درسنامه نظریه گروه، درس پنجم: گروه های ماتریسی

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۱۸ اسفند ۱۳۹۴

۱ مقدمه

دردرس قبلی راجع به گروه تبدیلات روی یک مجموعه سخن گفتیم. دراین درس توجه خود را به گروه های تبدیل روی فضاهای خطی (فضای برداری) معطوف می کنیم. هرگاه V یک فضای برداری حقیقی باشد، مجموعه تبدیلات خطی وارون پذیر از V به روی خودش یک گروه تشکیل می دهد. وقتی که برای فضای برداری یک پایه انتخاب می کنیم می توان هرتبدیل خطی را بایک ماتریس نشان داد. هم چنین می دانیم که وقتی دو تبدیل خطی باهم ترکیب می شوند، ماتریس های متناظر با آنها درهم ضرب می شوند. ماتریسی که به تبدیل خطی همانی نسبت داده می شود همان ماتریس واحد است و ماتریسی که به معکوس یک تبدیل خطی نسبت داده می شود معکوس ماتریسی است که به خود تبدیل خطی نسبت داده شده است. درنتیجه گروه تبدیلات خطی روی یک فضای خطی چیزی نیست جزیک گروه که عناصر آن از ماتریس های وارون پذیر تشکیل شده اند. این گروه ها را گروه های ماتریسی [۱] می نامیم. گروه های ماتریسی به دو دلیل اهمیت فوق العاده دارند، نخست اینکه چنانکه در فصل های آینده خواهیم دید، هر گروهی را می توان به صورت مجموعه ای از ماتریس ها نمایش داد، دوم اینکه مکانیک کوانتومی به عنوان چارچوب بنیادی برای توصیف طبیعت یک ساختار خطی دارد و حالت های فیزیکی در فضای

[۱] Matrix Groups

هیلبرت نشان داده می شوند و هر نوع تبدیلی روی این بردارها به صورت یک تبدیل خطی یا یک ماتریس در می آید.

دراین فصل مهمترین گروه های تبدیلات خطی و یا متناظرباآن مهمترین گروه های ماتریسی را معرفی می کنیم. درهرمورد به تبدیلات بی نهایت کوچک نیزنگاه می کنیم. تبدیلات بی نهایت کوچک ما را با مفهوم مولد برای گروه های ماتریسی آشنا می کند.

توصیف خود را از ساده ترین گروه های ماتریسی آغاز می کنیم و سپس به گروه های ماتریسی کلی تر خواهیم پرداخت.

۲ گروه $GL(2,R)$

ساده ترین گروه ماتریسی گروه ماتریس های وارون پذیر دوبعدی حقیقی است که آن را با $GL(2,R)$ نشان می دهیم. بنابراین داریم:

$$GL(2,R) := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad | \quad a,b,c,d \in R, \quad ad-bc \neq 0\}. \tag{۱}$$

این گروه یک گروه چهارپارامتره است و به همین دلیل می گوییم این گروه یک گروه چهاربعدی است. با تغییر پیوسته این پارامترها می توانیم در این گروه از یک نقطه به یک نقطه دیگر حرکت کنیم. به عبارت دیگر این گروه مثل همه گروه های ماتریسی ای که در این درس معرفی می کنیم یک گروه پیوسته [۲] یا یک گروه توپولوژیک [۳] است.

[۲] Continuous Group

[۳] Topological Group

۳ گروه $SL(2,R)$

زیرگروهی از گروه $GL(2,R)$ که از ماتریس های با دترمینان برابر با یک تشکیل شده گروه $SL(2,R)$ نامیده می شود.

$$SL(2,R)=\{g\in GL(2,R)\quad|\quad det(g)=1\}. \tag{۲}$$

از لحاظ تو پولوژیک این گروه یک سطح سه بعدی با معادله $ad-bc=1$ را درفضای چهاربعدی می سازد. با انتخاب

$$a=x_0+x_3,\quad d=x_0-x_3,\quad b=x_1-x_2,\quad c=x_1+x_2. \tag{۳}$$

ین معادله به شکل $x_0^2-x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ درمی آید. این موضوع نشان می دهد که ازلحاظ هندسی $SL(2,R)$ همریخت [۴] با یک سطح سه بعدی است. همریختی یک اصطلاح توپولوژیک است به این معنا که می توان یک تابع پیوسته و وارون پذیر از $SL(2,R)$ به روی این سطح سه بعدی تعریف کرد. این سطح قیافه یک هذلولی گون را دارد.
می توان عناصر ماتریس را به شکل زیر توسط سه پارامتر مستقل نشان داد:

$$x_0=\cosh r\cos\theta\quad x_1=\sinh r\cos\phi\quad x_2=\cosh r\sin\theta\quad x_3=\sinh r\sin\phi. \tag{۴}$$

۱.۳ مولدهای گروه $SL(2,R)$

در گروه های متناهی و یا گروه های شمارش پذیر با مفهوم مولد آشنا شدیم و دیدیم که مولدها مجموعه‌ای از عناصر گروه هستند که از حاصل ضرب توان های مثبت و منفی آنها تمام عناصر گروه را بتوان بدست آورد. در گروه های ماتریسی که نوعی از گروه های پیوسته هستند، مفهوم مولد به گونه‌ای دیگر معرفی می شود. در فصل های آینده با مفهوم مولد به طور کلی آشنا می شویم ولی بهتراست در این فصل و در قالب گروه های ماتریسی آن ها را بفهمیم. زیرا به هر حال در اکثر کاربردهای فیزیکی

[۴] Homeomorphic

ما با گروه های ماتریسی سرو کار داریم. آشنایی خود را با مثال های ساده شروع می کنیم و سپس این آشنایی را در هر مورد با مطالعه گروه های ماتریسی دیگر بسط می دهیم. به عنوان ساده ترین مثال گروه $SL(2,R)$ را در نظر بگیرید. عناصر این گروه به صورت 99 هستند و یک مجموعه پیوسته سه پارامتره را می سازند. هرگاه در نزدیکی عنصر واحد گروه باشیم پارامترهای a,b,c و d می بایست به شکل زیرباشند:

$$g \approx \begin{pmatrix} 1+\eta_1 & \eta_2 \\ \eta_3 & 1-\eta_1 \end{pmatrix} \tag{۵}$$

که درآن پارامترهای η_i همگی کوچکند و از توان دوی آنها می توان صرف نظرکرد. مرسوم است که این پارامتر ها را به شکل زیر انتخاب کنند که درآن شرط دترمینان واحد برای ماتریس g در نظر گرفته شده است.

$$g \approx \begin{pmatrix} 1+\epsilon_3 & \epsilon_1-\epsilon_2 \\ \epsilon_1+\epsilon_2 & 1-\epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{۶}$$

بنابراین می توان در نزدیکی عنصر واحد گروه همه ماتریس ها را به شکل زیر نوشت:

$$g \approx I + \epsilon_1 T_1 + \epsilon_2 T_2 + \epsilon_3 T_3, \tag{۷}$$

که درآن

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۸}$$

مولدهای گروه نامیده می شوند. در فصل های آینده با مفهوم هندسی این مولدها آشنا خواهیم شد و بعضی از سوالاتی که دراین درس ممکن است بی پاسخ بمانند در آن درس پاسخ داده خواهند شد. عجالتا می توانیم با کمی تسامح بفهمیم که چرا این ماتریس ها مولدهای گروه خوانده می شوند. می دانیم که یک ماتریس به شکل 16 مادام که بتوان از مرتبه دوم پارامترهای ϵ_i صرف نظر کرد، حتماً عضو گروهِ $SL(2,R)$ است. اما اگر پارامترها کوچک نباشند چه؟ دراین صورت چه ترکیبی از T_i ها عضو گروه خواهد بود؟ بیایید پارامترهایی را که لزوماً کوچک نیستند با θ_i نشان دهیم. در این صورت اگر N را عدد بزرگی بگیریم آنگاه می توانیم بگوییم که ماتریس زیر به ازای هر θ_i ای عضو گروه هست (کافی است که N را به اندازه کافی بزرگ

بگیریم)

$$g \approx I + \frac{\theta_1}{N}T_1 + \frac{\theta_2}{N}T_2 + \frac{\theta_3}{N}T_3, \qquad (۹)$$

بنابر خاصیت گروه هرگاه این عناصر را درهم ضرب کنیم بازهم عضو گروه باقی خواهند ماند بنابراین عنصر زیر عضو گروه است

$$g \approx (I + \frac{\theta_1}{N}T_1 + \frac{\theta_2}{N}T_2 + \frac{\theta_3}{N}T_3)^N, \qquad (۱۰)$$

این تساوی تقریبی است ولی در حد $N \longrightarrow \infty$ تبدیل به یک تساوی دقیق می شود. اما با استفاده از بسط e^x این امر به این معناست که

$$g = \lim_{N \longrightarrow \infty}(I + \frac{\theta_1}{N}T_1 + \frac{\theta_2}{N}T_2 + \frac{\theta_3}{N}T_3)^N = e^{\theta_1 T_1 + \theta_2 T_2 + \theta_3 T_3}, \qquad (۱۱)$$

به ازای هر مقادیری از $\theta_1, \theta_2,\ \theta_3$ عضوی از گروه است. آیا هر عنصر گروه را می توان به این شکل نوشت؟ پاسخ این سوال نیز مثبت است اگر چه استدلال آن دراین درس داده نخواهد شد. خواننده علاقمند برای مطالعه بیشتر دراین مورد می بایست به کتاب های پیشرفته تر در زمینه گروه ها مراجعه کند. به این ترتیب معلوم می شود که چرا به T_i ها مولدهای گروه گفته می شود. آنچه که در این بخش گفتیم در مورد بقیه گروه هایی که در بخش های بعدی معرفی می کنیم نیز صدق می کند. یعنی همواره مولدهارا از بسط دادن یک عنصر دلخواه گروه در نزدیکی عنصر واحد بدست می آوریم. یعنی به طور کلی قرار می دهیم

$$g \approx I + L \qquad (۱۲)$$

که درآن L ماتریسی است که همه درایه های آن بی نهایت کوچکند و می توان از مرتبه دوم آنها صرف نظر کرد. آنگاه L را برحسب پارامترهایی که دارد بسط می دهیم. ضرایب این پارامترها همان مولد ها هستند. از آنجا که پارامترها را به طرق متعددی می توان اختیار کرد، مجموعه مولدهای یک گروه نیز یکتا نیست. تعداد مولد ها برابر با تعداد پارامترهای گروه است .

- تمرین: ماتریس $e^{\theta_1 T_1 + \theta_2 T_2 + \theta_3 T_3}$ را به شکل صریح محاسبه کنید .

- تمرین: نشان دهید که تبدیلات متعلق به $SL(2, R)$ اندازه مساحت متوازی الاضلاعی را که بین دو بردار تشکیل می شود، حفظ می کنند.

۴ گروه $O(2,R)$

حال تبدیلاتی را در نظر بگیرید که ضرب داخلی دو بردار را در فضای R^2 حفظ می کنند. ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in R^2$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle := \mathbf{x}^T\mathbf{y}. \tag{۱۳}$$

در این صورت تبدیلاتی که این ضرب را حفظ می کنند تبدیلات متعامد خوانده می شوند و گروه $O(2,R)$ را تشکیل می دهند:

$$O(2,R) = \{A \in GL(2,R) \quad | \quad A^TA = I\}. \tag{۱۴}$$

دترمینان عناصر این گروه یا برابر با $+1$ است یا برابر با -1. مجموعه ای که از ماتریس های با دترمینان $+1$ تشکیل شده یک زیر گروه موسوم به $SO(2)$ است. مجموعه دیگر زیر گروه نیست.

