درسنامه نظریه گروه، درس یازدهم

زیرجبر کارتان، ریشه ها و دیاگرام های دینکین

قسمت دوم (اثبات ها)

وحیدکریمی پور– دانشکده فیزیک – دانشگاه صنعتی شریف

۴ خرداد ۱۳۹۵

۱ مقدمه

تاکنون سعی کردیم که خواص کلی جبرهای نیم ساده را با ذکر مهمترین مثال های آنها بررسی کنیم. با مفاهیمی مثل فضای ریشه‌ها، ریشه‌های مثبت و ساده و دیاگرام دینکین آشنا شدیم. از آنجاکه قصد ما در درس گذشته تنها آشنایی با این خواص بود، تنها به ذکر این خواص اکتفاکردیم. در این درس می خواهیم تا آنجاکه ممکن است خواص گفته شده را از تعاریف اولیه ثابت کنیم.

۲ ساختمان فضای ریشه ها دریک جبر نیم ساده

ازقضیه زیردرآینده استفاده می‌کنیم. اثبات آن را خواننده می تواند درکتاب های جبرلی پیداکند مثل کتابِ $Humphereys$.

■ **قضیه بدون اثبات:** (کارتان) ویژه مقدارهای α هیچ‌کدام واگنی ندارند. ویژه مقادیر نیز α نیز همه حقیقی هستند.

پس از این پذیرفتن این قضیه می توانیم دیگر قضایا را یک به یک ثابت‌کنیم.

■ **قضیه:** فرض‌کنیدکه α و β دوریشه متعلق به $\sum$ باشند دراین صورت اگر $\alpha+\beta\in\sum$ آنگاه

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta} \qquad (۱)$$

که درآن $N_{\alpha\beta}$ عددی است‌که بعداً باید تعیین شود . اما اگر $\alpha+\beta \ \notin \ \sum$ آنگاه

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0. \qquad (۲)$$

■ **اثبات:** اتحاد جاکوبی را به صورت

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]] \qquad (۳)$$

درنظرگرفته و تعویضگر زیر را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}[H_i,[E_\alpha,E_\beta]] &= [[H_i,E_\alpha],E_\beta] + [E_\alpha,[H_i,E_\beta]] = [\alpha_i E_\alpha, E_\beta] + [E_\alpha, \beta_i E_\beta] \\ &= (\alpha_i+\beta_i)[E_\alpha,E_\beta]. \qquad (۴)\end{aligned}$$

هرگاه $\alpha+\beta\in\sum$، آنگاه باتوجه به اینکه ریشه ها واگنی ندارند رابطه (1) را نتیجه می‌گیریم. اگرهم $\alpha+\beta\notin\sum$ آنگاه معنای این رابطه این است‌که ویژه بردار مربوطه برابر با صفر است، یعنی $[E_\alpha,E_\beta]=0$.

■ **قضیه:** فرض کنید که α و $-\alpha$ دو ریشه در $\sum$ باشند. دراین صورت خواهیم داشت :

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = f^i_{\alpha.-\alpha} H_i, \tag{۵}$$

که درآن $f^i_{\alpha,-\alpha}$ ها ثابت هستند.

■ **اثبات:** باهمان محاسبه قبلی بدست می آوریم که $[H_i, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] = 0$. باتوجه به ماکزیمال بودن زیرجبر کارتان نتیجه می گیریم که $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ ترکیبی خطی ازعناصر کارتان است. بعداً ضرایب ساختاری $C^i_{\alpha,-\alpha}$ را بر حسب ریشه ها تعیین می کنیم.

۱.۲ متریک کیلینگ درپایه کارتان

پایه ای را که معرفی کرده ایم پایه کارتان [۱] می نامند. دراینجا می خواهیم شکل متریک کیلینگ را در این پایه بدست بیاوریم. خواهیم دید که متریک کیلینگ دراین پایه شکل خیلی ساده ای دارد.

■ **قضیه:** دریک جبرلی نیم ساده

الف: به ازای هر H_i و هر E_α رابطه زیربرقراراست:

$$K(H_i, E_\alpha) = 0 \tag{۶}$$

که درآن K فرم کیلینگ است.

ب: به ازای هردوریشه α و β،

[۱] Cartan Basis

$$K(E_\alpha, E_\beta) = 0 \quad \text{اگر} \quad \alpha + \beta \neq 0. \tag{۷}$$

پ: به ازای هر ریشهٔ α یک ریشه $-\alpha$ و جود دارد.

■ **اثبات الف:** می دانیم که فرم کیلینگ دررابطه زیرصدق می کند:

$$K(x, [y, z]) = K(y, [z, x]) = K(z, [x, y]). \tag{۸}$$

حال به ازای هر H_j خواهیم داشت:

$$K(H_i, [H_j, E_\alpha]) = K(E_\alpha, [H_i, H_j]) = K(E_\alpha, 0) = 0 \tag{۹}$$

وازآنجا

$$K(H_i, \alpha_j E_\alpha) = \alpha_j \ K(H_i, E_\alpha) = 0 \ \ \forall \ \ j. \tag{۱۰}$$

ازآنجا که لااقل یکی از α_j ها مخالف صفراست، خواهیم داشت $K(H_i, E_\alpha) = 0$. این رابطه نشان می دهد که با متریک کیلینگ بردارهای زیرفضای کارتان بر ریشه‌ها عمودند.

