

درسنامه نظریه گروه، درس ششم: گروه های پیوسته یا گروه های

توپولوژیک

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲ اردیبهشت ۱۳۹۵

۱ مقدمه

دردرس گذشته با گروه های ماتریسی آشنا شدیم. این گروه ها، نمونه های مهمی از گروه های پیوسته هستند به این معنا که می توان با تغییر پیوسته یک یا چند پارامتر در فضای گروه گردش کرد. گروه Z ، Z_n ، یا S_n نمونه هایی از گروه های ناپیوسته هستند که در آنها چنین امکانی وجود ندارد. در این درس و درس های آینده می خواهیم کمی بیشتر راجع به مفهوم پیوستگی و پارامترهای یک گروه صحبت کنیم. به این ترتیب با مفاهیم مهمی مثل گروه های توپولوژیک و گروه های لی آشنا خواهیم شد. پیشاپیش تذکر می دهیم که بحث مادر این جا یک بحث کامل نیست زیرا نه مفهوم توپولوژی و نه مفهوم خمینه را در کلیت خود معرفی نخواهیم کرد. پرداختن به چنین کاری هم وقت گیر است و هم کم اثر است زیرا می توانیم بسیاری از خواص گروه های توپولوژیک و گروه های لی را تنها با تعریف های شهودی از آنها بدست آورد و ما هم به همین تعاریف شهودی و حسی بسنده خواهیم کرد.

۲ گروه پیوسته یا گروه توپولوژیک

۱.۲ مفهوم پیوستگی

■ **تعریف:** مجموعه M یک فضای متریک خوانده می شود هرگاه به ازای هر دو نقطه آن مثل x و y بتوان عددی مثل $d(x, y)$ چنان تعریف کرد:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\geq 0 \\d(x, x) &= 0 \\d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z)\end{aligned}\tag{۱}$$

نامساوی آخری نامساوی مثلث نام دارد. درچنین حالتی معمولاً می نویسیم که (M, d) یک فضای متریک است. روی یک مجموعه می توان مترهای مختلف تعریف کرد.

■ **مثالهایی از فضای متریک در زیرآمده است .** در هر مورد دانشجو خود باید تحقیق کند که متر داده شده واقعاً در خواص بالا صدق می کند:

الف: $M = R$

$$d := |x - y|$$

ب: $M = R^n$

$$d_1(x, y) := (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|)$$

$$d_2(x, y) := ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{\frac{1}{2}}$$

در این فضا به طور کلی عبارت زیر یک متریک موسوم به متریک d_p تعریف می کند:

$$d_p(x, y) := (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

اثبات این که عبارت واقعا یک متریک است یعنی نامساوی مثلث را برقرار می کند در کتاب های جبر وجود دارد. فعلا این رابطه را بدون اثبات می پذیریم.

■ تمرین: نشان دهید که

$$d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} (|x_i - y_i|).$$

پ: فضای ماتریس های حقیقی مربعی با بعد n است و به ازای هر دو ماتریس مربعی A, B متعلق به M :

$$d(A, B) := \|A - B\| \quad (۲)$$

$$\|x\| = \text{tr}(x^t x)^{\frac{1}{2}} \text{ که در آن}$$

ت: فضای ماتریس های مختلط مربعی با بعد n است و به ازای هر دو ماتریس مربعی A, B متعلق به M :

$$d(A, B) := \|A - B\| \quad (۳)$$

$$\|x\| = \text{tr}(x^\dagger x)^{\frac{1}{2}} \text{ که در آن}$$

ج: فضای توابع حقیقی که در بازه $(a, b) \subset R$ تعریف شده اند. به ازای هر دو تابع $f, g \in M$:

$$d(f, g) := \sup_{x \in (a, b)} |f - g|$$

چ: فضای توابع حقیقی و انتگرال پذیر که در بازه $(a, b) \subset R$ تعریف شده اند. به ازای هر دو تابع $f, g \in M$:

$$d(f, g) := \|f - g\|,$$

که در آن $\|h\|^2 := \int_a^b h^2(x) dx$.

ح: M هر مجموعه دلخواه و

$$d(x, y) = 1 \quad \text{if } x \neq y, \quad d(x, x) = 0. \quad (4)$$

در هر کدام از مجموعه های بالا می توان به نزدیکی و دوری نقاط از یکدیگر معنا و مفهوم داد. به طور خاص می توان کره بازی به شعاع ϵ را حول هر نقطه $x \in M$ به شکل زیر تعریف کرد:

$$B_\epsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}. \quad (5)$$

می توان هم چنین ناحیه های باز و ناحیه های بسته را تعریف کرد. به عنوان مثال یک ناحیه $U \subset M$ باز است اگر بتوان حول هر نقطه آن یک کره باز به شعاع مناسب حول آن چنان رسم کرد که تمام کره باز در درون U قرار گیرد: به زبان دیگر U یک ناحیه باز است اگر

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \mid B_\epsilon(x) \subset U. \quad (6)$$

ناحیه ای بسته است که متمم آن بسته باشد. یعنی $U \subset M$ بسته است اگر $M - U$ باز باشد.