- تمرین: نشان دهید که این دو مجموعه، هم مجموعه های یک زیرگروه هستند. این زیرگروه چیست؟ گروه خارج قسمت مربوطه چه گروهی است؟

مفهوم مولدهای بی نهایت کوچک تنها برای زیرگروه $SO(2,R)$ معنا دارد زیرا تنها عناصر این گروه هستند که به طور پیوسته به عنصر واحد متصل هستند. این مولدها را در بخش بعدی پیدا می کنیم.

۱.۴ مولدهای گروه $SO(2,R)$

قرار می دهیم:

$$A \approx I + L \tag{۱۵}$$

که در آن با توجه به شرط $A^TA = I$ می بایست داشته باشیم $L^T + L = 0$. بنابراین ماتریس L برابر است با:

$$L \approx \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} = \epsilon(i\sigma_y). \qquad (۱۶)$$

بنابراین هر عضو گروه $SL(2,R)$ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$A(\theta) = \lim_{N\longrightarrow\infty}(I + \frac{\theta}{N} i\sigma_y)^N = e^{i\theta\sigma_y}. \qquad (۱۷)$$

■ تمرین: فرم صریح ماتریس $A(\theta)$ را بنویسید و نشان دهید که این ماتریس یک دوران به اندازه زوایه θ انجام می دهد.

۵ گروه $O(1,1,R)$

گروهِ $O(2,R)$ مجموعه ماتریس هایی است که ضرب داخلی $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_0y_0 + x_1y_1$ را ناوردا نگاه می دارند. اما ممکن است که ما به دلایلی به نوعی دیگر از ضرب داخلی مثل ضرب داخلی زیر علاقمند باشیم:

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = x_0y_0 - x_1y_1 = \mathbf{x}^T\eta\mathbf{y} \qquad (۱۸)$$

که در آن $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, متریک مربوط به این ضرب داخلی خوانده می شود. در این صورت هر ماتریسی مثل Λ که می بایست این ضرب داخلی را حفظ کند باید در شرط

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta \qquad (۱۹)$$

صدق کند. این نوع ماتریس ها را به دلیل نوع خاص متریک ماتریس های متعامد از نوع $O(1,1)$ می خوانیم. دترمینان این ماتریس ها نیز برابر است با ± 1. آن بخش از این گروه که متناظر با دترمینان $+1$ است زیرگروهی تشکیل می دهد که آن را $SO(1,1,R)$ می خوانیم.

۱.۵ مولدهای گروه $SO(1,1,R)$

مثل همیشه قرار می دهیم:

$$\Lambda \approx I + L. \tag{۲۰}$$

با توجه به این که $det(\Lambda) = 1$ است بدست می اوریم $tr(L) = 0$. هم چنین با توجه به شرط $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ می بایست داشته باشیم $L^T \eta + \eta L = 0$. در نتیجه ماتریس L به شکل زیر در می آید:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} = \epsilon \sigma_1. \tag{۲۱}$$

به این ترتیب گروه $SO(1,1)$ یک گروه یک بعدی است و مولد آن برابر است با σ_1 و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Lambda(\theta) = e^{\theta \sigma_1} = \cosh \theta I + \sinh \theta \sigma_1. \tag{۲۲}$$

■ تمرین: نشان دهید که ماتریس بالا یک خیز لورنتز انجام می دهد.

---

۶ گروه $SP(2,R)$

این گروه در مکانیک کلاسیک اهمیت دارد و گروه همتافته [۵] نامیده می شود. در واقع گروه همتافته نشان دهنده همه تبدیلات کانونیک روی یک فضای فاز است. این گروه نیز روی فضای دوبعدی R^2 اثر می کند. بردارهای این فضا را به صورت $\xi = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ نشان می دهیم. دلیل این نامگذاری خاص آن است که می خواهیم فضای دوبعدی را به صورت فضای فاز یک

---

[۵] Symplectic Group

سیستم مکانیکی با دو درجه آزادی (مختصه + تکانه) در بیاوریم. در این فضا یک نوع ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle \xi, \xi' \rangle := xp' - px'. \tag{۲۳}$$

این ضرب خاص از مکانیک کلاسیک الهام گرفته شده است و آن را می توان به صورت فشرده زیر نیز نوشت:

$$\langle \xi, \xi' \rangle := \xi^T J \xi', \tag{۲۴}$$

که در آن $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ماتریس همتافته [۶] خوانده می شود. گروه $SP(2,R)$ مجموعه تمام ماتریس هایی است که این ضرب داخلی را ثابت نگاه می دارند. بنابراین

$$SP(2,R) := \{S \in GL(2,R) \quad | \quad S^T J S = J, \quad det(S) = 1\}. \tag{۲۵}$$

۱.۶ مولدهای گروه $SP(2,R)$

قرار می دهیم:

$$S \approx I + L. \tag{۲۶}$$

با توجه به این که $det(S) = 1$ است بدست می اوریم $tr(L) = 0$. هم چنین با توجه به شرط $S^T J S = J$ می بایست داشته باشیم $L^T J + J L = 0$. در نتیجه ماتریس L به شکل زیر در می آید:

$$L = \begin{pmatrix} \epsilon_3 & \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \epsilon_1 - \epsilon_2 & -\epsilon_3 \end{pmatrix} = \epsilon_1 \sigma_1 + \epsilon_2 (i\sigma_2) + \epsilon_3 \sigma_3.. \tag{۲۷}$$

[۶] Symplectic Matrix

به این ترتیب گروه $SP(2,R)$ یک گروه سه بعدی است و مولدهای آن برابرند با $\sigma_1, \quad i\sigma_2, \quad \sigma_3$. به این ترتیب هر عضو گروه $SP(2,R)$ به صورت $S = e^{\theta_1\sigma_1+\theta_2 i\sigma_2+\theta_3\sigma_3}$ نوشته می شود. یک مقایسه با مولدهای گروه $SL(2,R)$ نشان می دهد که این گروه در حقیقت با گروه $SL(2,R)$ یکسان است. البته این یکسانی تنها محدود به همین بعد است. در بخش های بعدی که گروه $SP(2n,R)$ را بررسی می کنیم خواهیم دیدکه این گروه با گروه $SL(2n,R)$ یکسان نیست.

- تمرین: آیا دلیل عمیق تری برای یکسان بودن گروه $SP(2,R)$ و گروه $SL(2,R)$ می توانید بیان کنید؟

تا کنون گروه $GL(2,R)$ و چندین زیرگروه مهم آن را بررسی کرده ایم. هم چنین با مفهوم مولدهای بی نهایت کوچک آشنا شده ایم. در بخش بعدی تمامی این ملاحظات را به گروه $GL(n,R)$ و زیرگروه های آن تعمیم می دهیم.

۷ گروه $GL(n,R)$

مجموعه تمام ماتریس های حقیقی $n\times n$ را با $M_n(R)$ نشان می دهیم. این مجموعه یک فضای برداری است، یعنی می توان هر دو عضو آن را با هم جمع کرد و یا یک عضو آن را در یک عدد حقیقی ضرب کرد و حاصل هنوز متعلق به خود این مجموعه باشد. علاوه بر آن این مجموعه نسبت به ضرب بسته است، و عضو خنثی ضرب نیز دارد که همان ماتریس واحد است ولی یک گروه نیست زیرا همه عناصر آن وارون پذیرنیستند. هرگاه خود را محدود به ماتریس های وارون پذیر کنیم، گروه $GL(n,R)$[۷] یعنی گروه ماتریس های حقیقی $n\times n$ بدست می آید. بنابراین می توان نوشت:

$$GL(n,R) := \{g \in M_n(R), \quad | \quad det(g) \in 0\}. \qquad (۲۸)$$

این گروه را می توان به عنوان گروه تبدیلات خطی روی فضای برداری R^n در نظر گرفت که عمل آن به شکل ضرب یک ماتریس در یک بردار است یعنی

$$x \longrightarrow x' = gx, \qquad \forall g \in GL(n,R), \quad x \in R^n, \qquad (۲۹)$$

[۷] General Linear Group of Real Matrices

که در طرف راست ماتریسِ g در بردار x ضرب شده‌است. فرض کنید که V یک فضای برداری حقیقیِ n بعدی باشد. مجموعه تبدیلات خطی وارون پذیر روی فضای برداری V را در نظر بگیرید و آن را با $GL(V)$ نشان دهید. دراین مجموعه ضرب دو تبدیل خطی به صورت عملِ متوالی آنها تعریف می شود، یعنی اگر T و T' دو عضو از $GL(V)$ باشند و $v \in V$ آنگاه TT' به شکل زیر تعریف می شود

$$(TT')v = T(T'v). \tag{۳۰}$$

خواننده براحتی می تواند نشان دهد که این مجموعه یک گروه است. عضو خنثی این گروه نگاشت همانی $Iv = v$ است. بنابراین $GL(V)$ یک گروه است. اما می دانیم که برای فضای برداری V همواره می توان یک پایه انتخاب کرد و دراین پایه هر بردارِ v با مولفه های n تایی اش و هر تبدیل خطی با ماتریسِ $n \times n$ اش متناظر خواهد بود. بنابراین به ازای هر تبدیل خطیِ $T \in GL(V)$ یک ماتریس وارون پذیر متعلق به $GL(n, R)$ وجود دارد و این رابطه یک به یک و پوشا آنچنان است که وقتی دو تبدیل خطی در هم ضرب می شوند، ماتریس های مربوط به آنها در هم ضرب می شوند و به تبدیل همانی نیز ماتریس واحد نسبت داده می شود. نتیجه این تناظر آن است که همه گروه های $GL(V)$ به ازای همه V های n بعدی با گروهِ $GL(n, R)$ یکسان هستند ونیازی به مطالعه تک تکِ آنها نیست.

گروه $GL(n, R)$ دارای n^2 تا پارامتر حقیقی است. تعداد پارامترهای این گروه بعد آن نیز نامیده می شود، بنابراین $GL(n, R)$ یک گروهِ n^2 بعدی است.