■ **اثبات ب:** دو ریشه E_α و E_β رادرنظرمی گیریم. به ازای هر H_i داریم:

$$K(E_\alpha, [E_\beta, H_i]) = K(E_\beta, [H_i, E_\alpha]) \tag{۱۱}$$

وبااستفاده از روابط جابجایی

$$K(E_\alpha, -\beta_i E_\beta) = K(E_\beta, \alpha_i E_\alpha) \tag{۱۲}$$

باتوجه به خطی بودن فرم K و تقارن آن نتیجه خواهیم گرفت که

$$(\alpha_i + \beta_i) K(E_\alpha, E_\beta) = 0 \ \ \forall i. \tag{۱۳}$$

بنابراین اگر $\alpha+\beta\neq 0$ نتیجه می‌گیریم که لااقل یکی از عناصر $(\alpha+\beta)_i$ مخالف با صفر است و از آنجا حکم قضیه را نتیجه می گیریم. بنابراین از این رابطه نتیجه می‌گیریم که هر بردار فضای ریشه‌ها بر همه بردارها حتی بر خودش عمود است و تنها برداری که می تواند بر بردار E_α عمود نباشد، بردار $E_{-\alpha}$ است.

■ **اثبات پ:** اگر به ازای یک ریشه α، ریشه $-\alpha$ در $\sum$ وجود نداشته باشد، یعنی برای همه β ها داشته باشیم $\alpha+\beta\neq 0$، نتیجه می گیریم که

$$K(E_\alpha, E_\beta)=0 \quad \forall\beta. \tag{۱۴}$$

اما با توجه به اینکه قبلاً ثابت کردیم $K(E_\alpha, H_i)=0 \quad \forall\, i$، این رابطه به این معناست که $K(E_\alpha, X)=0$ که در آن X هر عنصری از جبر است، یعنی یک سطر کامل از ماتریس کیلینگ برابر با صفر است که برای جبر نیم ساده چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین حتماً می بایست برای هر α قرینه آن یعنی $-\alpha$ نیز وجود داشته باشد.

می دانیم که باضرب کردن E_α و $E_{-\alpha}$ ها در ضرایب مناسب، مقدارریشه ها تغییرنمی‌کند. اما بااین کارمی توانیم کاری کنیم که $K(E_\alpha, E_{-\alpha})$ برابربا 1 شود. هرگاه اندیس های $i, j, \cdots$ را برای زیرجبر کارتان و اندیس های $\alpha, \beta, \cdots$ را برای ریشه هابکارببریم آنگاه نتایجی که بدست آورده ایم به معنای آن است که ماتریس کیلینگ فرم زیرادارد:

$$K_{i\alpha}=K_{\alpha i}=0, \qquad K_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha,-\beta}. \tag{۱۵}$$

به عبارت دیگر

$$K=K'\bigoplus\sigma\oplus\sigma\oplus\sigma\cdots\oplus\sigma \tag{۱۶}$$

که درآن K'_r ماتریس متقارن و غیرواگن r بعدی است و σ ماتریس زیراست :

$$\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۱۷}$$

هرکدام از ماتریس های σ مربوط به یک جفت ریشه α و $-\alpha$ است.

■ تمرین: الف: با استفاده از تعریف اولیه متریک کیلینگ رابطه زیر را در باره درایه های متریک کیلینگ نشان دهید:

$$K_{ij} \equiv tr(ad_{H_i} ad_{H_j}) = \sum_{\alpha \in \sum} \alpha_i \alpha_j. \tag{۱۸}$$

ب: این درایه ها را برای جبر $su(3)$ بدست آورید.

■ تمرین: نشان دهید که ماتریس K' مثبت است. منظور از ماتریس مثبت ماتریسی است که ویژه مقادیرش نامنفی باشند. این تعریف معادل این است که بگوییم مقدار متوسط این ماتریس برای هر برداری نامنفی است.

■ **قضیه:** به ازای هرریشه α رابطه جابجایی E_α و $E_{-\alpha}$ به صورت زیر است:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \tag{۱۹}$$

■ **اثبات:** در درس قبل ثابت کردیم

$$f_{abc} = K([e_a, e_b], e_c). \tag{۲۰}$$

هم چنین ثابت کردیم که این ضرایب دارای تقارن دوره ای هستند.

بانمادگذاری های مربوط به این فصل بدست می آوریم

$$f_{\alpha,-\alpha,i} = f_{i,\alpha,-\alpha} = f_{i,\alpha,\beta} K^{\beta,-\alpha}. \tag{۲۱}$$

اما می دانیم که $K^{\beta,-\alpha} = \delta_{\beta,\alpha}$ بنابراین

$$f_{\alpha,-\alpha,i} = f^{\alpha}_{i,\alpha} = \alpha_i. \tag{۲۲}$$

با بالا بردن اندیس i درهردوطرف بدست می آوریم که $f^i_{\alpha,-\alpha} = \alpha^i$ و درنتیجه:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \tag{۲۳}$$

۲.۲ خلاصه

بهتراست دراینجاخلاصه روابط جابجایی جبررادرپایه های جدیدی که ساخته ایم گردآوری کنیم. این روابط به شکل زیرهستند:

$$
\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0 \\
&[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \\
&[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} & if \quad \alpha+\beta \in \sum, \\ \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

$$
[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \tag{۲۵}
$$

■ تمرین: الف: تمامی روابط جبر $su(2)$ را به شکلی که در بالا گفته شده یعنی در پایه کارتان بنویسید. ضرایب ساختاری را به شکل دقیق بدست آورید.

ب: این کار را برای جبر $su(3)$ نیز انجام دهید.

■ تمرین: تمامی روابط جبر $su(4)$ را به شکلی که در بالا گفته شده یعنی در پایه کارتان بنویسید. ضرایب ساختاری را به شکل دقیق بدست آورید.

