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۳۰ فروردین ۱۳۹۵

۱ مقدمه

گروه $G_1 := \{1, -1\}$ باعمل ضرب و هم چنین گروه $G_2 := \{0, 1\}$ با عمل جمع به پیمانه 2 و گروهی مثل $G_3 := \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ را که عناصر آن از ماتریس تشکیل شده اند،درنظر بگیرید. این سه گروه ظاهرمتفاوتی دارند ولی اگر خوب دقت کنیم همه آنها ساختمان یکسانی دارند بدین معنا که تا آنجا که جدول ضرب آنها مطرح است این سه گروه را می توان با گروه زیریکسان دانست:

$$G := \{e, a\}, \qquad a^2 = e. \tag{۱}$$

یکسان بودن این سه گروه به این معناست که می توان عناصرآنها را به یکدیگر نگاشت بطوریکه جدول ضرب آنها حفظ شود. بنابراین، این گروه ها ساختار یکسانی دارند و نمی توان به آنها به عنوان سه گروه متفاوت نگاه کرد. دراین فصل به مفهوم یکسانی [۱] بین گروه ها و تبعات آن می پردازیم.

---

[۱] Isomorphism

۲ تعاریف اساسی

■ **تعریف:** نگاشت $\phi : G \longrightarrow G'$ بین دوگروه G و G' یک همسانی [۲] نامیده می شود اگر داشته باشیم:

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2). \tag{۲}$$

ازاین رابطه می توان نتیجه گرفت که

$$\phi(e) = e' \tag{۳}$$

که درآن e و e' به ترتیب عضو واحد گروه G و عضو واحد گروه G' هستند. هم چنین می توان نتیجه گرفت که

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}. \tag{۴}$$

■ تمرین: این دو خاصیت قبلی را ثابت کنید.

■ **مثال:** نگاشت $\phi : G \longrightarrow G$ یک همسانی از G به روی خودش است.

$$\phi(g) = e. \tag{۵}$$

حتی می توان گفت که بین هر گروهی مثل G و گروه تک عضوی $\{e\}$ همواره یک همسانی به شکل بالا برقرار است.

■ **مثال:** نگاشت $\phi : GL_n(C) \longrightarrow SL_n(C)$ که به صورتِ $\phi(g) = \frac{g}{det(g)}$ تعریف می شود یک همسانی است.

■ **مثال:** نگاشت $\phi : GL_n(C) \longrightarrow C - \{0\}$ که به صورت ِ $\phi(g) = det(g)$ تعریف می شود یک همسانی است.

---

[۲] Homomorphism

■ **تعریف:** هرگاه یک نگاشت همسانی وارون پذیر باشد آن را یکسانی می گوییم . دراین صورت دوگروه G و G' یکسان [۳] خوانده می شوند.

■ **مثال: یکسانی گروه $U(1)$ و گروه** $SO(2)$.

می دانیم که

$$U(1) := \{e^{i\phi}, |\phi \in [0, 2\pi]\}, \tag{۶}$$

$$SO(2) := \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |\phi \in [0, 2\pi]\}. \tag{۷}$$

حال نگاشت زیررا تعریف می کنیم:

$$\psi : SO(2) \longrightarrow U(1), \qquad \psi(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}) = e^{i\phi} \tag{۸}$$

براحتی می توان تحقیق کرد که این نگاشت همسانی و وارون پذیراست و بنابراین یک یکسانی بین گروه های $SO(2)$ و $U(1)$ است.

در واقع ریشه این یکسانی در عملی است که هر دو گروه روی صفحه دوبعدی انجام می دهند. نقاط صفحه دوبعدی را هم می توان با بردارهای دو بعدی $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نشان داد و هم با اعداد مختلط $z = x + iy$.

بنابراین می توان یک بردار در صفحه دو بعدی را هم به صورت زیر

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{۹}$$

[۳] Isomorphic

چرخاند و هم به صورت زیر:

$$z \longrightarrow z' = e^{i\theta} z. \qquad (۱۰)$$

این تناظر نشان می دهد که چرا این دو گروه با هم یکسان هستند.