---

۸ گروه $SL(n, R)$

یک زیرگروه مهم از $GL(n, R)$ زیرگروهی است که از ماتریس های با دترمینان واحد تشکیل می شود و $SL(n, R)$[۸] خوانده می شود:

$$SL(n, R) := \{g \in GL(n, R) \quad | \quad det(g) = 1\}. \tag{۳۱}$$

[۸] Special Linear Group

واضح است که این گروه دارای $n^2 - 1$ پارامتر حقیقی است. زیر گروه های مختلف $GL(n,R)$ را می توان به این ترتیب نیز معرفی کرد که هر کدام از آنها علاوه بر آنکه یک تبدیل خطی روی R^n هستند، خاصیت اضافه‌ای از بردار های R^n را مثل خاصیت کلی P نیز حفظ می کنند. واضح است که اگر دو تبدیل خطی خاصیت P را حفظ کنند، حاصل ضرب آن دو تبدیل خطی نیز آن دو خاصیت را حفظ می کنند. عضو خنثی نیز آن خاصیت را حفظ می کند. بنابراین مجموعه‌ی تمام این تبدیل ها یک زیر گروه از $GL(n,R)$ تشکیل خواهد داد. حال می توانیم بپرسیم که تبدیلات متعلق به $SL(n,R)$ چه خاصیتی از بردار ها را حفظ می کنند؟ برای پاسخ به این سوال نخست برای سادگی گروه $SL(2,R)$ را درنظر می گیریم. در فضای R^2 هردوبرداری مثل

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

یک متوازی الاضلاع تعریف می کنند. سطح این متوازی الاضلاع را می توان ازرابطه زیر بدست آورد:

$$S(u,v) := |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |u_1 v_2 - u_2 v_1| = |\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}| \tag{۳۲}$$

و یا

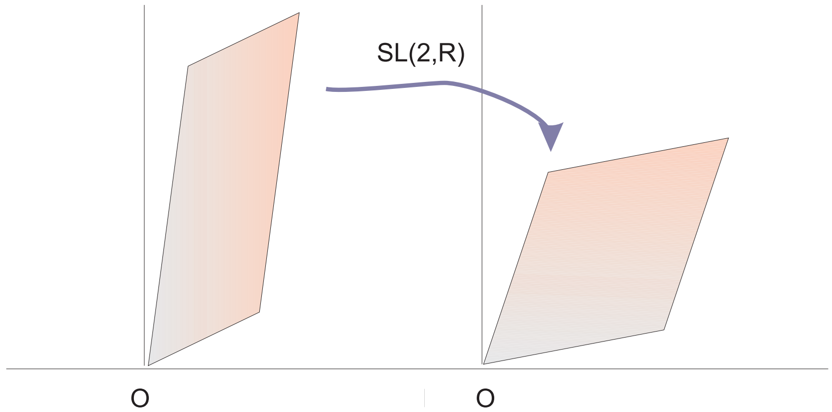
$$S(u,v) = |det\,(u,v)\,| \tag{۳۳}$$

که درآن رابطه آخر علامت | | برای دترمینان بکاررفته است و دررابطه آخر منظورآن است که بردارهای u و v به ترتیب ستون های اول ودوم یک ماتریس مربعی را تشکیل می دهند. حال تبدیل خطی وارون پذیر $T : R^2 \longrightarrow R^2$ را درنظر می گیریم. این تبدیل بردارهای $u,\ v$ را به بردارهای $v' = Tv,\ u' = Tu$ تبدیل می کند . مساحت متوازی الاضلاع جدید عبارت است از:

$$S(u',v') := |\,(u',v')\,| = |\,(Tu,Tv)\,| = |T|\,|\,(u,v)\,| = |T||S(u,v)|. \tag{۳۴}$$

بنابراین اگر دترمینان تبدیل خطی T برابر با 1 باشد مساحت متوازی الاضلاع حفظ خواهد شد. شکل 1.

یادآوری می کنیم که اگر این دترمینان منهای یک هم باشد بازهم این مساحت حفظ خواهد شد اما چنین تبدیلاتی ترتیب بردارهای را عوض خواهند کرد و یک دستگاه راست گرد را به یک دستگاه چپ گرد تبدیل می کنند. علاوه برآن ترکیب چنین



شکل ۱: گروه $SL(2,R)$ مساحت بین بردار ها را حفظ می کند.

تبدیلاتی تشکیل یک گروه نمی دهند زیرا ضرب دوماتریس با دترمینان منهای یک ماتریسی خواهد شد بادترمینان یک. آن دسته از تبدیلات خطی که دترمینان آنهابرابربا 1 است تبدیلات خطی ویژه نامیده می شوند و دراین مثال دوبعدی گروه $SL(2,R)$ را تشکیل می دهند.

استدلال بالا را می توان به ابعاد بالاترنیزتعمیم داد. دریک فضای خطی n بعدی بردارهای $u_1,\ u_2,\cdots,\ u_n$ تشکیل یک متوازی السطوح می دهند که حجم آنها از یک دترمینان بدست می آید. مطابق با رابطه قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & S(u'_1,u'_2,\cdots,\ u'_n) := |\,(u'_1,u'_2,\cdots,u'_n)\,| = |\,(Tu_1,Tu_2,\cdots,Tu_n)\,| \\ = \quad & |T||\,(u_1,u_2,\cdots,u_n)\,| = |T||S(u_1,u_2,\cdots,u_n)|. \end{aligned} \tag{۳۵}$$

بنابر این $SL(n,R)$ را می توان زیرگروهی از $GL(n,R)$ خواند که حجم را حفظ می کند.

۱.۸ مولدهای گروه $SL(n,R)$

هرگاه g متعلق به $SL(n,R)$ باشد به این معناست که $det(g)=1$. می نویسیم

$$g \approx I + L, \tag{۳۶}$$

■ تمرین: نشان دهید که

$$Det(I+L) = 1 + Tr(L) + O(L^2). \tag{۳۷}$$

بنابراین L می بایستی ماتریسی باشد با ردّ برابر با صفر. برای نوشتن مولدها احتیاج به یک نمادگذاری داریم. ماتریس E_{ij} را ماتریسی می گیریم که تنها درایه ij آن برابر با یک و بقیه درایه هایش برابر با صفرند. به عبارت دیگر

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{۳۸}$$

به عبارت دیگر اگر از نمادگذاری کت و برا در مکانیک کوانتومی استفاده کنیم داریم

$$E_{ij} := |i\rangle\langle j|. \tag{۳۹}$$

یک انتخاب برای مولدهای $SL(n,R)$ عبارت است از:

$$\{E_{ij}, \quad 1 \le i \ne j \le n, \quad E_{ii} - E_{nn}, \quad 1 \le i < n\}. \tag{۴۰}$$

■ تمرین: با استفاده از رابطه قبلی مولدهای گروه $SL(2,R)$ را بنویسید. همین کار را برای گروه $SL(3,R)$ انجام دهید.

■ برای ماتریس های حقیقی ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B).$$

با استفاده از این تعریف کاری کنید که مولدهای گروه $SL(n,R)$ همگی برهم عمود بوده و هرکدام نیز بهنجار باشند.

■ تعریف: زیرگروه های یک پارامتره: [۹] در یک گروه ماتریسی n پارامتری که دارای مولدهای $T_1,\ T_2,\ \cdots T_n$ است، مجموعه ماتریس های

$$G_1 \quad := \quad \{e^{\theta_1 T_1}\}$$

[۹] One-Parameter Subgroups

$$
\begin{aligned}
G_2 &:= \{e^{\theta_2 T_2}\} \\
&\cdots \\
G_n &:= \{e^{\theta_n T_n}\}.
\end{aligned}
\tag{۴۱}
$$

را تشکیل می دهیم. هرکدام از این مجموعه ها یک زیر گروه یک پارامتره تشکیل می دهند.

■ تمرین: زیرگروه های یک پارامتره مربوط به $SL(3,R)$ را در نظر بگیرید و شکل صریح ماتریس های مربوط به آن ها را بنویسید.

---

۹ گروه $O(n,R)$

گروه $O(n,R)$ یکی دیگر از زیرگروه های $GL(n,R)$ است که از ماتریس های متعامد تشکیل شده است یعنی

$$
O(n,R) = \{A \in GL(n,R), \quad | \quad A^T = A^{-1}\}. \tag{۴۲}
$$

خواننده براحتی می تواند گروه بودن این مجموعه را ثابت کند. به یک طریق دیگر نیز می توانیم این گروه را معرفی کنیم. هرگاه فضای برداری حقیقی V دارای مجهز به یک ضرب داخلی باشد $\langle , \rangle$ می توان برای آن یک پایه متعامد یکه ساخت. دراین صورت ضرب داخلی هر دوبردار $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ و $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ دراین فضا به صورت زیر درمی آید:

$$
\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y \tag{۴۳}
$$

که درآن x^t ترانهاده x است. یک تبدیل متعامد خطی تبدیلی است که ضرب داخلی بردارها را حفظ کند. یعنی اگر $x' = Ax$ و $y' = Ay$ آنگاه می خواهیم که $x'^t y' = x^t y$ و درنتیجه $A^t A = I$. براحتی معلوم می شود که ترکیب دو تبدیل متعامد یک

تبدیل متعامد است. بنابراین گروه تبدیلات متعامد گروه ماتریس های حقیقی ای است که درشرط $A^tA = I$ صدق می کنند. هرماتریس $A \in O(n, R)$ دارای دترمینان برابر با ± 1 است. آن عده از ماتریس ها که دترمینان $+1$ دارند تشکیل یک زیرگروه می دهند که گروه $SO(n, R)$ نامیده می شود.

ماتریس انعکاس نسبت به صفحه عمود بر یکی از محورها مثل محور x، یعنی ماتریس I_x را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$I_x = \text{diagonal}(-1, 1, 1, \cdots 1). \tag{۴۴}$$

حال براحتی دیده می شود که هرگاه $detg = -1$ آنگاه $det(I_x g) = 1$ و درنتیجه $A := I_x g \in SO(n)$. بنابراین هرماتریس g بادترمینان منهای یک را می توان به صورت $I_x A$ نوشت. این امر بدین معناست که بقیه گروه $O(n)$ یک هم مجموعه راست I_x از زیرگروه $SO(n)$ است. درنتیجه بدست می آوریم

$$O(n) = SO(n) \cup I_x SO(n). \tag{۴۵}$$

ممکن است که خواننده دراین جا بپرسد که در یک فضای برداری V انواع و اقسام ضرب های داخلی را می توان تعریف کرد. آیا به ازای هر ضرب داخلی یک گروه جدید بوجود می آید. فرض کنید که ضرب داخلی را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\langle x, y\rangle = x^T K y, \tag{۴۶}$$

که درآن K یک ماتریس متقارن و مثبت است. ماتریس مثبت ماتریسی است که ویژه مقدارهای آن همه مثبت باشند. مسلم است که رابطه بالا یک ضرب داخلی جدید تعریف می کند و تبدیلاتی که این ضرب داخلی را حفظ کنند نیز تشکیل یک زیر گروه از $GL(n, R)$ می دهند. اگر این زیر گروه را با $O_K(n, R)$ نشان دهیم و $A \in O_K(n, R)$ آنگاه A در شرط زیر صدق می کند:

$$A^T K A = K, \tag{۴۷}$$

با استفاده از اینکه K یک ماتریس مثبت است می توان آن را قطری کرد و سپس با استفاده از ماتریس قطری کننده‌ی آن می توان یک یکسانی بین $O_K(n, R)$ و $O(n, R)$ تعریف کرد.

- الف: فرض کنید که در فضای R^2 ضرب داخلی جدیدی مثل

$$K(x, y) := \langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$$

تعریف کنیم. زیر گروهی که این ضرب داخلی را حفظ می کند را با $O_K(2,R)$ نشان می دهیم. به طور صریح نشان دهید که این گروه یک گروه جدید نیست و با گروه $O(2,R)$ یکسان است.

ب: این کار را برای گروهی که ضرب داخلی زیر را حفظ می کند نیز انجام دهید.

$$Q(x,y) := \langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

۱۰ گروه $SO(n,R)$

داریم:

$$SO(n,R) := \{A \in O(n,R) \quad | \quad det(A) = 1\}. \tag{۴۸}$$

این گروه به طور پیوسته به ماتریس I متصل است و بنابراین می توانیم مولدهای بی نهایت کوچک آن را بدست آوریم. مولدهای بی نهایت کوچک آن ماتریس های پادمتقارن هستند که می توان آن ها را به صورت زیر نوشت:

$$T_{ij} := E_{ij} - E_{ji} = |i\rangle\langle j| - |j\rangle\langle i|. \tag{۴۹}$$

و E_{ij} ماتریسی است که تنها درایه غیرصفر آن درسطر i ام و ستون j ام و برابربا 1 است. این رابطه هم چنین نشان می دهد که تعداد پارامترهای گروه $SO(n)$ برابراست با $\frac{n(n-1)}{2}$.

- برای ماتریس های حقیقی ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle A,B\rangle = tr(A^TB).$$

با استفاده از این تعریف کاری کنید که مولدهای گروه $SO(n)$ همگی برهم عمود بوده و هرکدام نیز بهنجار باشند.