■ تمرین: فرم کامل متریک کیلینگ را برای جبر $su(n)$ بدست آورید.

■ تمرین: فرم کامل متریک کیلینگ را برای جبر $so(4)$ بنویسید.

۳ ساختمان دیاگرام ریشه ها

درمثال های بخش قبل دیدیم که علی الاصول می توان درجبرمختلط شده معادله های ویژه مقداری $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$ را حل کرد و تمام ریشه ها و بردارهای متناظرباآنها را بدست آورد. بابدست آوردن این ریشه ها می توانیم روابط جبر را درپایه کارتان بنویسیم که ساختار جبر درآن روشن و ساده است. اما برای یک جبر n بعدی این کار به معنای قطری کردن ماتریس های n بعدی است و معلوم نیست که براحتی بتوان این ویژه مقدارها و ویژه بردارهای مربوطه را بدست آورد. قضیه‌حل معادلات چند جمله ای به ما می گوید که برای $n \geq 5$ حتی معلوم نیست که بتوان ویژه مقادیر را برحسب عبارات جبری بدست آورد. خوشبختانه ساختمان جبر لی به ما اجازه می دهد که ویژه مقدارها یعنی ریشه هارا براحتی بدست بیاوریم . برای این کار حداکثر استفاده را از روابط جبر لی بخصوص اتحاد جاکوبی می کنیم. خواهیم دید که ریشه ها را می توان به عنوان بردارهای r بعدی دریک دیاگرام موسوم به دیاگرام ریشه ها یا $Root\ \ Diagram$ رسم کرد. این دیاگرام تقارن های بسیارجالبی دارد به نحوی که می توان با دانستن بخش کوچکی از آن تمام دیاگرام را بازسازی کرد.

دراین بخش می خواهیم ساختمان دیاگرام ریشه هاراتعیین کنیم. یکی از جالب ترین خصلت های جبرهای نیم ساده آن است که ساختمان هندسی این دیاگرام توسط خواص جبرلی به طورکامل مشخص می شود. خواهیم دید که این دیاگرام که دارای تقارن های هندسی جالبی است به طورکامل نوع جبر را مشخص می کند.

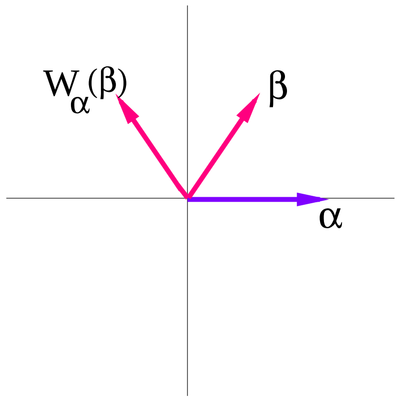
نخست درفضای ریشه ها که یک فضای حقیقی است ضرب داخلی زیر را تعریف می کنیم:

$$(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^{r} \alpha^i \beta_i. \tag{۲۶}$$

■ **قضیه:** اگر α و β دو ریشه باشند، آنگاه

الف: $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ یک عدد صحیح است،

ب: $W_\alpha(\beta) := \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ نیز یک ریشه است. به بیان دیگر انعکاس β نسبت به صفحه ای که بر α عمود است نیز یک ریشه است، شکل (1) . ازآنجا که این خاصیت برای هردو ریشه ای برقرار است، دیاگرام ریشه ها تقارن های بسیار جالبی پیدا می کند وما را قادر می سازد که با داشتن تعدادی از ریشه ها بقیه را با استفاده از این نوع انعکاس ها بدست آوریم. این انعکاس ها انعکاس وایل $Weyl\ \ Reflection$ نامیده می شوند.



شکل ۱: یک انعکاس وایل.

■ **اثباتِ الف:** دو ریشه α و β را در نظر بگیرید. این دو ریشه متعلق به عناصر E_α و E_β هستند. حال با استفاده از E_α رشته ای از ریشه های

$$\beta,\ \ \beta+\alpha,\ \ \beta+2\alpha,\ \ \cdots\ \ \beta+p\alpha \tag{۲۷}$$

را ایجاد می‌کنیم به طوریکه $\beta+(p+1)\alpha\notin\sum$. هم چنین این رشته را با اثر عملگر $E_{-\alpha}$ به پایین ادامه می دهیم تا به صورت زیر در آید:

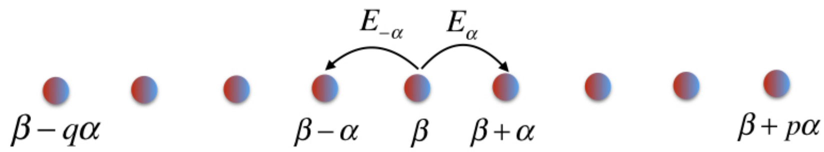
$$\beta-q\alpha,\ \beta-(q-1)\alpha,\ \ \beta-(q-2)\alpha,\ \ \cdots\beta,\ \ \beta+\alpha,\ \ \beta+2\alpha,\ \ \cdots\ \ \beta+p\alpha \tag{۲۸}$$

بالاترین پله این نردبان $\beta+p\alpha$ و پایین ترین پله آن $\beta-q\alpha$ است. دراین نردبان E_α مثل یک عملگر بالا بر و $E_{-\alpha}$ مثل یک عملگر پایین بر عمل می‌کند. شکل (2) چنین نردبانی را نشان می دهد:

حال می توانیم بنویسیم:

با عملگر $E_{-\alpha}$ می توانیم از پله های این نردبان پایین بیاییم :

$$[E_{-\alpha},E_{\beta+j\alpha}]\ \ =\ \ \nu_j E_{\beta+(j-1)\alpha},$$



شکل ۲: یک نردبان‌که از اثر عملگرهای E_α و $E_{-\alpha}$ روی E_β بوجود می آید.

$$[E_\alpha, E_{\beta+j\alpha}] \quad = \quad \mu_{j+1} E_{\beta+(j+1)\alpha}. \tag{۲۹}$$

که در آن μ_j و ν_j ضرایبی هستندکه دانستن مقدار آنها در استدلال زیر اهمیتی ندارد. با توجه به این‌که بالاترین پله نردبان $\beta + p\alpha$ و پایین ترین پله آن $\beta - q\alpha$ است، نتیجه می‌گیریم:

$$\nu_{-q} = \mu_{p+1} = 0. \tag{۳۰}$$

حال با استفاده از اتحاد جاکوبی می توانیم بنویسیم:

$$[\,E_\alpha\,,\,[E_{-\alpha}\,,\,E_{\beta+j\alpha}\,]\,] + [\,E_{-\alpha}\,,\,[E_{\beta+j\alpha}\,,\,E_\alpha\,]\,] + [\,E_{\beta+j\alpha}\,,\,[E_\alpha\,,\,E_{-\alpha}\,]\,] = 0 \tag{۳۱}$$

که با استفاده از روابط (۲۹) به شکل زیر در می آید:

$$[\,E_\alpha\,,\,\mu_j E_{\beta+(j-1)\alpha}] + [\,E_{-\alpha}\,,-\nu_j E_{\beta+(j+1)\alpha}\,] + [\,E_{\beta+j\alpha}\,,\alpha^i H_i] = 0 \tag{۳۲}$$

و بازهم با استفاده از روابط (۲۹)

$$\left(\mu_j\nu_j - \mu_{j+1}\nu_{j+1} - \alpha\cdot(\beta + j\alpha)\right) E_{\beta+j\alpha} = 0 \tag{۳۳}$$

بنابراین با نامگذاری $\xi_j \equiv \nu_j\mu_j$ به رابطه تکرار زیر می رسیم:

$$\xi_j - \xi_{j+1} = \alpha \cdot (\beta + j\alpha) \qquad (۳۴)$$

حال می توانیم طرفین رابطه های بالا را برای مقادیر مختلف j از $j = -q$ تا $j = p$ جمع‌کنیم و با توجه به شرایط مرزی $\xi_{-q} = \xi_p = 0$ به رابطه زیر برسیم:

$$0 \equiv \sum_{j=-q}^{j=p} (\xi_j - \xi_{j+1}) = \sum_{j=-q}^{j=p} \alpha \cdot (\beta + j\alpha). \qquad (۳۵)$$

■ تمرین: جمع بالا را انجام دهید و نشان دهیدکه رابطه زیر حاصل می شود:

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = q - p. \qquad (۳۶)$$

■ **اثباتِ ب:** انعکاس وایل یک ریشه β نسبت به α که آن را با $W_\alpha(\beta)$ نشان می دهیم، از رابطه زیر بدستی می آید:

$$W_\alpha(\beta) := \beta - 2\frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha}\alpha. \qquad (۳۷)$$

با توجه به رابطه (۳۶) این رابطه به صورت زیر در می آید:

$$W_\alpha(\beta) := \beta - (q - p)\alpha = \beta + (p - q)\alpha \qquad (۳۸)$$

بنابراین دیده می شودکه ریشه بدست آمده مابین پله های بالا و پایین نردبانی‌که در بالا ساختیم است و بنابراین یک ریشه است.

دیدیم‌که به ازای هر ریشه $\alpha \in \sum$، ریشه $-\alpha$ نیز متعلق به $\sum$ است. یک سوال طبیعی این است‌که چه مضارب دیگری از α در $\sum$ وجود دارند؟ آیا ریشه هایی مثل 2α، 3α یا -2α نیز در$\sum$ وجود دارند؟ پاسخ این سوال درقضیه زیرداده شده است.

■ **قضیه:** اگر $\alpha \in \sum$، آنگاه تنها مضاربی از α که در $\sum$ وجود دارند عبارتند از $-\alpha, 0, \alpha$.

■ **اثبات:** فرض کنید که $\beta = k\alpha$ یک ریشه باشد. دراین صورت می بایست

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = \frac{2(\alpha,k\alpha)}{(k\alpha,k\alpha)} = \frac{2}{k} \tag{۳۹}$$

یک عدد صحیح باشد. این قید تمام مضارب $k\alpha$ با $k > 2$ را ممنوع می کند. حال نشان می دهیم که مضرب 2 نیز مجازنیست. فرض کنید که ریشه های α و 2α در$\sum$ وجود داشته باشند. می دانیم که $-\alpha$ نیز در $\sum$ وجود دارد. چون قبلاً ثابت کرده ایم که ریشه 3α در $\sum$ وجود ندارد نتیجه می گیریم که $[E_\alpha, E_{2\alpha}] = 0$. حال براکت دو طرف را با $E_{-\alpha}$ حساب می کنیم و ازاتحاد جاکوبی استفاده می کنیم:

$$0 = [E_\alpha, E_{2\alpha}] \longrightarrow 0 = [E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_{2\alpha}] \longrightarrow 0 = [[E_{-\alpha}, E_\alpha], E_{2\alpha}] + [E_\alpha, [E_{-\alpha}, E_{2\alpha}] \tag{۴۰}$$

حال از روابط جبر استفاده می کنیم که برمبنای آن $\forall\ \gamma \quad [H_i, E_\gamma] = \gamma_i E_\gamma$ ، $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i$ و $[E_{-\alpha}, E_{2\alpha}] = NE_\alpha$ که درآن N یک ثابت است.