■ تمرین: در فضای R^2 ناحیه زیر را در نظر بگیرید:

$$B_1(\mathbf{0}) \equiv \{\mathbf{y} \in R^2 \mid d(\mathbf{y}, \mathbf{0}) \leq \epsilon\}.$$

این ناحیه را از نظر هندسی برای وقتی که متریک گفته شده هر کدام از متریک های d_1 ، d_2 و d_∞ است، رسم کنید.

با استفاده از این مفاهیم می توان قضایای بسیاری را در مورد ناحیه های باز و بسته ثابت کرد، قضایایی که از نظر شهودی نیز بدیهی هستند. به عنوان مثال خواننده می تواند براحتی قضیه زیر را ثابت کند:

■ تمرین: ثابت کنید که : الف: اگر (M, d) یک فضای متریک باشد، آنگاه

الف: اجتماع هر تعداد زیرمجموعه باز از M بازهم یک مجموعه باز خواهد بود.

ب: اشتراک تعداد محدودی زیرمجموعه باز از M بازهم یک مجموعه باز خواهد بود.

■ تمرین: مثالی ارائه دهید که نشان دهد در یک فضای متریک، اجتماع تعداد نامتناهی مجموعه باز لزوماً باز نیست.

حال می توانیم به تعریف پیوستگی یک تابع پردازیم. از نظر شهودی یک تابع را پیوسته می خوانیم اگر نقاط نزدیک را به نقاط نزدیک بنگارد. به این معنا که هرچه قدر بخواهیم بتوانیم بانزدیک کردن نقطه $x \in M$ به نقطه $y \in M$ ، مقدار تابع $f(x)$ را به مقدار $f(y)$ نزدیک کنیم. بیان ریاضی این عبارت در تعریف زیر آمده است:

■ تعریف: یک تابع $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$ پیوسته خوانده می شود اگر

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid d(x, y) < \delta \rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon. \quad (7)$$

به عنوان مثال در فضای ماتریس ها توابع جمع دو ماتریس، ضرب دو ماتریس و یا وارون گرفتن از یک ماتریس توابع پیوسته هستند. هم چنین توابعی نظیر دترمینان و ردّ پیوسته هستند.

■ تمرین: ثابت کنید که یک تابع $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$ پیوسته است اگر و فقط اگر تصویر وارون هر زیر مجموعه باز از M' یک زیر مجموعه باز از M باشد.

حال به تعریف هم بند بودن یا یکپارچه بودن یک فضای متریک (در حالت کلی فضای توپولوژیک) می پردازیم.

■ **تعریف:** یک فضای متریک (در حالت کلی یک فضای توپولوژیک) M همبند مسیری است اگر هر دو نقطه آن مثل $x, y \in M$ را بتوان با یک منحنی پیوسته به یکدیگر مرتبط کرد، یعنی اگر یک نگاشت پیوسته $\gamma: R \rightarrow M$ بتوان چنان تعریف کرد که $\gamma(0) = x$ و $\gamma(1) = y$.

■ **تمرین:** کدام یک از فضاهای زیر همبند مسیری هستند:

یک - زیر مجموعه ای از R^4 که با معادله $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ توصیف می شود.

دو - زیر مجموعه ای از R^3 که با معادله $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ توصیف می شود.

دو - زیر مجموعه ای از R^3 که با معادله $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ توصیف می شود.

یک فضای هم بند مسیری تماماً یک پارچه است و ازدوقست مجزا تشکیل نشده است. باید متذکر شویم که هم بند مسیری بودن کمی از همبند بودن (که به معنای یک پارچه بودن است) قوی تر است ولی ما به تعریف همبند مسیری بودن و استفاده از آن اکتفا می کنیم.