یک عضو دلخواه از این گروه را می توانیم به صورت

$$A(\boldsymbol{\theta}) = e^{\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{T}}$$

نوشت که درآن

$$\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{T} := \sum_{1\le i<j\le n}\theta_{ij}T_{ij},$$

و θ_{ij} پارامترهای گروه هستند. یک زیرگروه یک پارامتری در این گروه زیرگروهی است که در آن تنها یکی از پارامتر ها غیر صفر است. مثلا می توانیم بنویسیم:

$$G_{12} := \{A\in SO(n,R) \quad | \quad A = e^{\theta_{12}T_{12}}\}. \tag{۵۰}$$

■ تمرین: الف: نشان دهید که $A = e^{\theta_{12}T_{12}}$ یک دوران در صفحه 12 انجام می دهد.

ب: فرض کنید که با گروه $SO(5)$ سرو کار داریم. اثر عناصر زیر را روی یک بردار در R^5 بدست آورید:

$$A = e^{\theta T_{12}}e^{\phi T_{45}} \qquad B = e^{\theta T_{12}}e^{\phi T_{23}}e^{\gamma T_{34}} \tag{۵۱}$$

دقت کنید که اگر چه می توان $e^{\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{T}}$ را به صورت $e^{\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}}$ نوشت که در آن $\mathbf{n}$ یک بردار یکه است و $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$ اما در حالت کلی (یعنی بعدهایی بجز بعد ۲ و بعد ۳) نمی توان گفت که یک دوران با یک محور و یک زاویه مشخص می شود. دلیل آن هم این است که n یک بردارنیست. می توان به این مطلب از زاویه دیگری نیز نگاه کرد به این صورت که اگر برای هر دوران یک محور مشخص کنیم آنچه که از دوران باقی خواهد ماند دیگر یک زاویه تنها نیست. این موضوع از همریختی

$$SO(n)/SO(n-1) \equiv S^{n-1}$$

که در درس گذشته ثابت کردیم نیز معلوم است. محور دوران توسط یک نقطه از کره S^{n-1} مشخص می شود اما آنچه که باقی می ماند تنها یک زاویه نیست بلکه یک عضو گروه $SO(n-1)$ است که درواقع دوارنی است که آن محور را ثابت نگاه می دارد.

۱.۱۰ گروه دوران در سه بعد

بنابر آنچه که دیدیم، می توانیم بگوییم که دوران های سه بعدی دارای سه مولد هستند. این مولدها را می توان $T_{12},\ T_{23},\ T_{31}$ نامید. این مولدها به ترتیب دوران هایی در صفحه های $(1,2),\ (2,3),\ (3,1)$ ایجاد می کنند. تنها در سه بعد است که می توانیم بگوییم که دوران در صفحه ی $(1,2)$ را می توان به صورت دورانی حول محور 3 در نظر گرفت. این مسئله برای دوران در صفحات دیگر هم صادق است. به این دلیل است که می توان دوران های فضای سه بعدی را با یک محور دوران و یک زاویه دوران توصیف کرد. بیان دیگری از این موضوع با توجه به آنچه که در درس گذشته یادگرفتیم امکان پذیر می شود. در آن درس ثابت کردیم که گروه $SO(3)$ روی کره دوبعدی به صورت تراگذارعمل می کند و زیرگروه همسانگردآن عبارت است از $SO(2)$ وازاین مطلب استفاده کردیم و دیدیم که به عنوان مجموعه همریختی زیربرقراراست :

$$SO(3)/SO(2) \equiv S^2. \tag{۵۲}$$

حالا می توانیم معنای شهودی این همریختی را بینیم. این رابطه درواقع بیان کننده این است که هرعنصر گروه $SO(3)$ که چیزی جزیک دوران نیست بایک زاویه دوران ($So(2)$) و یک بردار یکه که محوردوران را مشخص می کند و بنابراین یک نقطه روی کره S^2 است، تعیین می شود. به عبارت دیگر هرگاه محوردوران را مشخص کنید، که به معنای معین کردن یک هم مجموعه از $SO(3)/SO(2)$ است تمام اعضای آن هم مجموعه از تغییر زوایه دوران به ازای همان محوردوران بوجود می آیند. با تغییر محوردوران همه اعضای گروه $SO(3)$ بوجود می آیند.

آنچه را که گفتیم به شکل بازهم صریح تر و روشن تری می توان دریافت. نخست دقت می کنیم که مولدهای گروه $SO(3)$ به شکل زیر هستند که در آن نام مولدها را به شکل مناسبی عوض کرده ایم:

ک

$$L_1 \equiv T_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_2 \equiv T_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_3 \equiv T_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۵۳}$$

می توان براحتی دید که درایه های ماتریس های فوق از رابطه فشرده زیربدست می آیند:

$$(L_j)_{kl} = -\epsilon_{jkl} \tag{۵۴}$$

و درنتیجه اگر پارامترهای این گروه را به جای $\theta_{12},\ \theta_{23},\ \ \theta_{31}$ با $\theta_3,\ \theta_1,\ \theta_2$ نشان دهیم می توانیم یک ماتریس دوران بی نهایت کوچک را به صورت زیر بنویسیم:

$A = I + \theta_{12}T_{12} + \theta_{23}T_{23} + \theta_{31}T_{31} = I + \theta_1 L_1 + \theta_2 L_2 + \theta_3 L_3$ نشان بدهیم. در نتیجه با تعریف $\boldsymbol{\theta} = \theta\ \mathbf{n}$ می توانیم بنویسیم

$$A_{kl} = \delta_{kl} + \theta n_j (L_j)_{kl} = \delta_{kl} - \theta n_j \epsilon_{jkl}. \tag{۵۵}$$

حال وقتی که چنین ماتریسی روی بردار سه بعدی $r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ اثر بکند آن را تبدیل به برداری مثل $r' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ می کند به نحوی که:

$$r' = gr \longrightarrow x'_k = g_{kl}x_l = (\delta_{kl} - \theta n_j \epsilon_{jkl})x_l = x_k - \theta n_j \epsilon_{jkl} x_k \tag{۵۶}$$

و یا اگر به رابطه ضرب خارجی بردارها درفضای سه بعدی توجه کنیم

$$r' = r + \theta n \times r. \tag{۵۷}$$

اما این رابطه به این معناست که بردار r حول محور n به اندازه زاویه کوچک θ چرخیده است. بنابراین ماتریس g یک دوران حول محور n به اندازه زاویه θ ایجاد کرده است. یک دوران حول محور $\mathbf{n}$ به اندازه زاویه θ به صورت زیر خواهد بود:

$$R_{\mathbf{n}}(\theta) = e^{\theta \mathbf{n}\cdot\mathbf{L}}. \tag{۵۸}$$

■ تمرین: یک بردار $\mathbf{r}$ تحت دوران بالا قرار می گیرد و تبدیل به بردار $\mathbf{r}'$ می شود. شکل صریح این بردار را بدست آورید.

۱۱ گروه $O(p,q)$

ممکن است که ضرب داخلی که روی فضای حقیقی V تعریف کرده ایم مثبت نباشد. مهمترین مثال این نوع ضرب داخلی، عبارت از ضربی که برای چهاربردارهای فضازمان تعریف می کنیم که درآن برای دو چهاربردار $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ و $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle x, y\rangle := x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = x^t\eta y, \tag{۵۹}$$

که درآن

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{۶۰}$$

متریک فضازمان خوانده می شود. این متریک یک متریک شبه اقلیدسی از نوع $(1,3)$ خوانده می شود.
درحالت کلی می توان روی یک فضا متریکی از نوع (p,q) تعریف کرد که روی قطرآن p تا یک و q تا منهای یک قراردارد.
دقت کنیدکه دریک فضای حقیقی باتغییرپایه نمی توان -1 ها را به 1 تبدیل کرد.
حال اگر روی یک فضا متریکی از نوع (p,q) مثل

$$\eta = \text{diagonal}(1, 1\cdots 1, -1, -1, \cdots -1), \tag{۶۱}$$

تعریف کرده باشیم آنگاه مجموعه تبدیلات خطی Λ که ضرب داخلی بردارها را حفظ کنند می بایست درشرط

$$\Lambda^t\eta\Lambda = \eta \tag{۶۲}$$

صدق کنند. مجموعه این تبدیلات یک گروه تشکیل می دهد که گروه $O(p,q)$ نامیده می شود. بنابراین گروه لورنتزهمان گروه $O(1,3)$ است. این گروه یک زیر گروه دارد که متشکل از ماتریس های با دترمینان برابر با یک است. این زیرگروه $SO(p,q)$ نامیده می شود.

■ تمرین: مولدهای گروه $SO(p,q)$ را بدست آورید. تعداد پارامترهای این گروه را بدست آورید.

■ تمرین: چرا نمی توان بین گروه $O(p,q)$ و گروه $O(p+q)$ یکسانی برقرار کرد؟ این موضوع را با ذکر جزئیات لازم توضیح دهید.

■ تمرین: الف: مولدهای گروه $SO(2,2)$ را بدست آورید.

ب: شکل ماتریس های مربوط به زیرگروه های یک پارامتری این گروه را بدست آورید.

در این جا مناسب است که به دلیل اهمیت گروه $SO(1,3)$ در فیزیک که به تبدیلات لورنتز در فضای چهاربعدی مربوط است، به بررسی تفصیلی این گروه بپردازیم. این کار را در بخش بعدی انجام می دهیم.

۱.۱۱ گروه لورنتز درفضا زمان چهاربعدی

دراین بخش می خواهیم گروه لورنتز درفضازمان ۳ + ۱ بعدی یا $O(1,3)$ را بهتر بشناسیم. این گروه مجموعه تبدیلاتی است که ضرب داخلی (59) را ثابت نگاه می دارند. دیدیم که هرتبدیل $\Lambda \in O(1,3)$ دررابطه $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ صدق می کند. اگر ازطرفین این رابطه دترمینان بگیریم متوجه می شویم که $\det \Lambda = \pm 1$. بنابراین گروه لورنتز به دوناحیه مجزا تقسیم می شود که با تغییر پیوسته پارامترها نمی توان از یک ناحیه به ناحیه دیگر رفت.

حال به یک قید دیگر توجه می کنیم. اگر عنصر 00 را برای هردوطرف رابطه (62) حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\sum_{\mu=0,\nu=0}^{3} \Lambda_{\mu 0} \eta_{\mu\nu} \Lambda_{\nu 0} = 1 \qquad (۶۳)$$

حال بااستفاده از قطری بودن η و فرم صریح آن در (60) طرف چپ تبدیل می شود به

$$\Lambda_{00}^2 = 1 + {\Lambda_{10}}^2 + {\Lambda_{20}}^2 + {\Lambda_{30}}^2. \qquad (۶۴)$$

این رابطه نشان می دهد که یا $\Lambda_{00} \geq 1$ و یا $\Lambda_{00} \leq -1$. بنابراین هرکدام از دو ناحیه قبلی به نوبه خود به دو دو ناحیه‌مجزا تقسیم می شوند. درنتیجه گروه لورنتز از چهارناحیه مجزا تشکیل می شود ، که می توان آنها را به شکل زیر نام گذاری کرد:

$$\begin{aligned} O(1,3)^+_\uparrow &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det\Lambda = 1, \quad \Lambda_{00} \geq 1\} \\ O(1,3)^+_\downarrow &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det\Lambda = 1, \quad \Lambda_{00} \leq -1\} \\ O(1,3)^-_\uparrow &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det\Lambda = -1, \quad \Lambda_{00} \geq 1\} \\ O(1,3)^-_\downarrow &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det\Lambda = -1, \quad \Lambda_{00} \geq -1\}. \end{aligned} \qquad (۶۵)$$

مسلم است که از این چهارناحیه دوناحیه آخر نمی توانند زیرگروه باشند زیرا دترمینان هرعضو آنها برابربا منهای یک است و هردو عضوی ازآنها که درهم ضرب شود، دترمینان یک خواهد داشت. ناحیه دوم نیز زیرگروه نیست زیرا شامل عنصر واحد نیست. به شرط $\Lambda_{00} \leq -1$ دراین ناحیه توجه کنید. تنهاناحیه اول زیرگروه است که آن را گروه تبدیلات ویژه لورنتز می نامیم.