خواهیم داشت:

$$0 = \alpha^i [H_i, E_{2\alpha}] + [E_\alpha, NE_\alpha] \longrightarrow 0 = \alpha^i (2\alpha_i E_{2\alpha}) \longrightarrow 0 = 2(\alpha,\alpha) E_{2\alpha} \tag{۴۱}$$

اما چون (α,α) نمی تواند مساوی صفر شود بنابراین نتیجه می گیریم که $E_{2\alpha} = 0$ که به معنای آن است که ریشه 2α در $\sum$ وجود ندارد.

■ **قضیه:** هر نردبان از ریشه ها حداکثر شامل چهار ریشه است. به عبارت دیگر به ازای هر دو ریشه α و β، عدد صحیح $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ تنها می تواند یکی از اعداد زیرباشد:

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3. \tag{۴۲}$$

این رابطه درواقع بیان می کند که نردبان ۵ پله ای یابالاتراز آن وجود ندارد.

■ **اثبات:** فرض کنید که یک نردبان با ۵ پله یابیشتر وجود داشته باشد. یک زیررشته ۵ تایی از این نردبان به صورت زیردرنظرمی گیریم:

$$\beta - 2\alpha, \quad \beta - \alpha, \quad \beta, \quad \beta + \alpha, \quad \beta + 2\alpha. \tag{۴۳}$$

حال دقت می‌کنیم که باتوجه به قضیه قبلی $\beta + 2\alpha + \beta = 2(\beta + \alpha) \notin \sum$. هم چنین $\beta + 2\alpha - \beta = 2\alpha \notin \sum$. بنابراین ریشه $\beta + 2\alpha$ به تنهایی یک نردبان تک پله ای رادرجهت β تشکیل می دهد. باتوجه به رابطه (؟؟) خواهیم داشت:

$$(\beta + 2\alpha, \beta) = 0. \tag{۴۴}$$

استدلال بالا را می توانیم برای $\beta - 2\alpha$ نیزتکرارکنیم که نتیجه اش آن خواهد بودکه $\beta - 2\alpha$ نیز یک نردبان تک پله ای درجهت β است. درنتیجه بازهم باتوجه به رابطه (؟؟) خواهیم داشت:

$$(\beta - 2\alpha, \beta) = 0. \tag{۴۵}$$

ازترکیب دو رابطه $(44,45)$ بدست می آوریم $(\beta, \beta) = 0$ ویا $\beta = 0$ که غیرممکن است. بنابراین بافرض وجود یک نردبان بیش از ۴ پله ای به تناقض رسیدیم. این اثبات قضیه راکامل می‌کند.

۱.۳ ریشه های مثبت و ریشه های ساده

دیدیم که به ازای هرریشه α یک ریشه $-\alpha$ وجود دارد. این امر به ما امکان می دهد که تنها خواص نیمی از ریشه ها را مطالعه کنیم. می توانیم فضای ریشه ها را به ریشه های مثبت و منفی تقسیم کنیم. ریشه های مثبت را به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

- **تعریف:** یک ریشه را ریشه مثبت یا $positive \;\; root$ می‌گوییم هرگاه اولین مولفه غیرصفرآن مثبت باشد. مجموعه ریشه های مثبت را با $\sum^+$ نشان می دهیم. این تعریف به مااجازه می دهد که برروی تمام ریشه ها یک ترتیب اعمال کنیم به این ترتیب که برای هردوریشه $\alpha, \beta \in \sum$ می‌گوییم $\alpha > \beta$ اگر $\alpha - \beta \in \sum^+$ باشد. واضح است که این رابطه یک رابطه ترتیب است به این معنی‌که از $\alpha > \beta$ و $\beta > \gamma$ می توان نتیجه گرفت که $\alpha > \gamma$.

■ **تعریف:** یک ریشه ساده یا $simple\ \ root$ ریشه مثبتی است که نتوان آن را به صورت مجموع دو ریشه دیگر نوشت. مجموعه ریشه های ساده را با $\prod$ نشان می دهیم.

■ **قضیه:** برای هردوریشه متعلق به $\sum$ داریم:

$$-3 \leq \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \leq 3. \tag{۴۶}$$

■ **اثبات:** فرض کنیدکه $\beta_{\max}$ بالاترین پله یک نردبان β که روی ریشه مثبت α ساخته می شود باشد. اعضای این رشته را با $\beta_{\max},\ \ \beta_{max}-\alpha,\ \ \beta_{max}-2\alpha,\ \ \beta_{\max}-g\alpha$ نشان می دهیم. قبلاً نشان دادیم که $g=\frac{2(\beta_{\max},\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. ازقضایای قبلی می دانیم که $g\leq 3$. بنابراین براحتی معلوم می شود که برای هرعضوی از این رشته مثل β رابطه زیربرقراراست:

$$0 \leq \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \leq 3. \tag{۴۷}$$

این رابطه برای وقتی است که α ریشه مثبت باشد. هرگاه ریشه های منفی را نیز درنظربگیریم به رابطه (46) می رسیم.