آنچه که تاکنون گفته ایم کلی ترین تعریف پیوستگی نیست. کلی ترین تعریف با استفاده از تعریف توپولوژی روی یک مجموعه امکان پذیر می شود. مثل هرانتزاع دیگری در ریاضیات این کار با انتزاع خواص ساختارهای به ظاهر متفاوتی که قبلاً معرفی شده اند (در این جا ناحیه های باز) ایجاد می شود. همانطور که در مقدمه گفتیم مادر این درس به کلی ترین تعریف پیوستگی نمی پردازیم. برای منظور ما مطالب و مثالهایی که در بالا گفته شد کافی است. از این به بعد نیز اگر از فضای توپولوژیک سخن بگوییم خواننده می تواند به عنوان مثال مشخصی از آن فضای متریک را در نظر آورد. باین مقدمات ما می توانیم یک گروه پیوسته یا گروه توپولوژیک را تعریف کنیم.

■ **تعریف:** یک گروه G ، گروه توپولوژیک خوانده می شود اگر G به عنوان یک مجموعه یک فضای توپولوژیک باشد و علاوه بر آن توابعی که ضرب و وارون را در گروه مشخص می کنند نیز پیوسته باشند. به زبان دیگر اگر ضرب گروه را با نگاشت $m: G \times G \rightarrow G$ و وارون را بانگاشت $i: G \rightarrow G$ نشان دهیم این دو تابع می بایست پیوسته باشند.

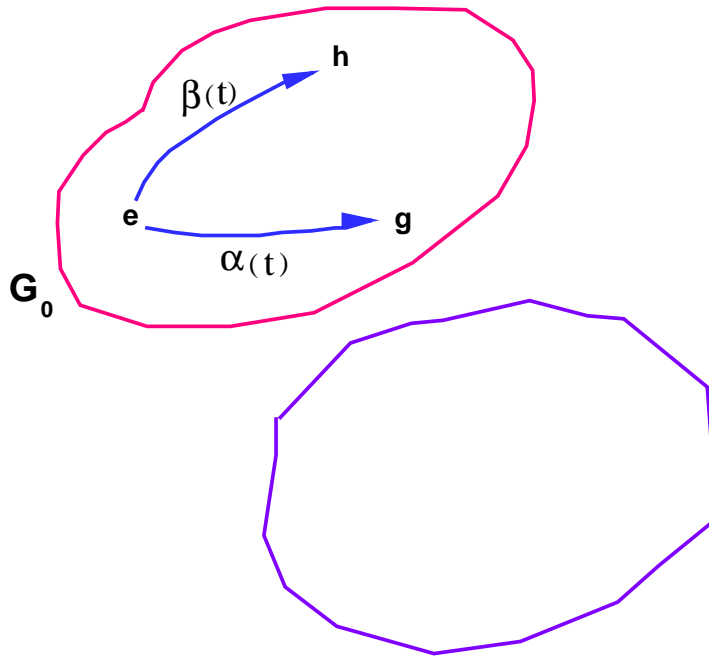
این تعریف بیان می کند که اگر زوج (g_1, g_2) نزدیک زوج (h_1, h_2) باشد، $g_1 g_2$ نیز می بایست نزدیک $h_1 h_2$ باشد. هم چنین اگر g نزدیک h باشد، g^{-1} نیز می بایست نزدیک h^{-1} باشد.

خواننده می تواند براحتی تشخیص دهد که همه گروه های ماتریسی که در فصل قبل معرفی کرده ایم بامتریک استاندارد که برای فاصله ماتریس ها در نظریه گیری گروه های توپولوژیک هستند.

۳ چند قضیه درباره گروه های پیوسته

پس از آشنایی با گروه های توپولوژیک می توانیم قضایای ساده و درعین حال مهمی را درباره این گروه ها ثابت کنیم. مصداق هایی از این قضایا را در مورد گروه های ماتریسی در درس گذشته دیده ایم. مثلاً دیدیم که زیرگروه $SO(n)$ از گروه $O(n)$ است و قسمت دیگر گروه $O(n)$ که شامل ماتریس های بادترمینان -1 است یک زیرگروه نیست. شبیه به این خاصیت را در مورد گروه لورنتز نیز دیدیم. حال می توانیم یک قضیه کلی ثابت کنیم که ربطی به ساختار جزیی گروه ندارد و تنها به خواص پیوستگی آن مربوط است.

■ **قضیه:** در یک گروه توپولوژیک، آن قسمت از گروه که همبند مسیری با عنصر واحد است تشکیل یک زیرگروه می دهد.



شکل ۱: G_0 قسمتی از گروه است که با عنصر واحد همبند مسیری است.

اثبات: شکل (1) را در نظر بگیرید. قسمت G_0 تکه ای از گروه است که با عنصر واحد همبند مسیری است یعنی قسمتی از گروه است که تمام اعضایش با منحنی های پیوسته به عنصر واحد متصل هستند. می خواهیم ثابت کنیم که این قسمت یک زیرگروه است. دو عنصر g و h را در این قسمت در نظر بگیرید.