■ تمرین: نشان دهید که از میان نواحی بالا $O(1,3)^+$ یک زیرگروه است. مهم ترین مسئله این است که نشان دهید این قسمت نسبت به عمل ضرب و عمل وارون بسته است.

برای آنکه ساختمان گروه لورنتز را بهتربشناسیم و ازلحاظ فیزیکی نیز معنای تبدیلات این چهارناحیه را بهتر بفهمیم ماتریس های زیر را درنظرمی گیریم.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (۶۶)$$

این دو تبدیل هردو متعلق به گروه لورنتز هستند. T تبدیل وارونی زمان را ایجاد می کند و π تبدیل انعکاس فضایی حول مبداء مختصات فضا را بوجود می آورد. حال اگر $\Lambda \in O(1,3)^+{}_\uparrow$، آنگه براحتی می توان دید که

$$T\Lambda \in O(1,3)^-{}_\downarrow, \qquad \pi\Lambda \in O(1,3)^-{}_\uparrow, \qquad (\pi T)\Lambda \in O(1,3)^-{}_\downarrow. \qquad (۶۷)$$

درنتیجه قسمت های مختلف چهارگانه فوق هم‌مجموعه های عناصر π, T, I و πT هستند. هرگاه Λ یک تبدیل ویژه لورنتز باشد، آنگاه $T\Lambda$، $\pi\Lambda$ و $\pi T\Lambda$ تبدیل هایی هستند که درآن ها Λ با وارونی زمان، انعکاس فضایی حول مبداء و یا هردو دنبال شده

اند. ازاین به بعد ماتوجه خود را به تبدیلات ویژه لورنتز معطوف می کنیم و غالب اوقات نیز صفت ویژه را برای آنها بکارنمی بریم. این تبدیلات تبدیلاتی هستند که به طور پیوسته به تبدیل همانی I متصل هستند. بهترین کارآن است که تبدیلات بی نهایت کوچک را مطالعه کنیم. هرتبدیلی از این نوع به شکل زیراست:

$$\Lambda \approx I + b \tag{۶۸}$$

که درآن درایه های b کوچکند. شرط (62) درمورد این ماتریس تبدیل می شود به

$$\eta b + b^t \eta = 0. \tag{۶۹}$$

درنتیجه b می بایست به فرم زیرباشد:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1 & 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \theta_2 & \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ \theta_3 & -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۷۰}$$

می توان این ماتریس را به صورت زیرنوشت:

$$b = \theta_1 K_1 + \theta_2 K_2 + \theta_3 K_3 + \epsilon_1 J_1 + \epsilon_2 J_2 + \epsilon_3 J_3, \tag{۷۱}$$

که درآن

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{۷۲}$$

و

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۷۳}$$

بدلایلی که بزودی خواهیم دید K ها مولد های خیز و J ها مولد های دوران نامیده می شوند. این که J ها مولد های دوران هستند باتوجه به آنکه روی زمان هیچ کاری نمی کنند و هم چنین باتوجه به آنچه که درمورد گروه دوران دربخش های قبل دیدیم واضح است. برای K ها کافی است که بدون نقض کلیت تبدیل زیررا درنظربگیریم:

$$\Lambda_1 := I + \theta K_1. \tag{۷۴}$$

براحتی دیده می شود که Λ_1 نقطه $x = (t, x, y, z)$ از فضا زمان را تبدیل به نقطه $x' = (t', x', y', z')$ می کند که درآن:

$$\begin{aligned} t' &= t + \theta x \\ x' &= \theta t + x \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{۷۵}$$

که فرم بی نهایت کوچک یک تبدیل لورنتز درراستای x با پارامتر θ و یا سرعت $v = \tanh\theta$ است. درواقع یک خیز محدود درراستای x را می توان به شکل زیربدست آورد:

$$\Lambda = \lim_{N \longrightarrow \infty} (I + \frac{\theta}{N} K_1)^N = e^{\theta K_1}. \tag{۷۶}$$

درحالت کلی یک تبدیل خیزخالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\theta_1 K_1 + \theta_2 K_2 + \theta_3 K_3} = e^{\theta n \cdot K}. \tag{۷۷}$$

این خیز بااندازه θ یا سرعت $v = \tanh\theta$ ودرراستای n است. هم چنین یک دوران خالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\epsilon_1 J_1 + \epsilon_2 J_2 + \epsilon_3 J_3} = e^{\theta n \cdot J}, \tag{۷۸}$$

که درآن θ زاویه دوران و n محوردوران است.

■ تمرین: ماتریس مربوط به یک خیز لورنتز را که با سرعت v و در راستای $(\theta = 30^\circ, \quad \phi = 30^\circ)$ انجام می شود پیدا کنید.

۲.۱۱ گروه لورنتز درفضا زمان های با بعد دلخواه

آنچه که دربخش قبل گفتیم تعمیم سرراستی به فضازمان $d + 1$ بعد دارد. این تعمیم با توجه به آنچه که درمورد گروه $SO(n)$ گفتیم برای خواننده دشواری بخصوصی به همراه ندارد. تنها به نکات اصلی اشاره می کنیم. دراین جا بازهم گروه لورنتز به چهارقسمت گفته شده در (65) تقسیم می شود. یک تبدیل بی نهایت کوچک لورنتز به صورت زیرنوشته می شود:

$$\Lambda = I + \sum_i \gamma_i K_i - \sum_{1\leq i<j\leq d} \epsilon_{ij} J_{ij}, \tag{۷۹}$$

که درآن

$$K_i = E_{0i} + E_{i0}, \qquad J_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, \tag{۸۰}$$

مولد های خیز درراستای i و دوران درصفحه ij هستند.

یک تبدیل محدود لورنتز عبارت خواهد بود از:

$$\Lambda = e^{\phi n.K + \theta m\cdot J} \tag{۸۱}$$

که درآن $m \cdot J = \sum_{1\leq i<j\leq d} m_{ij} J_{ij}$.

۱۲ گروه $SP(2n,R)$

یک گروه مهم دیگر که می بایست معرفی کنیم گروه همتافته یا $Symplectic$ است. این گروه درمکانیک کلاسیک اهمیت دارد. می دانیم که درمکانیک هامیلتونی وضعیت هردستگاه با یک نقطه در یک فضای فاز $2n$ بعدی توصیف می شود. مختصات موضعی فضای فاز را می توان به شکل زیر درنظرگرفت:

$$R=\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ .\\ q_n\\ p_1\\ p_2\\ .\\ p_n\end{pmatrix}. \tag{۸۲}$$

کروشه پوآسون مختصات مختلف به صورت زیراست :

$$\begin{aligned}\{q_i,q_j\} &= 0\\ \{p_i,p_j\} &= 0\\ \{q_i,p_j\} &= \delta_{ij},\end{aligned} \tag{۸۳}$$

که می توان آن را به فرم فشرده زیرنوشت:

$$\{R_i,R_j\}=J_{ij}, \tag{۸۴}$$

که درآن J ماتریس $2n$ بعد ی زیراست:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{۸۵}$$

هم چنین می دانیم که کروشه پوآسون هردو تابع f, g درفضای فاز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \tag{۸۶}$$

این کروشه به شکل فشرده زیرقابل بیان است:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial R_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial R_j}, \tag{۸۷}$$

که در آن ازقرارداد جمع روی شاخص های تکراری استفاده شده است.

تبدیل یکانی از مختصات R به مختصات R' تبدیلی است که کروشه پوآسون بین مختصه ها را تغییر ندهد. هرگاه تبدیل فوق یک تبدیل خطی باشد یعنی هرگاه

$$R' = SR, \quad R'_i = S_{ij} R_j \tag{۸۸}$$

که درآن S یک ماتریس با درایه های ثابت است آنگاه یکانی بودن تبدیل به این معناست که شرط زیر برقرار باشد:

$$\{R'_i, R'_j\} \equiv S_{ik} S_{jl} \{R_k, R_l\} \equiv S_{ik} S_{jl} J_{kl} \tag{۸۹}$$

هرگاه بخواهیم که متغیرهای جدید نیز متغیرهای کانونیک باشند یعنی تبدیل (88) یک تبدیل کانونیک باشد می بایست طرف راست این عبارت برابربا J_{ij} باشد یعنی

$$S_{ik} J_{kl} S_{ik} = J_{ij} \tag{۹۰}$$

و یا به شکل فشرده تر:

$$SJS^t = J. \tag{۹۱}$$

تبدیلات خطی که دررابطه فوق صدق می کنند تبدیلات کانونیک نامیده می شوند. البته تبدیل کانونیک الزاماً خطی نیست و مابرای سادگی بحث، خود را به تبدیلات خطی محدود کرده ایم. مجموعه تبدیلاتی از این نوع یک گروه تشکیل می دهند که گروه همتافته یا گروه $Symplectic$ نامیده می شود.

ازاین انگیزش فیزیکی که بگذریم می توان گروه تبدیلات همتافته را به شکل کلی زیر تعریف کرد.

فرض کنید که یک فضای خطی حقیقی $2n$ بعدی با مختصات

$$R := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ q_n \\ p_1 \\ p_2 \\ . \\ p_n \end{pmatrix} \tag{۹۲}$$

داریم. دراین فضابین هردونقطه R و R' یک ضرب داخلی ازنوع زیرتعریف شده است.

$$\langle R, R' \rangle := R^t J R, \tag{۹۳}$$

که درآن

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{۹۴}$$

و I_n نشان دهنده ماتریس واحد $n \times n$ است. مجموعه تبدیلات خطی ای که ین ضرب داخلی را حفظ می کنند تشکیل یک گروه می دهند که گروه همتافته یا $SP(2n)$ نامیده می شود.

۱.۱۲ تبدیلات بی نهایت کوچک همتافته

هرگاه $S = I + a$ یک تبدیل بی نهایت کوچک همتافته باشد آنگاه ازرابطه $S^tJS = J$ بدست می آوریم $a^tJ + Ja = 0$. اگر a را به صورت بلوکه قطری

$$a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \tag{۹۵}$$

درنظربگیریم ازرابطه $a^tJ + Ja = 0$ بدست می آوریم:

$$Z = Z^t, \qquad Y = Y^t, \qquad W = -X^t, \tag{۹۶}$$

ودرنتیجه شکل ماتریس a به صورت زیردرمی آید:

$$a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^t \end{pmatrix} \tag{۹۷}$$

که درآن Y و Z ماتریس های متقارن n بعدی هستند و X یک ماتریس دلخواه n بعدی است. یک شمارش ساده نشان می دهد که تعدادپارامترهای حقیقی و مستقل این ماتریس برابراست با $n(2n+1)$. بنابراین گروه $SP(2n)$ یک گروه $n(2n+1)$ پارامتری است.

ساده ترین گروه ازاین نوع گروه $SP(2)$ است که قبلا آن را مطالعه کرده ایم.