- **مثال: یکسانی** Z, nZ.

می دانیم که nZ گروه اعداد صحیح مضرب n باعمل جمع است، یعنی

$$nZ := \{nz | z \in Z\}. \qquad (۱۱)$$

نگاشت ψ را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$\psi : Z \longrightarrow nZ, \qquad \psi(z) = nz. \qquad (۱۲)$$

براحتی می توان تحقیق کرد که این نگاشت همسانی و وارون پذیراست و بنابراین یک یکسانی بین گروه های Z و nZ است.

- **مثال: یکسانی بین گروه گیسوی** B_2 و Z.

می دانیم که گروه B_2 تنهایک مولد دارد به اسم σ_1 و تمام گیسوهای این گروه از عمل σ_1 یا وارون آن به وجود می آیند. رسم یک شکل دراینجا به دانشجو کمک می کند. بنابراین

$$B_2 = \{{\sigma_1}^n, n \in Z\}. \qquad (۱۳)$$

هم چنین می دانیم که ${\sigma_1}^n {\sigma_1}^m = {\sigma_1}^{n+m}$. حال نگاشت زیرراتعریف می کنیم:

$$\psi : B_2 \longrightarrow Z, \qquad \psi({\sigma_1}^n) := n. \qquad (۱۴)$$

براحتی می توان تحقیق کرد که این نگاشت همسانی و وارون پذیراست و بنابراین یک یکسانی بین گروه های B_2 و Z است.

دردرس های آینده مثال های پیچیده تری از یکسانی را ارایه خواهیم کرد.

■ **قضیه کایلی:**[۴] هرگروه متناهی از مرتبه n با زیرگروهی از S_n یکسان است.

اثبات: فرض کنید که $G := \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ یک گروه متناهی است. دراین صورت می توان نگاشت زیر رااز این گروه به S_n تعریف کرد:

$$\phi : a_i \in G \longrightarrow \phi(a_i) \in S_n \qquad \phi(a_i)(a_1, a_2, \cdots a_n) := (a_i a_1, a_i a_2, \cdots a_i a_n). \tag{۱۵}$$

با توجه به خواص گروه می توان براحتی فهمید که $(a_i a_1, a_i a_2, \cdots a_i a_n)$ یک جایگشت از $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ است. هم چنین داریم:

$$\phi(a_i a_j) = \phi(a_i)\phi(a_j). \tag{۱۶}$$

هم چنین این نگاشت یک به یک است زیرا:

$$\phi(a_i) = \phi(a_j) \longrightarrow \phi(a_i)a_k = \phi(a_j)a_k \longrightarrow a_i a_k = a_j a_k \longrightarrow a_i = a_j. \tag{۱۷}$$

بنابراین نگاشت فوق یک همسانی از G به S_n تعریف می کند. هرگاه نگاشت را به تصویر خودش که زیرمجموعه ای از S_n است محدود کنیم، یک نگاشت پوششی خواهد شد و درنتیجه وارون پذیر می شود. درنتیجه حکم ثابت می شود.

---

[۴] Cayley

۳ یکسانی گروه های $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$

در ادامه مثال های همسانی و یکسانی به دو مثال مهم توجه می کنیم که بدلیلِ کاربردهای فراوان، در فیزیک حائز اهمیت هستند. دراین بخش به یکسانی گروه های $SO(3)$ و $SU(2)/Z_2$ می پردازیم. می دانیم که گروه $SO(3)$ گروه دوران های فضای سه بعدی اقلیدسی است. هرگاه $A \in SO(3)$،یک دوران و $\vec{r} \in R^3$ یک بردارسه بعدی باشد آنگاه

$$\vec{r'} = A\vec{r} \qquad (۱۸)$$

دوران یافته $\vec{r}$ است.

- **تمرین:** ماتریس هایی که دوران حول محور های x، y و یا z را ایجاد می کنند بدست آورید.