■ **قضیه:** زاویه بین هردوریشه تنهایکی از مقادیرزیراست:

$$\phi = 0^\circ,\quad 30^\circ,\quad 45^\circ,\quad 60^\circ,\quad 90^\circ,\quad 120^\circ,\quad 150^\circ. \tag{۴۸}$$

■ **اثبات:** زاویه بین دوریشه دلخواه $\alpha,\beta\in\sum$ را با ϕ نشان می دهیم. داریم :

$$\cos^2\phi = \frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} \tag{۴۹}$$

باتوجه به رابطه (47) بدست می آوریم:

$$\cos^2\phi = 0,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{3}{4},\quad 1. \tag{۵۰}$$

این رابطه قضیه را ثابت می‌کند.

تاکنون زاویه بین ریشه های مختلف را به مقادیرمعینی محدودکردیم. حال نشان می دهیم‌که نسبت طول ریشه ها نیز فقط مقادیرمعینی است. این کاررادرمراحل جداگانه انجام می دهیم.
ازآنجاکه برای هر ریشه α یک ریشه $-\alpha$ وجود دارد می توانیم فقط زوایای کمتریامساوی با $90°$ را درنظربگیریم. دوریشه α و β درنظرمی گیریم وزاویه بین آنهارا با ϕ نشان می دهیم.

الف: اگر زاویه بین α, β برابر با صفرباشد می دانیم‌که حتماً $\beta = \pm\alpha$ و بنابراین $|\beta| = |\alpha|$.

ب: اگر زاویه بین دوریشه برابربا $30°$ باشد آنگاه $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ازآنجاکه $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ بدست می آوریم‌که

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\phi = 0,\ \frac{1}{2},\ 1, \frac{3}{2}, \tag{۵۱}$$

یا

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|} = 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \ \sqrt{3}. \tag{۵۲}$$

هم چنین باتوجه به اینکه $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)} = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ بدست می آوریم‌که

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cos\phi = 0,\ \frac{1}{2},\ 1, \frac{3}{2}. \tag{۵۳}$$

ویا

$$\frac{|a|}{|b|} = 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \ \sqrt{3}. \tag{۵۴}$$

ازترکیب روابط (54, 52) بدست می آوریم‌که تنها امکان موجود برای نسبت بین طول این دوریشه عدد $\sqrt{3}$ است.

-	90°
۱	120°
$\sqrt{2}$	135°
$\sqrt{3}$	150°

جدول ۱: جدول ۱:ز اویه های ممکن بین ریشه های ساده و نسبت بین طول آنها.

ج: اگرزوایه بین دوریشه برابربا 45° باشد مطابق باروش قبل بدست می آوریم:

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|} = 0, \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sqrt{2}, \ \ \frac{3}{\sqrt{2}}, \tag{۵۵}$$

و

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} = 0, \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sqrt{2}, \ \ \frac{3}{\sqrt{2}}, \tag{۵۶}$$

که نشان می دهد تنهانسبت ممکن بین طول این دوریشه برابراست با $\sqrt{2}$.

د: اگر زاویه بین دو ریشه برابربا 90° باشد نسبت بین طول ریشه ها نامعین باقی می ماند. اثبات این امر را به تمرین ها واگذارمی‌کنیم.

جدول زیرزاویه های بین ریشه های ساده و نسبت بین طول آن ها رانشان می دهد:

۲.۳ خواص ریشه های ساده

- **قضیه:** اگر α و β دوریشه ساده باشند، آنگاه $\alpha - \beta$ ریشه نیست.

- **اثبات:** بدون نقض‌کلیت فرض می‌کنیم‌که $\alpha > \beta$ باشد. دراین صورت $\alpha - \beta$ نمی تواند یک ریشه باشد زیرا می توان نوشت $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$ که به این معناست‌که β مجموعی از دوریشه مثبت است‌که با ساده بودن β منافات دارد. اما $\beta - \alpha$ نیز نمی تواند

یک ریشه باشد زیرا وجود آن به معنای وجود قرینه آن یعنی $\alpha - \beta$ نیزهست که دیدیم نمی تواند یک ریشه باشد.

■ **قضیه:** زوایه بین هردوریشه ساده حتماً منفرجه است.

■ **اثبات:** دیدیم که اگر α و β دوریشه باشند آنگاه $\alpha - \beta$ دیگر یک ریشه نیست. بنابراین درعبارت (؟؟)، q برابرباصفراست. ودرنتیجه $0 \leq \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ که به این معناست که زاویه بین دوریشه ساده بیشتریامساوی با $90°$ است.

■ **قضیه:** ریشه های ساده مستقل خطی هستند وتعداد آنها برابربا رتبه جبراست.

■ **اثبات:** فرض کنید که چنین نباشد. دراین صورت می توان ضرایب غیرصفری مثل $\{k_\alpha\}$ یافت به قسمی که

$$\sum_{\alpha\in\prod} k_\alpha \alpha = 0. \tag{۵۷}$$

ازآنجاکه همه ریشه های ساده مثبت هستند رابطه بالاتنهاوقتی می تواندبرقرارباشد بعضی از k_α ها مثبت و بقیه منفی باشند. مجموعه ریشه هایی راکه باضریب مثبت یا صفر درجمع بالا وارد شده اند با $\prod^+$ و مجموعه ریشه هایی راکه باضریب منفی وارد شده اند با $\prod^-$ نشان می دهیم. قرارمی دهیم

$$y := \sum_{\alpha\in\prod^+} k_\alpha\alpha, \qquad z := -\sum_{\alpha\in\prod^-} k_\alpha\alpha =: \sum_{\alpha\in\prod^-} k'_\alpha\alpha. \tag{۵۸}$$

ازرابطه (57) واضح است که $y = z$ وبنابراین

$$(y, y) = (y, z). \tag{۵۹}$$

امااز‌آنجا y و z هردو ترکیبی خطی از ریشه های ساده با ضرایب مثبت هستند $(k'_\alpha \geq 0)$ وزاویه بین هردوریشه ساده مساوی یابیشتراز $90°$ درجه است خواهیم داشت $(y, z) \leq 0$ و یا $(y, y) \leq 0$ که غیرممکن است. بنابراین ریشه های ساده مستقل خطی اند.