■ تمرین: الف: مولدهای گروه $SP(4,R)$ را بدست آورید.

ب: شکل ماتریس ها را در زیرگروه های یک پارامتری گروه $SP(4,R)$ بدست آورید.

■ تمرین: شکل کلی مولدهای گروه $SP(2n,R)$ را برحسب ماتریس های E_{ij} بنویسید.

تا کنون فقط گروه های ماتریسی روی میدان اعداد حقیقی را مطالعه کردیم. علی الاصول می توان گروه های ماتریسی را روی هر نوع میدانی تعریف کرد. مهم ترین گروه های ماتریسی که باید مطالعه کنیم گروه ماتریس $GL(n,C)$ و زیر گروه های آن است. مثل حالت قبلی، این بار هم کار خود را با $GL(2,C)$ و زیرگروه های آن شروع می کنیم و سپس مطالعات خود را به بعد دلخواه تعمیم می دهیم.

۱۳ گروه $GL(2,C)$

ساده ترین گروه ماتریسی مختلط گروه ماتریس های وارون پذیر دوبعدی مختلط است که آن را با $GL(2,C)$ نشان می دهیم. بنابراین داریم:

$$GL(2,C) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad | \quad a,b,c,d \in C, \quad ad-bc \neq 0\}. \tag{۹۸}$$

این گروه یک گروه هشت پارامتره یا هشت بعدی است. به عبارت دیگر این گروه دارای چهار پارامتر مختلط و هشت پارامتر حقیقی است.

۱۴ گروه $SL(2,C)$

زیرگروهی از گروه $GL(2,C)$ که از ماتریس های با دترمینان برابر با یک تشکیل شده گروه $SL(2,C)$ نامیده می شود.

$$SL(2,C) = \{g \in GL(2,C) \quad | \quad det(g) = 1\}. \tag{۹۹}$$

این گروه دارای ۶ تا پارامتر است.

■ تمرین: نشان دهید که $GL(2,C)/SL(2,C) \equiv Z_2$.

۱.۱۴ مولدهای گروه $SL(2,C)$

تا کنون یادگرفته ایم که روش بدست آوردن مولدهای یک گروه چگونه است. به همین دلیل از این به بعد نحوه بدست آوردن مولدها را در گروه های ماتریسی مختلف به اختصار توضیح می دهیم. برای گروه $SL(2,C)$ مولدها می بایست ماتریسی های بدون رد و مختلط باشند. می توانیم مولدها را به شکل زیر انتخاب کنیم:

$$\begin{aligned} &K_1=\sigma_1, \qquad K_2=\sigma_2, \qquad K_3=\sigma_3, \\ &J_1=i\sigma_1, \qquad J_2=i\sigma_2, \qquad J_3=i\sigma_3. \end{aligned} \tag{۱۰۰}$$

■ تمرین: الف: چهاربردار $r=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ را در نظر گرفته و ماتریس زیر را تشکیل دهید:

$$P_r := \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix}. \tag{۱۰۱}$$

ماتریس $\Lambda_1 := e^{\theta K_1}$ را بدست آورده و سپس آن را به صورت زیر روی P_r اثر دهید:

$$P_r \longrightarrow \Lambda_1 P_r \Lambda_1^\dagger = P_{r'}. \tag{۱۰۲}$$

بردار r' را بدست آورید. نتیجه خود را تعبیر کنید.

ب: کاری را که در قسمت الف انجام دادید برای $\Lambda_2 := e^{\theta K_2}$ و $\Lambda_3 := e^{\theta K_3}$ نیز تکرار کنید.

پ: کاری را که در قسمت های الف و ب انجام دادید برای ماتریس های $R_1 := e^{\theta J_1}$ $R_2 := e^{\theta J_2}$ $R_3 := e^{\theta J_3}$ نیز تکرار کنید.

۱۵ گروه $U(2)$

حال به زیرگروهی از $GL(2,C)$ می پردازیم که چه از نظر فیزیکی و چه از نظر ریاضی اهمیت خاص دارد. این گروه از ماتریس های یکانی دو بعدی تشکیل شده که روی فضای دوبعدی مختلط یا

$$C^2 := \{\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad | \quad x, y \in C\}$$

اثر می کنند و ضرب داخلی

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle := \mathbf{z}^\dagger \mathbf{w}$$

را ثابت نگاه می دارند. دترمینان هر ماتریس متعلق به این گروه یک فاز خالص است و به همین جهت این گروه یک پارچه است و مثل $O(2,R)$ از دو پارچه جدا از هم تشکیل نشده است.

این گروه یک زیرگروه موسوم به $SU(2)$ دارد که ازماتریس های با دترمینان یک تشکیل شده ا ست. هرماتریس $U \in U(2)$ را می توان به صورت $U = e^{i\phi} g$ نوشت که درآن $g \in SU(2)$ است. درنتیجه هم مجموعه های $S(2)$ در $U(2)$ هرکدام با یک فاز یعنی $e^{i\phi}$ مشخص می شوند. این معنای شهودی رابطه $U(2)/SU(2) \equiv U(1)$ است که درفصل قبل دیدیم. این رابطه هم چنین نشان می دهد که برای آنکه عناصر $U(2)$ را پارامتریزه کنیم کافی است که عناصر $SU(2)$ راپارامتریزه کنیم . زیراهرعنصر $U(2)$ از ضرب کردن یک فاز $e^{i\phi}$ دریک عنصر $SU(2)$ بدست می آید. حال فرض کنید که $g \in SU(2)$. g را به شکل $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ قرارمی دهیم و شرط $g^\dagger g = I$ رااعمال می کنیم. بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} a\bar{a} + b\bar{b} &= 1 \\ c\bar{c} + d\bar{d} &= 1 \end{aligned}$$

$$a\bar{c} + b\bar{d} = 0$$
$$ad - bc = 1. \qquad (۱۰۳)$$

ترکیب این رابطه ها منجر به این می شود که $b = -\bar{c}$ و $a = \bar{d}$ ونهایتاً ماتریس g به شکل زیردرمی آید:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \qquad (۱۰۴)$$

باقراردادن $a = \cos\theta e^{i\alpha}$ و $b = \sin\theta e^{i\beta}$ به پارامتربندی زیر برای عناصر $SU(2)$ می رسیم:

$$g \in SU(2) \qquad \longrightarrow \qquad g = \begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\beta} \\ -\sin\theta e^{-i\beta} & \cos\theta e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \qquad (۱۰۵)$$

۱.۰.۱۵ مولد های بی نهایت کوچک گروه $SU(2)$

برای بدست آوردن مولدهای گروه $SU(2)$ تبدیلات بی نهایت کوچک را درنظر می گیریم.قرار می دهیم $g \approx I + a \in SU(2)$، که درآن a ماتریسی بادرایه های کوچک است. شرط یکانی بودن منجرمی شود به اینکه

$$a + a^\dagger = 0, \qquad (۱۰۶)$$

یعنی اینکه a پادهرمیتی باشد. ازطرفی اگر دترمینان $I + a$ را مساوی صفر قراردهیم می بینیم که می بایست $tr(a) = 0$ باشد. بنابراین a را می توان به شکل زیرنوشت:

$$a = \begin{pmatrix} i\epsilon_3 & i\epsilon_1 + \epsilon_2 \\ i\epsilon_1 - \epsilon_2 & -i\epsilon_3 \end{pmatrix}, \qquad (۱۰۷)$$

ویا

$$a = \epsilon_1 T_1 + \epsilon_2 T_2 + \epsilon_3 T_3, \qquad (۱۰۸)$$

که درآن

$$T_1 := i\sigma_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 := i\sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3 := i\sigma_3 = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (۱۰۹)$$

مولد های گروه $SU(2)$ نامیده می شوند. می توان با نوشتن $\theta(n_1,n_2,n_3) =: (\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ که درآن $n=(n_1,n_2,n_3)$ یک برداریکه است، تبدیل بی نهایت کوچک $SU(2)$ را به شکل زیرنوشت:

$$g \approx I + i\theta n\cdot\sigma, \tag{۱۱۰}$$

وازآنجا تبدیل محدود $SU(2)$ شکل زیر را به خود می گیرد:

$$g\in SU(2) \qquad \longrightarrow \qquad g=e^{i\theta n\cdot\sigma}. \tag{۱۱۱}$$

■ تمرین: الف: بردار $r=(x^1,x^2,x^3)$ را در نظر گرفته و ماتریس زیر را تشکیل دهید:

$$Q_r := \begin{pmatrix} x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \tag{۱۱۲}$$

ماتریس $R_1(\theta):=e^{\theta T_1}$ را بدست آورده و سپس آن را به صورت زیر روی Q_r اثر دهید:

$$Q_r \longrightarrow T_1(\theta)Q_rT_1^\dagger = Q_{r'}. \tag{۱۱۳}$$

بردار r' را بدست آورید. نتیجه خود را تعبیر کنید.

ب: کاری را که در قسمت الف انجام دادید برای $R_2(\theta):=e^{\theta T_2}$ و $R_3(\theta):=e^{\theta T_3}$ نیز تکرار کنید.

در گروه های ماتریسی حقیقی دیدیم که در کنار گروه $O(2,R)$ گروه $O(1,1,R)$ نیز وجود دارند. فلسفه وجودی این گروه ماتریسی این بود که ضرب داخلی فضای دوبعدی می تواند به جای $\langle x,y\rangle = x^0y^0+x^1y^1$ به صورت $\langle x,y\rangle_s := x^0y^0-x^1y^1$, باشد. به همین ترتیب نیز می توان گروه $U(1,1)$ و یا گروه $U(p,q)$ را تعریف کرد. این گروه ها کاربردهای وسیعی در فیزیک ندارند به همین دلیل از توصیف بیشتر آنها خودداری می کنیم. حال وقت آن رسیده است که به گروه های مختلط n بعدی بپردازیم. بزرگترین گروه این دسته $GL(n,C)$ است .

۱۶ یکسانی گروه های $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$

می دانیم که گروه $SO(3)$ گروه دوران های فضای سه بعدی اقلیدسی است. هرگاه $A \in SO(3)$،یک دوران و $\vec{r} \in R^3$ یک بردارسه بعدی باشد آنگاه

$$\vec{r'} = A\vec{r} \tag{۱۱۴}$$

دوران یافته $\vec{r}$ است. ازطرف دیگر می خواهیم نشان دهیم که دوران های فضای سه بعدی را با ماتریس های $SU(2)$ که دوبعدی هستند نیز می توان انجام داد. برای اینکه این نتیجه به ظاهرعجیب را بفهمیم به ترتیب زیر پیش می رویم: به ازای هربردار $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، ماتریس P را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$P := \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \equiv x_i\sigma_i = \vec{r} \cdot \vec{\sigma}. \tag{۱۱۵}$$

که دررابطه آخر ازقرارداد جمع روی اندیس های تکراری استفاده شده است و $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

این ماتریس خاصیت های زیررادارد:

الف: هرمیتی است.

ب : بدون رد است.

ج : $detP = -\vec{r} \cdot \vec{r}$.