چون این قسمت به طور پیوسته به عنصر واحد متصل است می توانیم دو مسیر $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow G_0$ پیدا کنیم به نحوی که:

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= e, & \alpha(1) &= g, \\ \beta(0) &= e, & \beta(1) &= h. \end{aligned} \quad (8)$$

حال باید ثابت کنیم که عنصر gh نیز در G_0 است. برای این کار باید ثابت کنیم که یک مسیر پیوسته از e به gh وجود دارد. هرگاه نگاشت ضرب در G را با $m : G \times G \rightarrow G$ نشان دهیم آنگاه منحنی زیر را در نظر می گیریم:

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow G, \quad \gamma(t) := m(\alpha(t), \beta(t)) \quad (9)$$

این نگاشت با توجه به پیوسته بودن m و α و β یک نگاشت پیوسته است. هم چنین

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= m(\alpha(0), \beta(0)) = m(e, e) = e, \\ \gamma(1) &= m(\alpha(1), \beta(1)) = m(g, h) = gh. \end{aligned} \quad (10)$$

بنابراین منحنی پیوسته γ نقطه e را به نقطه gh وصل می کند و در نتیجه $gh \in G_0$. هم چنین باید ثابت کنیم که معکوس هر عنصر $g \in G_0$ نیز در خود G_0 است. برای این کار کافی است که استدلال بالا را در مورد نگاشت زیر تکرار کنیم:

$$\alpha^{-1} : G \rightarrow G, \quad \alpha^{-1}(t) := i(\alpha(t)). \quad (11)$$

پیوسته بودن α و i به معنای پیوسته بودن α^{-1} است. هم چنین

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(0) &= i(\alpha(0)) = i(e) = e \\ \alpha^{-1}(1) &= i(\alpha(1)) = i(g) = g^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

این استدلال نشان می دهد که g^{-1} نیز متعلق به G_0 است و بنابراین G_0 یک زیرگروه G است.

قضیه بعدی خاصیت مهم تروفوی تری را راجع به G_0 ثابت می کند.

■ **قضیه:** دریک گروه توپولوژیک، آن قسمت از گروه که همبند مسیری با عنصر واحد است یعنی G_0 یک زیرگروه بهنجار است.

اثبات: در قضیه قبل دیدیم که G_0 یک زیرگروه است. حال می خواهیم نشان دهیم که G_0 یک زیرگروه بهنجار است. فرض کنید که $h \in G_0$ و $g \in G$. می خواهیم نشان دهیم که $ghg^{-1} \in G_0$. چون $h \in G_0$ نتیجه می گیریم که یک نگاشت پیوسته α (یک منحنی پیوسته) وجود دارد به قسمی که

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow G_0 \quad \alpha(0) = e, \quad \alpha(1) = h. \quad (13)$$

حال نگاشت زیر را در نظر بگیرید: $\gamma(t) := g\alpha(t)g^{-1}$ یا به عبارت دقیق تر $\gamma(t) := m(g, m(\alpha(t), g^{-1}))$. این نگاشت

ترکیب نگاشت های پیوسته است و بنابراین پیوسته است. ضمناً این نگاشت از $[0, 1]$ به G است. حال دقت می کنیم که

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= g\alpha(0)g^{-1} = geg^{-1} = e, \\ \gamma(1) &= g\alpha(1)g^{-1} = ghg^{-1}.\end{aligned}\tag{۱۴}$$

بنابراین مسیری پیوسته یافته ایم که ghg^{-1} را به e متصل می کند و این نشان می دهد که $ghg^{-1} \in G_0$. بنابراین G_0 یک زیرگروه بهنجار G است.

از آنجا که G_0 یک زیرگروه بهنجار G است، می توان گروه خارج قسمت G/G_0 را بدست آورد. این گروه از هم مجموعه های G_0 تشکیل شده است. هرهم مجموعه یا کلاس را با یک عنصر نماینده آن نشان می دهیم مثل $[a]$ یا $[b]$ و غیره. قبلاً دیدیم که یک تناظر یک به یک بین این کلاس ها برقرار است. نگاشت زیردرواقع این تناظر یک به یک را برقراری کند.

$$\psi : [a] \equiv aG_0 \longrightarrow [b] \equiv bG_0, \quad \psi(x) = ba^{-1}x\tag{۱۵}$$