حال ثابت می‌کنیم که تعداد ریشه های ساده بارتبه جبریعنی r برابراست. مسلم است که تعداد آنها نمی تواند از r بیشترباشد زیر این بردارها r بعدی و مستقل خطی اند. حال ثابت می‌کنیم که تعداد آنها از r کمترنیز نمی تواند باشد چراکه دراین صورت برای جبر پایه ای چنان یافت که که یکی از مولفه ها مثلاً اولین مولفه ریشه ها ی ساده‌و درنیتجه اولین مولفه همه ریشه هابرابرباصفرباشد. تحت این شرایط ووابط جابجایی برای H_1 و بقیه عناصرجبر به فرم زیردرخواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
&[H_1, H_j] = 0 \qquad && \forall\, i, \\
&[H_1, E_\alpha] = 0 \qquad && \forall \alpha \in \sum,
\end{aligned}
\tag{۶۰}
$$

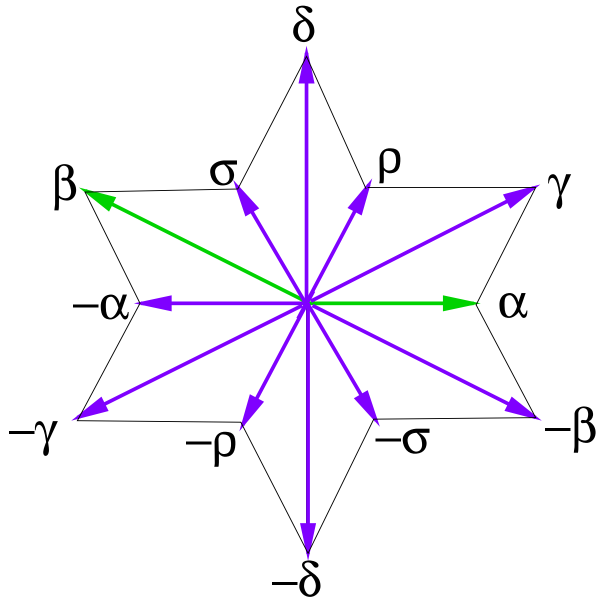
اما این امر به این معناست که H_1 یک زیرجبرآبلی ناوردا ست که با نیم ساده بودن جبرمنافات دارد. اثبات قضیه دراینجا کامل می شود.

۴ تمام جبرهای لی با رتبه ۲

آنچه که دربخش پیشین آموخته ایم به ماامکان می دهد که تمام جبرهای لی نیم ساده را طبقه بندی‌کنیم. این طبقه بندی را به بخش های بعدی این درس موکول می‌کنیم. دراین بخش به عنوان مثال تمام جبرهای لی با رتبه ۲ را طبقه بندی می‌کنیم. می دانیم که هرچنین جبری دو ریشه ساده دارد. زوایه بین این دوریشه تنها می تواند یکی از مقادیر $90°$ ، $120°$ ، $135°$ یا $150°$ رااختیارکند. این امکانات را به ترتیب بررسی می‌کنیم.

۱.۴ زاویه ۱۵۰ درجه

دراین حالت نسبت بین طول های دوریشه برابراست با $\sqrt{3}$. هرگاه یک ریشه را $\alpha = (1, 0)$ بگیریم ریشه دوم برابرخواهد بود با $\beta = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$، شکل (3). باانعکاس وایل β نسبت به α ریشه γ بدست می آید.



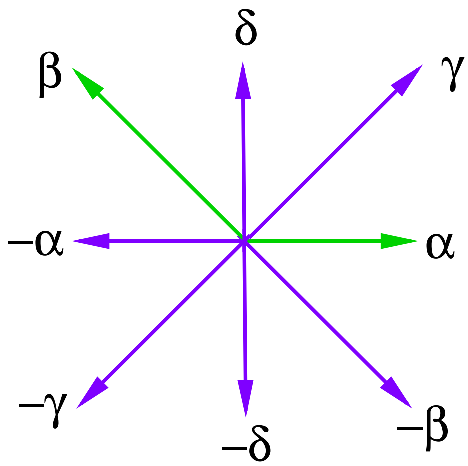
شکل ۳: دیاگرام ریشه های جبر بارتبه ۲ وقتی که زاویه بین دوریشه ساده ۱۵۰ درجه است.

انعکاس وایل α نسبت به γ ریشه σ را بدست می دهد. هم چنین انعکاس وایل σ نسبت به α ریشه ρ را بدست می دهد. بااضافه کردن ریشه های منفی دیاگرام کامل ریشه ها که بدست می آید که درکتب جبرلی اصطلاحاً به ستاره داود مشهوراست. این دیاگرام مربوط به یک جبرلی با رتبه ۲ و بعد ۱۲ و مشهور به جبر G_2 است. مطالعه این دیاگرام نشان می دهد که ریشه های مثبت به ترتیب زیر برحسب ریشه های ساده نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} \sigma &= \beta + \alpha \\ \rho &= \beta + 2\alpha \\ \gamma &= \beta + 3\alpha \\ \delta &= 2\beta + 3\alpha. \end{aligned} \qquad (۶۱)$$