حال باماتریس $U \in SU(2)$ تبدیل زیر را روی این ماتریس انجام می دهیم:

$$P' = UPU^\dagger \tag{۱۱۶}$$

حال خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که ماتریس P' نیزدارای همان خاصیت های الف تا ج است. چنین ماتریسی دقیقاً همان فرمی را دارد که دررابطه (115) آمده است. بنابراین این ماتریس را نیزمی توان به یک بردارباهمان اندازه نسبت داد.یعنی می توان نوشت :

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \equiv x'_i\sigma_i = \vec{r'} \cdot \vec{\sigma}. \tag{۱۱۷}$$

بنابراین ماتریس یکانی U بردار سه بعدی r را به بردار r' باهمان اندازه تبدیل می کند. ضمناً اگر U نزدیک به ماتریس واحد باشد، r نیزنزدیک r' خواهد بود. بنابراین U واقعاً یک دوران ایجادمی کند. این دوران بایک ماتریس $A \in SO(3)$ انجام می شود. یعنی

$$r' = Ar \tag{۱۱۸}$$

بنابراین به هرماتریس $U \in SU(2)$ می توانیم یک ماتریس $A \in SO(3)$ نسبت بدهیم که همان تبدیل را روی بردارهای سه بعدی اعمال می کند. حال فرض کنیدکه بعداز تبدیل U تبدیل U' رااعمال کنیم که ماتریس متناظرباآن در $SO(3)$، A' است. دراین صورت بردار r' تبدیل به بردار r'' می شود وداریم:

$$P' = UPU^\dagger \qquad P'' = U'P'U'^\dagger \tag{۱۱۹}$$

$$r' = Ar \qquad r" = A'r' \tag{۱۲۰}$$

از دورابطه (119) نتیجه می گیریم

$$P'' = U'(UPU^\dagger)U'^\dagger = (U'U)P(U'U)^\dagger. \tag{۱۲۱}$$

یعنی دوران مرکب با ماتریس $U'U$ انجام می شود. ازرابطه (120) نیزبدست می آوریم

$$r'' = A'Ar, \tag{۱۲۲}$$

که به این معناست که ماتریس متناظربا $U'U \in SU(2)$ ماتریس $A'A \in SO(3)$ است. درنتیجه این نگاشت یک همسانی از $SU(2)$ به سوی $SO(3)$ است. اگردقیق تر نگاه کنیم این رابطه یک رابطه یک به یک نیست زیرا U و $-U$ هردویک دوران ایجاد می کنند. بنابراین به هرمجموعه دوتایی $\{U, -U\}$ یک عضو از گروه $SO(3)$ نسبت داده می شود. ولی این دقیقاً به این معناست که یک یکسانی بین گروه خارج قسمت $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$ برقراراست . یعنی

$$SU(2)/Z_2 \approx SO(3). \tag{۱۲۳}$$

برای اینکه رابطه صریح $U(A)$ را بدست آوریم می نویسیم:

$$U(x_i\sigma_i)U^\dagger = x'_i\sigma_i \equiv A_{ij}x_j\sigma_i \tag{۱۲۴}$$

طرفین این رابطه را درσ_k ضرب می کنیم:

$$tr(\sigma_k U x_i \sigma_i U^\dagger) = tr(\sigma_k A_{ij} x_j \sigma_i) \tag{۱۲۵}$$

حال ازرابطه $tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$ استفاده می کنیم و بدست می آوریم:

$$A_{jk} = \frac{1}{2} tr(\sigma_j U \sigma_k U^\dagger). \tag{۱۲۶}$$

این رابطه به طور صریح بیان می کند که درایه های ماتریس A چگونه از ماتریس U بدست می آیند.
می توان پرسید که یک ماتریس U واقعاً چه دورانی انجام می دهد، این دوران حول کدام محور وبه اندازه چه زاویه ای است.
برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که یک ماتریس یکانی دودردو را می توان به صورت زیرنوشت:

$$U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \equiv \cos\frac{\theta}{2} I + i\sin\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}. \tag{۱۲۷}$$

که درآن $\hat{n}$ یک بردار یکه است . ضریب $1/2$ برای راحتی بعدی درکنار θ قرارداده شده است. حال از این استفاده می کنیم که ماتریس هرمیتی P را می توان به صورت $P=\vec{r}\cdot\vec{\sigma}$ نوشت و از این اتحاد استفاده می کنیم که برای هردوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})=(\vec{a}\cdot\vec{b})I+i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}. \qquad (۱۲۸)$$

کمی محاسبه نشان می دهد که ماتریس $P'=UPU^\dagger$ به شکل زیرقابل بازنویسی است:

$$P'=\vec{r'}\cdot\vec{\sigma}, \qquad (۱۲۹)$$

■ تمرین: نشان دهید که رابطه زیر بین بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}'$ برقرار است.

$$\vec{r'}=\cos\theta\ \vec{r}+\sin\theta\ \vec{r}\times\hat{n}+(1-\cos\theta)(\hat{n}\cdot\vec{r})\ \hat{n}. \qquad (۱۳۰)$$

■ یک دوران حول محور $\mathbf{n}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ به اندازه زاویه 45 درجه در نظر بگیرید. ماتریس $SU(2)$ ای که این دوران را انجام می دهد و هم چنین ماتریس $SO(3)$ ای که این دوران را انجام می دهد بنویسید.

۱۷ یکسانی گروه های $SO(1,3)$ و $SL(2,C)/Z_2$

گروه $SO(1,3)$ گروه تبدیلات ویژه لورنتز است که روی فضازمان ۱+۳ بعدی اثر می کند. به ازای هرنقطه $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ درفضازمان ماتریس هرمیتی زیرراتشکیل می دهیم:

$$P=x^\mu\sigma_\mu\equiv\begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3\end{pmatrix}, \qquad (۱۳۱)$$

که دراینجا

$$(\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)=(I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z). \qquad (۱۳۲)$$

ماتریس P هرمیتی است ، و دترمینان آن برابراست با $x^\mu x_\mu$ ، حال به ازای هر $S\in SL(2,C)$ تبدیل زیررا انجام می دهیم

$$P \longrightarrow P' := SPS^\dagger. \tag{۱۳۳}$$

حال براحتی می توان فهمید که ماتریس P' نیزهرمیتی است . دترمینان آن نیزبرابربا دترمینان P است زیرا دترمینان S برابربا یک است.

■ تمرین: نشان دهید که تحت تبدیل بالا علامت x_0 حفظ می شود.

بنابراین می توان ماتریس P' را نیز بایک نقطه مثل $(x'^0, x'^1, x'2, x'^3)$ که همان طول مینکوسکی را دارد متناظرکرد، یعنی

$$P' = x'^\mu\sigma_\mu =\equiv \begin{pmatrix} x'^0+x'^3 & x'^1-ix'^2 \\ x'^1+ix'^2 & x'^0-x'^3 \end{pmatrix}, \tag{۱۳۴}$$

که درآن $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$. بنابراین x' بایک تبدیل لورنتز Λ از x بدست می آید وداریم:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \tag{۱۳۵}$$

حال شبیه به آنچه که درمورد گروه $SU(2)$ داشتیم دراینجا هم اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned} & P' = SPS^\dagger \quad \longrightarrow x' = \Lambda x, \\ , \quad & P" = S'P'S'^\dagger \longrightarrow x'' = \Lambda' x' \end{aligned} \tag{۱۳۶}$$

وازآنجا

$$P'' = (S'S)P(S'S)^\dagger, \qquad x'' = (\Lambda'\Lambda)x. \tag{۱۳۷}$$

بنابراین نگاشتی که به هرماتریس $S\in SL(2,C)$ یک تبدیل $\Lambda\in SO(1,3)$ نسبت می دهد یک همسانی است. ازآنجا که تبدیل های S و $-S$ هردو یک تبدیل لورنتز را ایجادمی کنند نتیجه می گیریم که یکسانی زیربرقراراست:

$$SO(1,3) \equiv SL(2,C)/Z_2. \tag{۱۳۸}$$

برای اینکه رابطه صریح S,Λ را بدست آوریم می نویسیم:

$$S(x^\mu\sigma_\mu)S^\dagger = x'^\mu\sigma_\mu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu\sigma_\mu. \tag{۱۳۹}$$

حال ماتریس های $\overline{\sigma}_\mu$ را به ترتیب زیرتعریف می کنیم:

$$(\overline{\sigma}_0, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3) = (I, -\sigma_x, -\sigma_y, -\sigma_z). \quad (۱۴۰)$$

صحت رابطه زیررا با کمی محاسبه می توان تحقیق کرد:

$$tr(\overline{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu,\nu}. \quad (۱۴۱)$$

از رابطه (139) بدست می آوریم:

$$S\sigma_\nu S^\dagger = \Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu, \quad (۱۴۲)$$

وپس از ضرب کردن در $\overline{\sigma}_\alpha$ و محاسبه ردّ طرفین خواهیم داشت:

$$tr(\overline{\sigma}_\alpha S\sigma_\nu S^\dagger) = \Lambda^\mu_\nu tr(\overline{\sigma}_\alpha \sigma_\mu), \quad (۱۴۳)$$

ویا

$$tr(\overline{\sigma}_\alpha S\sigma_\nu S^\dagger) = \Lambda^\mu_\nu 2\eta_{\alpha\mu} = 2\Lambda_{\alpha\nu}. \quad (۱۴۴)$$

بنابراین بادردست داشتن ماتریس S می توانیم Λ را به طور یکتا پیداکنیم:

$$\Lambda^\alpha_\mu = \frac{1}{2} tr(\overline{\sigma}^\alpha S\sigma_\nu S^\dagger). \quad (۱۴۵)$$

حال توجه می کنیم که هرماتریس کلی $S \in SL(2,C)$ را می توان به صورت زیرنوشت:

$$S = e^{(\vec{a}+i\vec{b})\cdot\vec{\sigma}}. \quad (۱۴۶)$$

هرگاه $\vec{a} = 0$، S یکانی بوده وچنانکه دربخش قبلی دیدیم نشان دهنده یک دوران است که محورآن بردار یکه $\hat{b}$ واندازه دوران آن برابربا $\theta := |\vec{b}|$ است. هرگاه $\vec{b} = 0$، S نشان دهنده یک خیز لورنتزی درراستای $\hat{a}$ با پارامترخیز $\phi := |\vec{a}|$ و یا سرعت

$v := \tanh\phi$ است. درحالت کلی اثریک تبدیل کامل لورنتزی را که هم شامل دوران و هم شامل خیز است بااستفاده از تبدیلات $SL(2,C)$ بدست آورد. راه آن این است که توجه کنیم که S را می توان به شکل زیرنوشت:

$$S = e^{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = e^{\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \qquad (۱۴۷)$$

که درآن $\vec{n} = \vec{a} + i\vec{b}$ و $\phi =$ و $\phi := \sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}^*} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$ و $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\phi}$. حال می دانیم چنین ماتریسی را همواره می توان به شکل زیرنوشت:

$$S = e^{\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cosh\phi\; I + \sinh\phi\; \hat{n}\cdot\sigma. \qquad (۱۴۸)$$

این رابطه شکل صریح یک تبدیل لورنتز را تعیین خواهد کرد. درتمرین ها با مثال ها وکاربردهایی از این رابطه آشناخواهیم شد.

- یک خیز لورنتز در امتداد محور $\mathbf{n} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ با سرعت v در نظر بگیرید. ماتریس $SL(2,C)$ ای که این خیز را انجام می دهد و هم چنین ماتریس $SO(1,3)$ ای که این دوران را انجام می دهد بنویسید.

۱۸ گروه $GL(n,C)$

این گروه از ماتریس های وارون پذیر $n\times n$ با درایه های مختلط تشکیل شده است. می توان آن را به عنوان گروه تبدیلات خطی روی یک فضای مختلط n بعدی در نظر گرفت. تعداد پارامترهای حقیقی این گروه برابراست با $2n^2$.
گروه $GL(1,C)$ چیزی نیست جز گروه $C-\{0\}$ با عمل ضرب و گروه ساده بعدی گروه $GL(2,C)$ است که آن را در بخش های پیشین معرفی کردیم. این گروه یک گروه یک پارچه است و مولدهای بی نهایت کوچک آن نیز به طور واضح ماتریس های پایه ی $E_{k,l}$ و $iE_{k,l}$ هستند که در آن ها $1\le k,l\le n$. نخستین زیر گروه مهم این گروه $SL(n,C)$ است.