- تمرین: یک ماتریس $A \in SO(3)$ داده شده است. می دانیم که این ماتریس نشان دهنده یک دوران حول یک محور $\mathbf{n}$ به اندازه ی زاویه θ است. چگونه محور دوران و زاویه دوران را از روی ماتریس داده شده پیدا می کنید؟

- تمرین: گروه $O(3)$ یعنی گروه ماتریس های متعامد ۳ بعدی را در نظر بگیرید. $SO(3)$ یک زیر گروه این گروه است. ثابت کنید که:

الف: $SO(3)$ زیر گروه بهنجار است.

ب: گروه خارج قسمت یعنی گروه $O(3)/SO(3)$ چه گروهی است؟

پ: ماتریس

$$\pi := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۱۹)$$

را در نظر بگیرید. ثابت کنید که این ماتریس نمی تواند نشان دهنده یک دوران باشد. کلاس هم ارزی عناصر I و π را پیدا کنید.

ت: ثابت کنید که هر ماتریسی که نشان دهنده یک دوران باشد باید حتما متعلق به $SO(3)$ باشد. راهنمایی: یک راه این است که از این استفاده کنید که از نظر توپولوژیک ، مقدار دترمینان گروه $O(3)$ را به دو قسمت کاملا مجزا تقسیم می کند؛ که به طور پیوسته نمی توان از یک قسمت به قسمت دیگر رفت.

د: قسمت های بالا را برای گروه $O(2)$ نیز انجام دهید. نقش ماتریس π را چه ماتریسی ایفا می کند؟

ازطرف دیگر می خواهیم نشان دهیم که دوران های فضای سه بعدی را با ماتریس های $SU(2)$ که دوبعدی هستند نیز می توان انجام داد. برای اینکه این نتیجه به ظاهرعجیب را بفهمیم به ترتیب زیر پیش می رویم: به ازای هربردار $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، ماتریس P را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$P := \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \equiv x_i \sigma_i = \vec{r} \cdot \vec{\sigma}. \tag{۲۰}$$

که دررابطه آخر ازقرارداد جمع روی اندیس های تکراری استفاده شده است و $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

این ماتریس خاصیت های زیررادارد:

الف: هرمیتی است.

ب : بدون رد است.

ج : $detP = -\vec{r}\cdot\vec{r}$.

حال باماتریس $U\in SU(2)$ تبدیل زیر را روی این ماتریس انجام می دهیم:

$$P' = UPU^{\dagger} \tag{۲۱}$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که ماتریس P' نیزدارای همان خاصیت های الف تا ج است. چنین ماتریسی دقیقاً همان فرمی را دارد که دررابطه (20) آمده است. بنابراین این ماتریس را نیزمی توان به یک برداربا‌همان اندازه نسبت داد.یعنی می توان نوشت :

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix} \equiv x'_i\sigma_i = \vec{r'}\cdot\vec{\sigma}. \tag{۲۲}$$

بنابراین ماتریس یکانی U بردار سه بعدی r را به بردار r' باهمان اندازه تبدیل می کند. ضمناً اگر U نزدیک به ماتریس واحد باشد، r نیزنزدیک r' خواهد بود. بنابراین U واقعاً یک دوران ایجاد می کند و نه چیزی شبیه به انعکاس نسبت به مبداء یا نسبت به یک محور. (باید به این نکته‌ی آخر دقت کنیم زیرا این نوع تبدیلات نیز یک بردارِ $\mathbf{r}$ را به یک بردار هم اندازه‌ی $\mathbf{r}'$ تبدیل می کنند.)

- **تمرین:** تبدیل $U = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ را روی ماتریس P اعمال کنید و بگویید که این تبدیل چه نوع دورانی انجام می دهد؟

- **تمرین:** ماتریس U را چنان پیدا کنید که یک دوران حول محور x به اندازه زاویه θ انجام دهد. همین کار را برای دوران حول محور y نیز تکرار کنید. با استفاده از نتایجی که بدست آورده اید شکل ماتریسی را حدس بزنید که دورانی حول محورِ $\mathbf{n}$ به اندازه‌ی θ انجام دهد. سپس به هر طریقی که می توانید حدس خود را امتحان کنید.