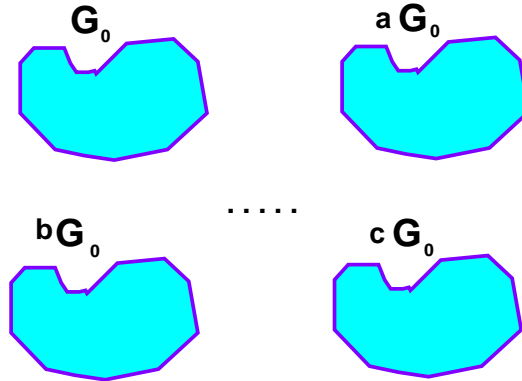
حال باتوجه به اینکه گروه G یک گروه توپولوژیک است و نگاشت فوق از نگاشت های پیوسته ضرب و وارون ترکیب شده است، نتیجه می گیریم که ψ یک نگاشت پیوسته و وارون پذیر است. این بدان معناست که کلاس های مختلف از نظر توپولوژیک بایکدیگر همانریخت هستند و همه همان خصوصیات توپولوژیکی را دارند که G_0 دارند، شکل (2).

■ قضیه: هرهم مجموعه G_0 یک ناحیه هم بند مسیری است. یعنی هر دو نقطه آن را می توان بایک مسیر پیوسته به هم وصل کرد. برعکس هر دو عضو گروه که بایک مسیر پیوسته به هم وصل شوند حتماً در یک هم مجموعه قرار دارند.

اثبات: فرض کنید که a, b هر دو متعلق به یک هم مجموعه باشند. در این صورت یک $g \in G_0$ وجود دارد به قسمی که $b = ag$. اما می دانیم که g را می توان بایک مسیر پیوسته به عنصر واحد وصل کرد. یعنی

$$\exists \gamma(t) \mid \gamma(0) = e, \quad \gamma(1) = g.\tag{۱۶}$$

حال منحنی پیوسته $\eta(t) := a\gamma(t)$ را در نظر می گیریم. این منحنی پیوسته است زیرا از ترکیب دو نگاشت پیوسته تشکیل شده است.



شکل ۲: G_0 و هم مجموعه های آن بایکدیگر همانریخت هستند. از جمله همه همبند مسیری هستند. G/G_0 نیز یک گروه گسسته است.

درضمن داریم

$$\eta(0) = a\gamma(0) = ae = a, \quad \eta(1) = a\gamma(1) = ag = b. \quad (17)$$

پس منحنی پیوسته η ، عنصر a را به b وصل می کند. در نتیجه هرهم مجموعه یک ناحیه همبند مسیری است. حال معکوس قضیه را ثابت می کنیم. فرض کنید که دو عضو مثل c و d را بتوان بایک مسیر به هم متصل کرد. می خواهیم ثابت کنیم که هر دو دریک هم مجموعه قراردارند. برای این کار باید ثابت کنیم که عضوی مثل $g \in G_0$ وجود دارد به قسمی که $d = cg$. امنحنی ای که c را به d وصل می کند با α نشان می دهیم. می دانیم که

$$\alpha(0) = c, \quad \alpha(1) = d. \quad (18)$$

حال منحنی پیوسته $\beta(t) := c^{-1}\alpha(t)$ را در نظر بگیرید. این منحنی پیوسته است زیرا نگاشت های وارون و ضرب در گروه پیوسته هستند و α نیز بنا بر فرض پیوسته است. درضمن داریم

$$\beta(0) = c^{-1}\alpha(0) = c^{-1}c = e, \quad \beta(1) = c^{-1}\alpha(1) = c^{-1}d \quad (19)$$

در نتیجه منحنی β ، عضو $c^{-1}d$ را به عضو واحد گروه وصل می کند، پس $c^{-1}d \in G_0$. ولی این امر بدان معناست که یک $g \in G_0$ وجود دارد به قسمی که $d = cg$ یعنی اینکه c و d هم ارزشمندند. بنابراین دریک هم مجموعه قراردارند. اثبات قضیه در اینجا کامل می شود.

نتیجه مهم این قضیه این است که هم مجموعه های زیرگروه G_0 ناحیه های جداازهمی را تشکیل می دهند و درنتیجه گروه خارج قسمت G/G_0 یک گروه گسسته است.

درنتیجه مطالعه همه گروه های پیوسته به مطالعه همه گروه های همبند مسیری و مطالعه همه گروه های گسسته کاهش پیدا می کند.

■ مثال ۱:

$$O(n)/SO(n) \cong Z_2. \quad (20)$$

■ مثال ۲: در گروه تبدیلات $O(1, 3)$ ، زیرگروه $O(1, 3)_+^\dagger$ قسمت متصل به عنصر واحد است.

$$O(1, 3)/O(1, 3)_+^\dagger \cong Z_2 \times Z_2. \quad (21)$$