۲.۴ زاویه ۱۳۵ درجه

دراین حالت نسبت طول ریشه ها برابربا $\sqrt{2}$ است. یک ریشه را $\alpha = (1, 0)$ و دیگری را $\beta = (-\frac{1}{\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}})$ می گیریم، شکل (4) . باانعکاس های وایل می توان بقیه ریشه هاراساخت. دقت دراین شکل نشان می دهد که بقیه ریشه های مثبت عبارتند از:



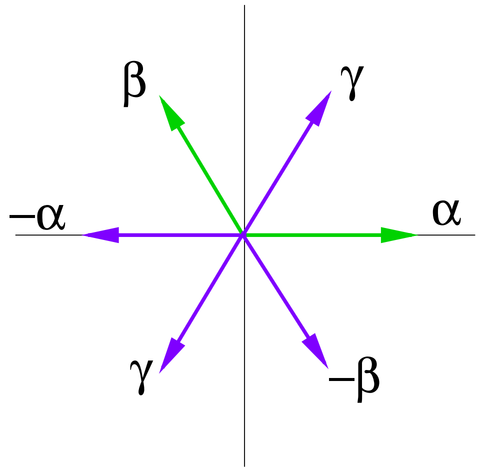
شکل ۴: دیاگرام ریشه های یک جبربا رتبه ۲ وقتی‌که زاویه بین دوریشه ساده ۱۳۵ درجه است.

$$\delta = \beta + \alpha$$
$$\gamma = \beta + 2\alpha. \qquad (۶۲)$$

این دیاگرام مربوط به جبر لی $so(5)$ است.

ممکن است‌که خواننده سوال‌کندکه چرانمی توان ریشه ای مثل $2\beta + \alpha$ داشت . یک نگاه به شکل نشان می دهدکه چنین ریشه ای زاویه ای باریشه δ می سازدکه جزء زوایای مجازبین ریشه هانیست. به همین دلیل ریشه ای مثل $\beta + 3\alpha$ نمی تواند وجود داشته باشد. این استدلال را بطریق جبری نیز می توان انجام داد به این معناکه وجود چنین ریشه هایی شرط عدد صحیح بودن $\frac{2(\delta,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}$ رانقض می‌کند. تحقیق این موضوع را به عهده خواننده می‌گذاریم.

درواقع یک بارکه ریشه های ساده را داشته باشیم می توانیم بقیه دیاگرام ریشه هارا به این صورت بسازیم‌که تمام نردبان های باطول‌کمتراز ۵ را برای هرجفت ریشه هابسازیم و آنهایی‌که شرط فوق را برقرارنمی‌کنند حذف‌کنیم.



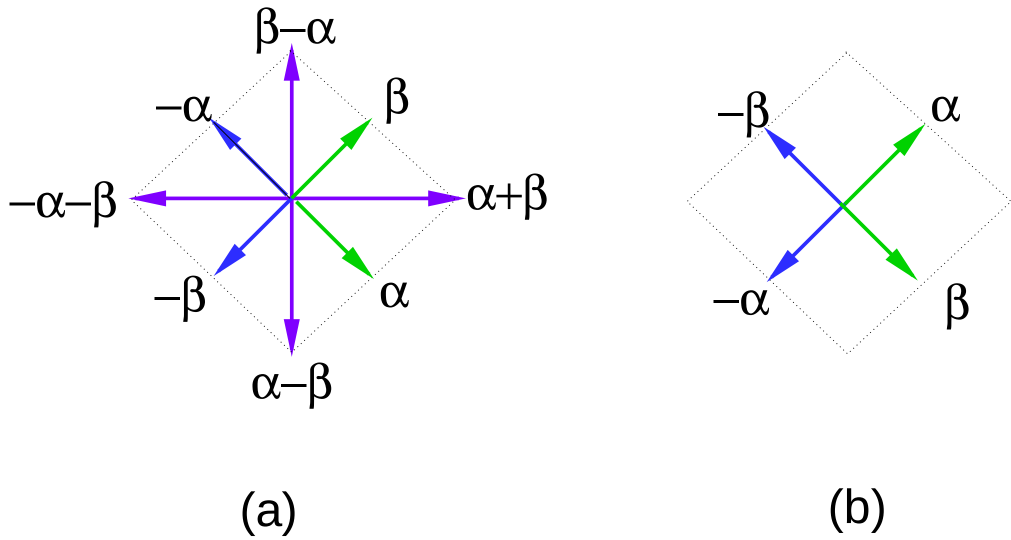
شکل ۵: دیاگرام ریشه های یک جبربا رتبه ۲ وقتی‌که زاویه بین دوریشه ساده ۱۲۰ درجه است.

۳.۴ زاویه ۱۲۰ درجه

دراین حالت طول دو ریشه مساوی است. یکی از ریشه هارا $\alpha = (1,0)$ ودیگری را $\beta = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ می‌گیریم. بقیه ریشه ها ازانعکاس های وایل بدست می‌آیند. دیاگرام ریشه همان چیزی است‌که قبلاً درشکل 5 نشان داده شده است. برای‌کامل بودن یکبار دیگراین شکل رادراینجا می آوریم.

۴.۴ زاویه ۹۰ درجه

دراین حالت دو جبررتبه دو وجود دارد‌که دیاگرام ریشه های آنهامطابق شکل (6) زیراست. تحقیق این مورد را به خواننده می سپاریم. دیاگرام سمت چپ مربوط به جبر $sp(4)$ و دیاگرام سمت راست مربوط به جبر $so(4)$ است.



شکل ۶: دیاگرام ریشه های جبرهای بارتبه ۲ وقتی‌که زاویه بین دوریشه ساده ۹۰ درجه است.