حال توجه می کنیم که دوران انجام شده توسطِ ماتریس $U\in SU(2)$ به طریقه‌ی نشان داده شده در رابطه‌ی 22 توسط یک ماتریسِ $A\in SO(3)$ نیز انجام می شود. یعنی

$$r' = Ar \tag{۲۳}$$

بنابراین به هرماتریس $U \in SU(2)$ می توانیم یک ماتریس $A \in SO(3)$ نسبت بدهیم که همان تبدیل را روی بردارهای سه بعدی اعمال می کند. حال فرض کنیدکه بعداز تبدیل U تبدیل U' رااعمال کنیم که ماتریس متناظربا‌آن در $SO(3)$، A' است. دراین صورت بردار r' تبدیل به بردار r'' می شود وداریم:

$$P' = UPU^{\dagger} \qquad P'' = U'P'U'^{\dagger} \tag{۲۴}$$

$$r' = Ar \qquad r" = A'r' \tag{۲۵}$$

از دورابطه (24) نتیجه می گیریم

$$P'' = U'(UPU^{\dagger})U'^{\dagger} = (U'U)P(U'U)^{\dagger}. \tag{۲۶}$$

یعنی دوران مرکب با ماتریس $U'U$ انجام می شود. ازرابطه (25) نیزبدست می آوریم

$$r'' = A'Ar, \tag{۲۷}$$

که به این معناست که ماتریس متناظربا $U'U \in SU(2)$ ماتریس $A'A \in SO(3)$ است. درنتیجه این نگاشت یک همسانی از $SU(2)$ به سوی $SO(3)$ است. اگردقیق تر نگاه کنیم این رابطه یک رابطه یک به یک نیست زیرا U و $-U$ هردویک دوران ایجاد می کنند. بنابراین به هر هم مجموعه دوتایی $\{U, -U\}$ یک عضو از گروه $SO(3)$ نسبت داده می شود. ولی این دقیقاً به این معناست که یک یکسانی بین گروه خارج قسمت $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$ برقراراست . یعنی

$$SU(2)/Z_2 \approx SO(3). \tag{۲۸}$$

در واقع می دانیم که $H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ یک زیرگروه از $SU(2)$ است که با گروهِ Z_2 یکسان است. هم مجموعه های این زیر گروه به صورت $\{U, -U\}$ هستند. بنابراین تناظر گروهِ $SO(3)$ با هم مجموعه های این زیر گروه در واقع همان تناظر $SO(3)$ با گروه خارج قسمتِ $SO(3)/Z_2$ است.

برای اینکه رابطه صریح U و A را بدست آوریم می نویسیم:

$$U(x_i\sigma_i)U^\dagger = x'_i\sigma_i \equiv A_{ij}x_j\sigma_i \qquad (۲۹)$$

طرفین این رابطه را در σ_k ضرب می کنیم:

$$tr(\sigma_k U x_i \sigma_i U^\dagger) = tr(\sigma_k A_{ij} x_j \sigma_i) \qquad (۳۰)$$

حال ازرابطه $tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$ استفاده می کنیم و بدست می آوریم:

$$A_{jk} = \frac{1}{2} tr(\sigma_j U \sigma_k U^\dagger). \qquad (۳۱)$$

این رابطه به طور صریح بیان می کند که درایه های ماتریس A چگونه از ماتریس U بدست می آیند. می توان پرسید که یک ماتریس U واقعاً چه دورانی انجام می دهد، این دوران حول کدام محور وبه اندازه چه زاویه ای است. برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که یک ماتریس یکانی دودردو را می توان به صورت زیرنوشت:

$$U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \equiv \cos\frac{\theta}{2} I + i\sin\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}. \qquad (۳۲)$$

که درآن $\hat{n}$ یک برداریکه است . ضریب $1/2$ برای راحتی بعدی درکنار θ قرارداده شده است. حال از این استفاده می کنیم که ماتریس هرمیتی P را می توان به صورت $P = \vec{r}\cdot\vec{\sigma}$ نوشت و از این اتحاد استفاده می کنیم که برای هردوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})I + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}. \qquad (۳۳)$$