۱۹ گروه $SL(n,C)$

زیرگروهی از $GL(n,C)$ که اعضای آن دترمینان یک دارند گروه $SL(n,C)$ نامیده می شود.

■ تمرین: مولدهای $SL(n,C)$ را بدست آورید.

---

۲۰ گروه $U(n)$

فرض کنید که روی یک فضای مختلط V یک ضرب داخلی مثبت تعریف شده است. یک ضرب داخلی مثبت دارای این خاصیت است که $\langle x,x\rangle \geq 0$ و اگر $x=0 \quad \longrightarrow \quad \langle x,x\rangle = 0$. باانتخاب پایه مناسب می توان این ضرب داخلی را برحسب مولفه های بردارها به شکل زیرنوشت:

$$\langle x,y\rangle = \sum_i x_i^* y_i = x^\dagger y. \tag{۱۴۹}$$

مجموعه تبدیلات خطی ای که این ضرب داخلی را حفظ می کنند تشکیل یک گروه می دهند که گروه یکانی یا گروه $U(n)$ نامیده می شود. هرعضو گروه یکانی درشرط $U^\dagger U = I$ صدق می کند.

مولدهای این گروه عبارتند از ماتریس های پاد هرمیتی که رد آن ها برابر است با صفر . تعداد این مولدها برابر است با $n^2-1.$ یک انتخاب برای این مولدها به شرح زیر است:

$$\begin{aligned}
Z_k &:= E_{kk} - E_{k+1,k+1} = |k\rangle\langle k| - |k+1\rangle\langle k+1|, \ \ 1 \leq k \leq n-1 \\
X_{kl} &:= i(E_{kl} + E_{lk} = i(|k\rangle\langle l| + |l\rangle\langle k|), \qquad 1 \leq k < l \leq n \\
Y_{kl} &:= E_{kl} - E_{lk} = |k\rangle\langle l| - |l\rangle\langle k|, \qquad 1 \leq k < l \leq n.
\end{aligned} \tag{۱۵۰}$$

■ تمرین: در گروه $SU(4)$ ماتریس های زیر را به شکل صریح بدست آورید:

$$e^{\theta Z_k}, \qquad e^{\theta X_{14}}, \qquad e^{\theta Y_{23}}. \tag{۱۵۱}$$

۲۱ خلاصه: تعداد پارامترهای گروه های ماتریسی

جدول زیر تعداد پارامترهای گروه های ماتریسی مختلف را نشان می دهد.

نام گروه ماتریسی	تعداد پارامترها ی حقیقی
$GL(n,R)$	n^2
$SL(n,R)$	n^2-1
$GL(n,C)$	$2n^2$
$SL(n,C)$	$2n^2-2$
$O(n), SO(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$O(p,q), SO(p,q)$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$
$U(n)$	n^2
$SU(n)$	n^2-1
$U(p,q)$	$(p+q)^2$
$SU(p,q)$	$(p+q)^2-1$
$SP(2n)$	$n(2n+1)$

(۱۵۲)

از میان گروه های $SU(n)$ گروه $SU(2)$ بدلیل نقش مهمی که در بیان دوران دارد و گروه $SU(3)$ به دلیل نقشی که در بیان تقارن رنگ در فیزیک کوارک ها دارد اهمیت ویژه دارند. ما قبلا در باره گروه $SU(2)$ نسبتاً به تفصیل بحث کرده ایم. این درس را با توصیف بیشتر گروه $SU(3)$ به پایان می بریم.

۲۲ گروه $SU(3)$

گروه یکانی دیگری که درفیزیک ذرات بنیادی اهمیت دارد گروه $SU(3)$ است. این گروه بیان کننده تقارن نیروی هسته ای قوی یاتقارن کوارک هااست. می دانیم که درطبیعت ۶ نوع کوارک وجود دارد که به کوارک های up ، $down$ ، $strange$ ، $charm$ ، top و $bottom$ مشهورند. برای برای این کوارک ها به ترتیب علائم اختصاری t, c, s, d, u و b بکارمی رود. تمام این کوارک ها ذرات با اسپین $1/2$ هستند ولی بارهمه آنها کسری است. جرم آنها نیز باهم کاملاً متفاوت است. بارالکتریکی آنها درجدول زیر آمده است. معمولاً کوارک های نسل دوم سنگین تر از نسل اول وکوارک های نسل سوم سنگین تراز نسل دوم هستند وبه همین دلیل نیز دیرتر درشتاب دهنده ها آشکارشده اند زیرابرای تولید آنها انرژی بیشتری مورد نیازبوده است. این تفاوت هم چنین استفاده ازنام نسل را برای خانواده های متفاوت توجیه می کند.

نسل سوم	نسل دوم	نسل اول	بارالکتریکی
t	c	u	$+\frac{2}{3}$
b	s	d	$-\frac{1}{3}$

(۱۵۳)

برای این ذرات مثل همه ذرات دیگر پادذره هایی نیز وجود دارد که همان جرم واسپین را دارند ولی بارالکتریکی آنها منفی بارالکتریکی ذرات مربوطه است. درنتیجه مطابق با جدول فوق جدولی نیز برای پادکوارک ها داریم:

بارالکتریکی	نسل اول	نسل دوم	نسل سوم
$-\frac{2}{3}$	$\overline{u}$	$\overline{c}$	$\bar{t}$
$+\frac{1}{3}$	$\overline{d}$	$\overline{s}$	$\overline{b}$

(۱۵۴)

ذرات بنیادی سنگین یا هادرون ها از کوارک ها ساخته می شوند که خود به دو نوع تقسیم می شوند. مزون ها که از دو کوارک ساخته می شوند و باریون ها که از سه کوارک ساخته می شوند. جدول زیر ترکیب بعضی از باریون ها و مزون ها را نشان می دهد:

باریون یا مزون	ترکیب کوارکی	بارالکتریکی
p	uud	$+1$
n	udd	0
Λ	uds	۰
$\sum^{+}$	uus	$+1$
$\sum^{0}$	uds	0
$\sum^{-}$	dds	-1
Δ^{++}	uuu	$+2$
π^{+}	$u\overline{d}$	$+1$
π^{-}	$\overline{u}d$	-1
K_0	$d\overline{s}$	0
$\overline{K}_0$	$\overline{d}s$	0

(۱۵۵)

یک کوارک که آن را به طور کلی با q نشان می دهیم یک خصلت درونی مثل بارالکتریکی دارد که این خصلت درواقع نشان دهنده بارهسته ای آن است و تعیین می کند که این کوارک چه نیرویی به دیگر کوارک ها وارد کند. برعکس بارالکتریکی که تنها به دونوع مثبت و منفی وجود دارد بارهسته ای درسه نوع ظاهرمی شود. این خصلت را رنگ نامیده اند اگر چه هیچ نسبتی با رنگ به مفهوم متعارف آن ندارد. درواقع یک کوارک می تواند دریکی از سه حالت کوانتومی

$$|R\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |G\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |B\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{۱۵۶}$$

قرارگیرد و بسته به اینکه درکدام حالت باشد می گوییم بار R ، G یا B دارد. می دانیم که در نیروی الکترومغناطیسی یک تقارن وجود دارد به این معنا که نیروی بین دو بار q, q' با نیروی بین دو بار$-q, -q'$ هیچ تفاوتی نمی کند. دراین جا بایک تقارن ساده مواجه هستیم. تقارن نیروی هسته ای قوی نیز شبیه به این تقارن است . نیروی بین دو کوارک با بارهای B, B هیچ تفاوتی با نیروی بین دو کوارک با بارهای G, G یا R, R ندارد. اما این حقیقت که بارکوارک ها بجای دونوع مثبت و منفی سه نوع است و هم چنین این که می توان باتوجه به مکانیک کوانتومی کوارک را درترکیبی از سه حالت باردار خود یعنی درحالتی مثل

$$|\psi\rangle = \alpha|R\rangle + b|G\rangle + c|B\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{۱۵۷}$$

تصور کرد این امکان را بوجود می آورد که تبدیلات گسترده تری را درمورد حالت های کوارک ها مطالعه کنیم. نتیجه این مطالعات تجربی و نظری آن است که اگر دو کوارک درحالت های دلخواه $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ و $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ داشته باشیم نیروی بین آنها هیچ تفاوتی با نیروی بین دوکوارک درحالت های $U|\phi\rangle$ و $U\psi\rangle$ که درآن U یک ماتریس یکانی است نخواهد داشت.

این تقارن، تقارن رنگ $Color Symmetry$ یا تقارن $SU(3)$ درنیروی هسته ای قوی نامیده می شود. کشف این که چنین تقارنی

دردنیای ذرات وجود دارد یکی از فصل های مهم درتاریخ تحول فیزیک ذرات بنیادی بوده است. بااستفاده از این تقارن نیز ذرات ناشناخته جدیدی پیش بینی و سپس درآزمایشگاه کشف شده اند.
علاقمندان به این موضوع می بایست برای مطالعه بیشتر به کتاب های ذرات بنیادی مراجعه کنند.

۲.۰.۲۲ مولدهای گروه $SU(3)$

برای بدست آوردن مولدهای گروه $SU(3)$ مثل همیشه تبدیلات نزدیک به تبدیل همانی یعنی ماتریس های نزدیک به ماتریس واحد رادرنظرمی گیریم. هرگاه $g = I + a$ چنین ماتریسی باشد آنگاه شرط یکانی بودن الزام می کند که a یک ماتریس پادهرمیتی با ردّ صفر باشد. می توان a را برحسب پایه ای از ماتریس های پادهرمیتی بدون ردّ بسط داد. یک انتخاب برای چنین پایه ای عبارت است از:

$$\begin{aligned}
H_1 &:= i(E_{11} - E_{22}),\\
H_2 &:= i(E_{22} - E_{33}),\\
T_{12}^{+} &:= i(E_{12} + E_{21}),\\
T_{12}^{-} &:= (E_{12} - E_{21}),\\
T_{13}^{+} &:= i(E_{13} + E_{31}),\\
T_{13}^{-} &:= (E_{13} - E_{31}),\\
T_{23}^{+} &:= i(E_{23} + E_{32}),\\
T_{23}^{-} &:= (E_{23} - E_{32}).
\end{aligned} \tag{۱۵۸}$$

در یک انتخاب دیگرماتریس های H_1 و H_2 به صورت زیردرنظرگرفته می شوند:

$$\begin{aligned}
H_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} i(E_{11} - E_{22}),\\
H_2 &:= \frac{1}{2\sqrt{3}} i(E_{11} + E_{22} - 2E_{33})
\end{aligned} \tag{۱۵۹}$$

فایده این انتخاب دوم آن است که پایه جدید تحت ضرب داخلی متعارف ماتریس ها یعنی $\langle A, B\rangle := tr(A^{\dagger}B)$ متعامداست. بدین ترتیب گروه $SU(3)$، هشت تا مولد یا هشت تا پارامترحقیقی پیدا می کند. باهمین استدلال می توان تعداد پارامترهای حقیقی گروه $SU(n)$ وهم چنین مولد های آن را پیداکرد. تعداد پارامترهای حقیقی گروه $SU(n)$ برابراست با $n^2 - 1$ و تعداد پارامترهای حقیقی گروه $U(n)$ برابرخواهد بود با n^2.