کمی محاسبه نشان می دهد که ماتریس $P' = UPU^\dagger$ به شکل زیرقابل بازنویسی است:

$$P' = \vec{r'}\cdot\vec{\sigma}, \qquad (۳۴)$$

که درآن

$$\vec{r'} = \cos\theta\ \vec{r} + \sin\theta\ \vec{r}\times\hat{n} + (1-\cos\theta)(\hat{n}\cdot\vec{r})\ \hat{n}. \quad (۳۵)$$

ولی هم چنان که درتمرین های سری چهارم نشان داده اید این عبارت دقیقاً به این معنی است که بردار $\vec{r}$ حول محور $\hat{n}$ به اندازه زاویه θ چرخیده است. بنابراین ماتریس $U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$ دورانی حول محور $\hat{n}$ به اندازه زاویه θ انجام می دهد.

---

۴ چند قضیه اساسی درمورد همسانی ها

- **قضیه‌اول :** اگر $\phi : G \longrightarrow G'$ یک همسانی باشد آنگاه $Ker(\phi)$ یک زیر گروه بهنجار G است و $Im(\phi)$ یک زیرگروه G' است .

اثبات: $Ker(\phi)$ یک زیرگروه است زیرا:

$$a, b \in Ker(\phi) \longrightarrow \phi(a) = e',\ \ \phi(b) = e' \longrightarrow \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = e'e' = e' \longrightarrow ab \in Ker(\phi), \quad (۳۶)$$

$$a \in Ker(\phi) \longrightarrow \phi(a) = e',\ \ (\phi(a))^{-1} = e' \longrightarrow \phi(a^{-1}) = e' \longrightarrow a^{-1} \in Ker(\phi). \quad (۳۷)$$

$Ker(\phi)$ یک زیرگروه بهنجاراست زیرا:

$$n \in Ker(\phi) \longrightarrow \phi(n) = e' \longrightarrow \phi(gng^{-1}) = \phi(g)\phi(n)\phi(g)^{-1} = \phi(g)e'\phi(g)^{-1} = e' \longrightarrow gng^{-1} \in Ker(\phi). \quad (۳۸)$$

$Im(\phi)$ یک زیرگروه G' است زیرا:

$$x, y \in Im(\phi) \longrightarrow x = \phi(a), \quad y = \phi(b) \longrightarrow xy = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \longrightarrow xy \in Im(\phi), \tag{۳۹}$$

و

$$a \in Im(\phi) \longrightarrow x = \phi(a), \quad x^{-1} = (\phi(a))^{-1} \longrightarrow x^{-1} = \phi(a^{-1}) \longrightarrow x \in Im(\phi). \tag{۴۰}$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل می شود.

■ **قضیه دوم:** همسانی $\phi : G \longrightarrow G'$ یکسانی است اگر و فقط اگر ϕ پوششی بوده و درضمن $ker(\phi) = \{e\}$.

اثبات: باید ثابت کنیم که این نگاشت یک به یک است :

$$\phi(a) = \phi(b) \longrightarrow \phi(a)\phi(b)^{-1} = e' \longrightarrow \phi(ab^{-1}) = e' \longrightarrow ab^{-1} = e \longrightarrow a = b. \tag{۴۱}$$

■ **قضیه سوم:** اگر $\phi : G \longrightarrow G'$ یک همسانی باشد آنگاه $G/ker(\phi) \sim Im(\phi)$.

اثبات: اولا چون $Ker(\phi)$ یک زیرگروه بهنجار G است، گروه خارج قسمت $G/Ker(\phi)$ معنا دارد. همسانی از $G \longrightarrow G'$ را با ϕ نشان می دهیم. حال باید یک یکسانی بین $G/ker(\phi)$ و $Im(\phi)$ تعریف کنیم: این نگاشت را با ψ نشان می دهیم و به صورت زیر آن را تعریف می کنیم:

$$\forall \quad [a] \in G/Ker(\phi) \longrightarrow \psi([a]) := \phi(a). \tag{۴۲}$$

این نگاشت خوش تعریف است و بستگی به انتخاب نماینده کلاس ندارد، زیرااگر $a \equiv b$ نتیجه می گیریم که $a = bh$ که درآن $h \in Ker(\phi)$. بنابراین

$$\phi(b) = \phi(ah) = \phi(a)\phi(h) = \phi(a)e' = \phi(a). \tag{۴۳}$$

این نگاشت یک همسانی است زیرا:

$$\psi([a][b]) = \psi([ab]) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \psi[a]\psi[b]. \qquad (۴۴)$$

این نگاشت یک به یک است زیرا:

$$\psi([a]) = \psi([b]) \longrightarrow \phi(a) = \phi(b) \longrightarrow \phi(a)\phi(b)^{-1} = e' \longrightarrow \phi(a)\phi(b^{-1}) = e'$$
$$\phi(ab^{-1}) = e' \longrightarrow ab^{-1} \in Ker(\phi) \longrightarrow a \equiv b \longrightarrow [a] = [b]. \qquad (۴۵)$$

این نگاشت به طوربدیهی پوششی است، زیرا به روی $Im(\phi)$ تعریف شده است.

۱.۴ مثالهایی از کاربرد قضیایای همسانی

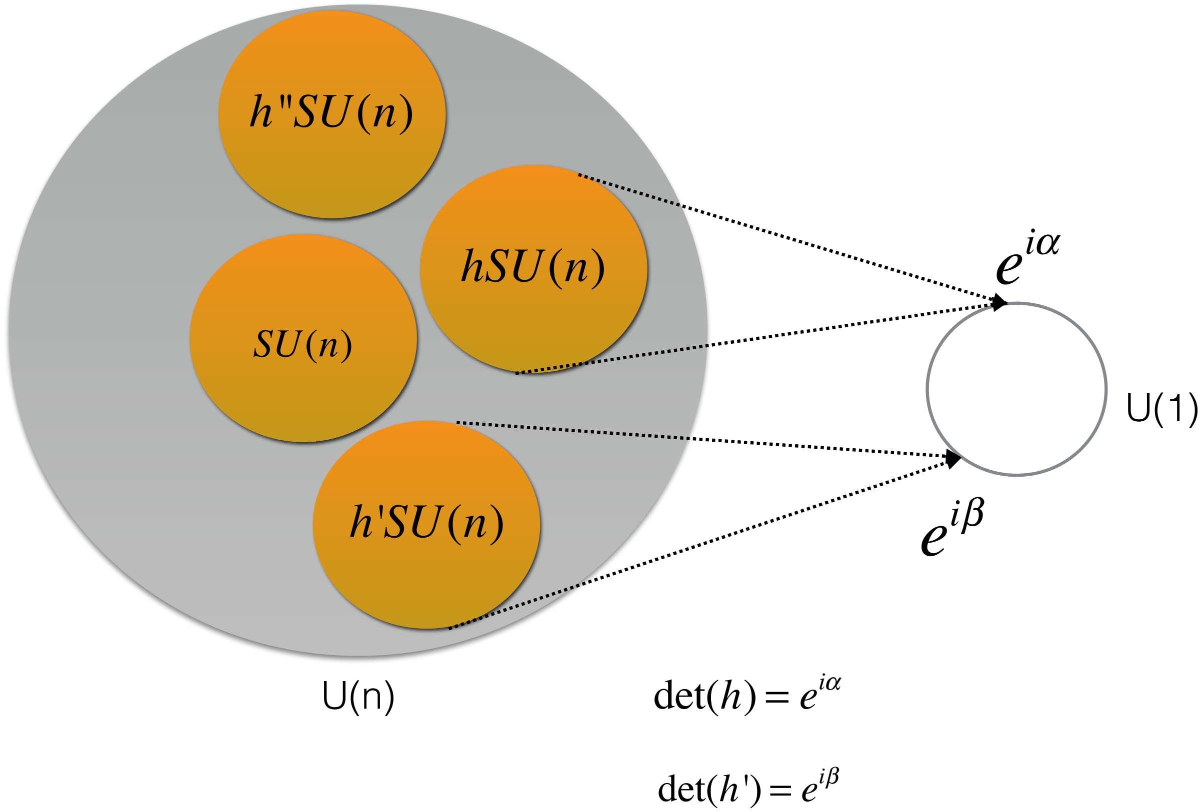
■ **مثال:** نگاشت $\phi : U(n) \longrightarrow U(1)$ را باتعریف $\phi(g) := \det(g)$ درنظر می گیریم. این نگاشت یک همسانی است. هسته این نگاشت برابراست با $SU(n)$. بنابرقضیه فوق خواهیم داشت :

$$U(n)/SU(n) \sim U(1)$$

.می توانیم این موضوع را به شکل بهتری بفهمیم. برای این کار یک ماتریس مثل g را در نظر می گیریم. فرض کنید که دترمینان این ماتریس برابر است با $e^{i\theta}$. حال اگر مجموعه تمام ماتریس های از نوع

$$\{gh \quad | \quad h \in SU(n)\}$$

را در نظر بگیریم. تمام عناصر این مجموعه بازهم به همان مقدار $e^{i\theta}$ نگاشته می شوند. به این ترتیب گروه $U(n)$ به زیر مجموعه هایی افراز می شود که هر کدام از آنها با گروه $SU(n)$ تناظر یک به یک دارند و هر کدام از این مجموعه ها به یک عضو از گروه $U(1)$ نگاشته می شوند، یعنی بین هر کدام از این مجموعه ها و هر عضو $e^{i\theta} \in U(1)$ یک تناظر یک



شکل ۱: تحت همسانی $g \longrightarrow det(g)$ کل زیرگروه $SU(n)$ به عدد ۱ نگاشته می شود. تمامی هم مجموعه ی $hSU(n)$ به عدد $e^{i\alpha}$ نگاشته می شود که در آن $det(h) = e^{i\alpha}$. زیر گروه $SU(n)$ نیز به عدد ۱ نگاشته می شود. بنابراین بین گروه خارج قسمتِ $U(n)/SU(n)$ و گروه $U(1)$ یک تناظر یک یکسانی برقرار است.

به یک وجود دارد. خود زیر گروه $SU(n)$ نیز تحت این نگاشت به عنصر واحد $U(1)$ یعنی ۱ نگاشته می شود. به این ترتیب و با توجه به شکل (۱) معلوم می شود که چرا یکسانی و تناظر $U(n)/SU(n) \equiv U(1)$ برقرار است.

■ **مثال:** نگاشت $\phi : U(n) \longrightarrow SU(n)$ را باتعریف $\phi(g) := \frac{g}{(\det(g))^{\frac{1}{n}}}$ درنظر می گیریم. این نگاشت یک همسانی است. هسته آن برابر است با ماتریس های به فرم $e^{i\theta} diagonal(1, 1, \cdots 1)$.

بنابراین هسته این نگاشت برابراست با گروه $U(1)$. درنتیجه خواهیم داشت

$$U(n)/U(1) \equiv SU(n)$$

. این تناظر را نیز می توان به شکل ملموس تری فهمید.

- تمرین: نشان دهید که

$$O(n)/SO(n) \equiv Z_2.$$

- تمرین: نشان دهید که

$$O(2n+1)/Z_2 \equiv SO(2n+1).$$

توضیح دهید که چرا این رابطه را برای $O(2n)$ نمی توان نوشت.

- تمرین: ماتریس یکانی ای را که دوران حول محور $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{z}$ به اندازه زاویه 30 درجه انجام می دهید بنویسید.

۵ تمرینهای اضافه:

- تمرین: جدول ضرب همه گروه های با مرتبه ۴ را تشکیل دهید و نشان دهید که همه این گروه ها با یکی از گروه های Z_4 یا $Z_2 \times Z_2$ یکسان هستند.

- تمرین : نشان دهید که یک همسانی پوشا $\phi : G \longrightarrow G'$ یکسانی است اگر وفقط اگر $Ker(\phi) = \{e\}$.

- تمرین: فرض کنید که $\phi : G \longrightarrow G'$ یک همسانی پوشا باشد. هسته این همسانی را با K نشان می دهیم، یعنی $ker(\phi) = K$. حال زیرگروهی مثل H' از G' درنظربگیرید و قراردهید:

$$H := \{g \in G | \phi(g) \in H'\}. \tag{۴۶}$$

الف: نشان دهید که

$$K \subset H \subset G, \qquad (۴۷)$$

که درآن علامت $\subset$ را به معنای زیرگروه بودن به کاربرده ایم.

ب: نشان دهید که اگر H' در G' بهنجارباشد، آنگاه H نیز در G بهنجاراست.

ج: درحالت (ب) نشان دهید که G/H با G'/H' یکسان است.

■ تمرین: فرض کنید که G یک گروه دلخواه و g یک عنصر از G باشد. نشان دهید که نگاشت

$$T_g : G \longrightarrow \qquad T_g(x) := gxg^{-1}$$

یک همسانی از G به روی G است.

■ تمرین: فرض کنید که G یک گروه آبلی متناهی از مرتبه $|G|$ با شد و n را عدد صحیحی بینگارید که نسبت به $|G|$ اول باشد. نشان دهید که هر $g \in G$ را می توان به ازای x ای در G به صورت $g = x^n$ درآورد. (راهنمایی : نگاشت $\phi : G \longrightarrow G$ را به صورت $\phi(y) := y^n$ تعریف کنید و ثابت کنید که این نگاشت یک یکسانی از G به روی G است .)

■ تمرین: G را گرو هی بینگارید که عبارت است از مجموعه همه علامات صوری

$$\{X^iR^j, \quad i = 0,\ 1, \quad j = 0, 1, 2, \cdots n-1 \quad |X^2 = R^n = e, \quad XR = R^{-1}X\}$$

ثابت کنید که :

الف : زیر گروه $N = \{e, R, R^2, \cdots R^{n-1}\}$ در G بهنجار است.

ب : $G/N \sim Z_2$.

این گروه را گروه دووجهی می نامند. این گروه را می توان گروه تبدیلات زیرروی صفحه دوبعدی درنظرگرفت :
R عبارت است از یک دوران حول مبداء به اندازه زاویه $\frac{2\pi}{n}$ و X عبارت است از انعکاس نسبت به محور x.

■ تمرین: منظور از خودسانی یا $Automorphism$ یک نگاشت یکسانی از یک گروه به روی خودش است. مجموعه همه خودسانی های یک گروه G را با $A(G)$ نمایش می دهیم .

الف : نشان دهید که $A(G)$ باعمل ترکیب نگاشت ها یک گروه است.

ب :به ازای هر $g \in G$ نگاشت $T_g : G \longrightarrow G$ را به صورت $T_g(x) = gxg^{-1}$ تعریف می کنیم. ثابت کنید که T_g یک خودسانی است. این نوع خودسانی را خودسانی درونی $InnerAutomorphism$ می نامیم. نشان دهید که مجموعه تمام خودسانی های درونی تشکیل یک زیرگروه از $A(G)$ می دهند. این زیر گروه را با $I(G)$ نشان می دهیم. دقت کنید که $I(G) := \{T_g \in A(G) | g \in G\}$.

ج :نشان دهید که $I(G)$ یک زیرگروه بهنجار $A(G)$ است.

د: حال نگاشت زیر از G به $A(G)$ را درنظر بگیرید:

$$\psi : G \longrightarrow A(G) \qquad \psi(g) := T_g$$

نشان دهید که ψ یک همسانی است. هسته$(Kernel)$ این همسانی را پیدا کنید. تصویر G را تحت این همسانی پیدا کنید.

ه : با استفاده از قسمت های قبل نشان دهید که $G/Z \sim I(G)$ که درآن Z مرکز گروه است.

■ تمرین: ثابت کنید که به ازای هرگروه G ، $I(G)$ یک زیرگروه بهنجار $A(G)$ است. گروه $A(G)/I(G)$ را گروه خودسانی های خارجی می نامند.

■ تمرین: گروه خودسانی های S_3 را مشخص کنید.

■ تمرین: چنانچه G گروه مرتبه چهارزیر باشد

$$G := \{e, a, b, ab| \quad a^2 = b^2 = 2, \quad ab = ba\}$$

، $A(G)$ را مشخص کنید.